

تئوری کرنش

۱-۱ مقدمه

در این فصل، تئوری حاکم بر تغییر شکل اجسام انعطاف پذیر و جابجایی اجسام صلب و نیز رویکردهای مختلف در این زمینه مانند رویکرد مادی و فضایی بیان می‌شود. به علاوه بحث جامعی درخصوص گرادیان بردار جابجایی، تغییر طول و تغییر جهت المان خطی ذکر خواهد شد. سپس مبانی ریاضی تعریف کرنش نرمال و برشی تشریح می‌شود. پس از این مباحث، سپس تانسور کرنش، مفهوم کرنش اصلی و جهت اصلی، نامتغیر کرنش و کرنش حجمی بررسی می‌شوند. حالت خاص تغییر شکل همگن اجسام و سپس تئوری کرنش و دوران کوچک و شرایط سازگاری کرنش نیز مورد بررسی قرار خواهند گرفت. نهایتاً شکل مادی معادله پیوستگی استخراج خواهد شد. در پایان فصل نیز تعدادی مسئله مهم و هدفمند حل شده ارائه شده است.

۱-۲ جسم انعطاف پذیر پیوسته

اجسام در مکانیک کلاسیک، عموماً به صورت صلب در نظر گرفته می‌شوند. در این حالت، فاصله میان نقاط جسم در حین اعمال بار ثابت باقی می‌ماند. فرض صلب بودن در بسیاری از موارد از دقت کافی برخوردار است؛ حال آن که در برخی مسایل مهندسی مانند رفتار سیال تحت اعمال نیرو، فرض صلب بودن به پاسخ‌های کاملاً اشتباه منجر خواهد شد. در طبیعت، جسمی با رفتار کاملاً صلب وجود ندارد و تمامی مواد، کم یا بیش دارای خاصیت انعطاف پذیری می‌باشند در این فصل، رفتار انعطاف پذیری اجسام، مورد بحث قرار خواهد گرفت.

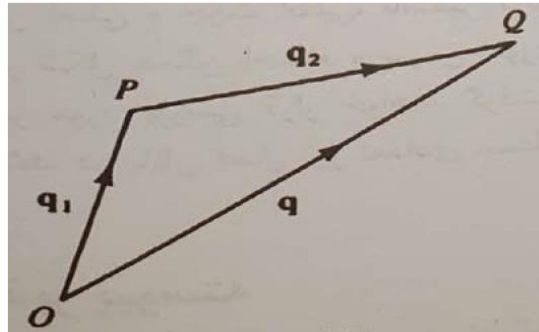
پیوستگی

برای توصیف حرکت یک جسم انعطاف پذیر با رویکرد مولکولی، باید روابط حرکت مربوط به تمامی مولکول‌ها استخراج گردد. این رویکرد درخصوص مدلسازی رفتار گازها توسعه یافته است. در مورد جامدات، رویکرد فوق در مرحله توسعه دانشی در نانومکانیک و فیزیک می‌باشد. هدف اصلی این فصل مطالعه حرکت مولکولی نبوده و صرفاً رفتار کلی جسم، مانند تعیین شتاب، سرعت، تنش، کرنش و دمای نقاط مختلف نسبت به زمان، مد نظر خواهد بود. بدین منظور فرض می‌شود که جسم محصور به ناحیه R بوده و هر همسایگی از نقطه مادی P در ناحیه R متراکم باشد. منظور از متراکم بودن، وجود مقدار کافی از ماده در فضا و زمان برای تعریف مفاهیم چگالی، دما، انرژی جنبشی و غیره است.

در ادامه نحوه تغییر شکل یا تغییر در فواصل میان نقاط مادی نواحی متراکم بررسی خواهد شد. با اعمال بار بر روی جسم، پیکربندی آن از حالت پایه به حالت تغییر یافته تبدیل خواهد شد. در ادامه برخی مفاهیم پایه تشریح می‌شوند.

۳-۱ جابجایی جسم صلب

جابجایی ذره با مکان ابتدا و انتهای آن تعیین می‌شود. در این حالت مسیر حرکت ذره بین نقاط ابتدا و انتها مهم نیست. به عنوان مثال، در شکل (۱-۱)، q_1 و بردار جابجایی ذره از O به P و q_2 بردار جابجایی ذره از P به Q است. در نتیجه بردار برآیند جابجایی به صورت $q = q_1 + q_2$ خواهد بود.

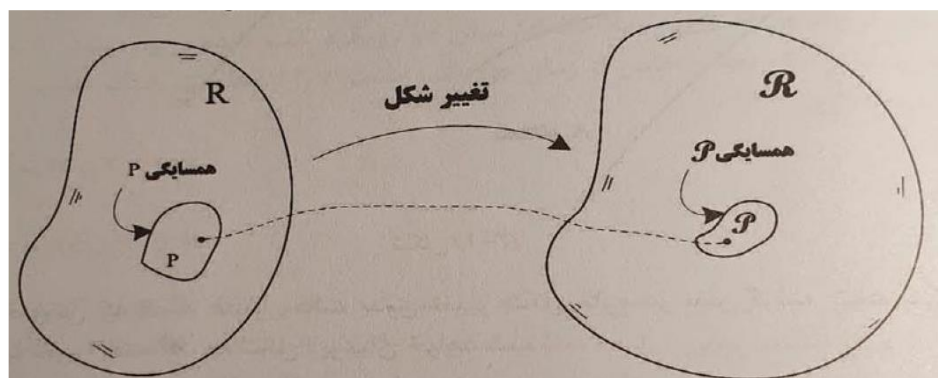


شکل (۱-۱)

سه مفهوم انتقال، دوران و جابجایی صفحه‌ای در تئوری تغییر شکل از اهمیت بالایی برخوردارند. انتقال فرآیندی است که در طی آن تمامی بردارهای جابجایی ذرات جسم برابر و هم‌جهت می‌باشند. انتقال با توجه به ثابت ماندن فواصل میان ذرات، به عنوان یکی از انواع جابجایی جسم صلب شناخته می‌شود. دوران یک جسم حول محور x به اندازه θ به حالتی اطلاق می‌شود که حرکت تمامی ذرات، به صورت کمان‌های دایروی با مرکز واقع بر محور x و حرکت در صفحه عمود بر آن باشد. جابجایی صفحه‌ای نیز فرآیندی است که در آن تمامی بردارهای جابجایی موازی یک صفحه خاص می‌باشند.

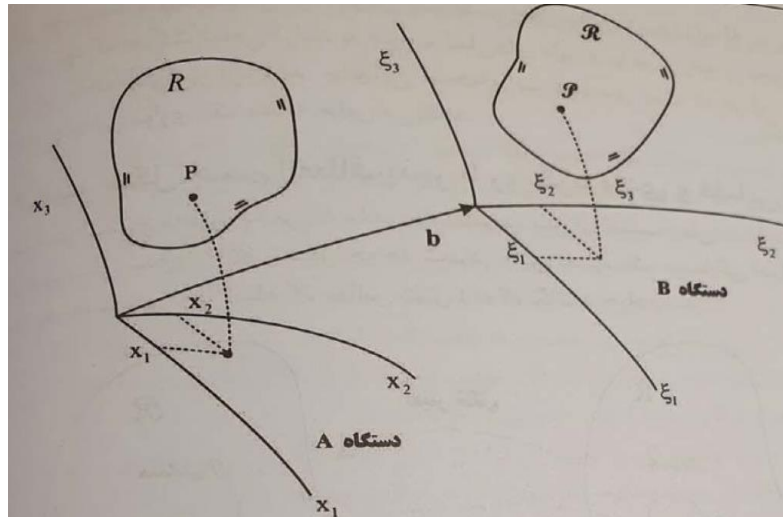
۴-۱ تغییر شکل جسم انعطاف‌پذیر با رویکرد مادی و فضایی

یک جسم بسته و محصور به مرز R را در نظر بگیرید. پس از گذشت زمان t ، ناحیه مادی دچار تغییر شکل شده و به $\mathcal{R}$ تبدیل خواهد شد. در حین تغییر، یک همسایگی اطراف نقطه P ، به یک همسایگی دیگر نقطه $\mathcal{P}$ مطابق شکل (۱-۲) نگاشته خواهد شد.



شکل (۲-۱)

در تئوری مکانیک محیط پیوسته تغییر شکل جسم R به $\mathcal{R}$ به کمک دو دستگاه منحنی الخط اقلیدسی بیان می‌شود. بدین ترتیب که دستگاه (x_1, x_2, x_3) یا (x, y, z) برای R و دستگاه (ξ_1, ξ_2, ξ_3) یا (ξ, η, ζ) برای $\mathcal{R}$ در نظر گرفته می‌شود. دو دستگاه A و B در شکل (۱-۳) نشان داده شده است.



شکل (۱-۳)

در صورتی که R به عنوان حالت بدون تغییر شکل ماده در نظر گرفته شود، پیکربندی نهایی یا تغییر یافته $\mathcal{R}$ به شکل زیر بیان خواهد شد.

$$\xi_1 = \xi_1(x_1, x_2, x_3; t) \quad \xi_2 = \xi_2(x_1, x_2, x_3; t) \quad \xi_3 = \xi_3(x_1, x_2, x_3; t)$$

و یا در شکل اندیسی

$$\xi_i = \xi_i(x_1, x_2, x_3; t) \quad i = 1, 2, 3$$

این روابط بیان‌گر مکان ذره در لحظه t است. فرض می‌کنیم که (ξ_1, ξ_2, ξ_3) توابعی پیوسته و مشتق‌پذیر از (x_1, x_2, x_3) باشند. مفهوم فیزیکی این فرض، عدم پارگی و جدایش در حین تغییر شکل است. به عبارت دیگر تناظری یک به یک میان نقاط محصور در نواحی R و $\mathcal{R}$ وجود دارد. در نتیجه یک حل یکتا برای روابط (۱-۲) به صورت زیر به دست می‌آید.

$$x_1 = x_1(\xi_1, \xi_2, \xi_3; t) \quad x_2 = x_2(\xi_1, \xi_2, \xi_3; t) \quad x_3 = x_3(\xi_1, \xi_2, \xi_3; t)$$

یا در شکل اندیسی

$$x_i = x_i(\xi_1, \xi_2, \xi_3; t) \quad i = 1, 2, 3$$

در این حالت می‌توانیم هر کدام از دسته متغیرهای (x_1, x_2, x_3) یا (ξ_1, ξ_2, ξ_3) را به عنوان متغیر مستقل در نظر بگیریم. به عنوان مثال با انتخاب (x_1, x_2, x_3) به صورت مستقل مطالعه خود را به حرکت یک ذره در فضا معطوف می‌کنیم. به این رویکرد، رویکرد مادی یا لاگرانژی گفته می‌شود. از طرف دیگر اگر متغیرهای

(ξ_1, ξ_2, ξ_3) را به عنوان متغیرهای مستقل برگزینیم، معادل آن است که نگاه خود را بر یک بخش از فضا ثابت کرده‌ایم و مطالعه، بر ذرات گذرنده از آن ناحیه متمرکز می‌باشد. این رویکرد با نام رویکرد فضایی یا اوپلری شناخته می‌شود.

در بررسی و توصیف یک کمیت می‌توان از هر کدام از دو رویکرد مادی و فضایی استفاده کرد. رویکرد اوپلری معمولاً در مطالعه دینامیک سیالات و نیز تحلیل‌هایی با جابجایی‌های بزرگ مانند انفجار به کار می‌رود. از طرف دیگر استفاده از رویکرد مادی در تحلیل‌های متداول مکانیک جامدات و مباحث انرژی، از سادگی بیشتری برخوردار است. در صورت وجود تغییر شکل‌های کوچک، تفاوت قابل ملاحظه‌ای میان دو رویکرد گفته شده وجود ندارد. با توجه به مطالعه جسم در یک لحظه خاص از زمان می‌توانیم متغیر t را از معادلات حذف نماییم. در نتیجه داریم:

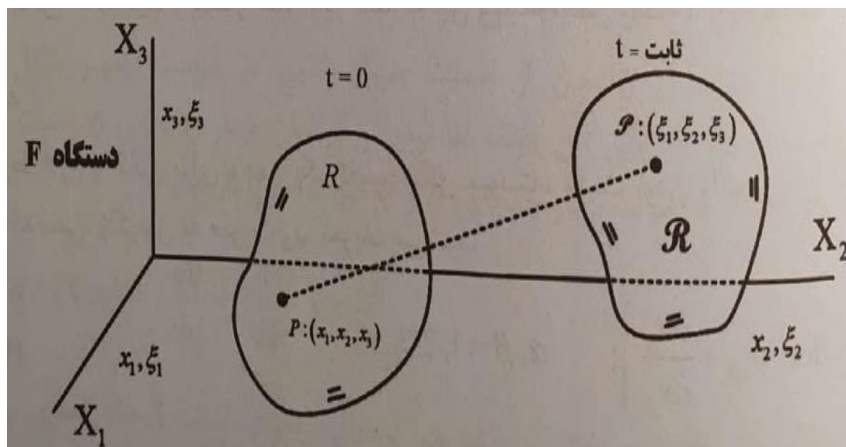
$$\xi_i = \xi_i(x_1, x_2, x_3)$$

و نیز

$$x_i = x_i(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$$

برای سادگی بیشتر فرض می‌کنیم که دو دستگاه منحنی‌الخط اقلیدسی گفته شده بر یکدیگر منطبق باشند. بدین ترتیب مطابق شکل (۴-۱) دو ناحیه R و $\mathcal{R}$ در دستگاه F قرار دارند. با توجه به این شکل مؤلفه‌های بردار جابجایی ذره P یا (u_1, u_2, u_3) به صورت زیر به دست می‌آیند.

$$u_1 = \xi_1 - x_1 \quad u_2 = \xi_2 - x_2 \quad u_3 = \xi_3 - x_3$$



شکل (۴-۱)

جابجایی ذره P در شکل برداری، به صورت زیر خواهد بود.

$$q = iu_i + ju_r + ku_r$$

که در آن (i, j, k) بردارهای واحد در جهت محورهای (X_1, X_2, X_3) می‌باشند. با استفاده از روابط (۵-۱) و (۶-۱) می‌توان بردار جابجایی ذره را به هر کدام از دو صورت فضایی (ξ_i) و مادی (x_i) نوشت.

۵-۱ محدودیت در تغییر شکل پیوسته جسم

در تئوری توابع اثبات می‌شود که شرط لازم و کافی برای یکتا بودن و پیوستگی در پاسخ روابط (۵-۱) و (۱-۱)، غیر صفر بودن دترمینان زیر در ناحیه R است.

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \xi_1}{\partial x_2} & \frac{\partial \xi_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial \xi_2}{\partial x_1} & \frac{\partial \xi_2}{\partial x_2} & \frac{\partial \xi_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial \xi_3}{\partial x_1} & \frac{\partial \xi_3}{\partial x_2} & \frac{\partial \xi_3}{\partial x_3} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \xi_{1,1} & \xi_{1,2} & \xi_{1,3} \\ \xi_{2,1} & \xi_{2,2} & \xi_{2,3} \\ \xi_{3,1} & \xi_{3,2} & \xi_{3,3} \end{vmatrix} = \frac{\partial(\xi_1, \xi_2, \xi_3)}{\partial(x_1, x_2, x_3)} \neq 0.$$

که در این رابطه J دترمینان فانکشنال یا ژاکوبین توابع (ξ_1, ξ_2, ξ_3) می‌باشد. علاوه بر محدودیت گفته شده، محدودیت دیگری نیز بر روی J وجود دارد. برای رسیدن به این محدودیت یک ذره ثابت را در نظر بگیرید. با توجه به ثابت بودن این ذره در فضا $\xi_i = x_i$ ژاکوبین این جابجایی برابر واحد است. به علاوه به دلیل پیوسته بودن حرکت و تغییر شکل، ژاکوبین نیز تابعی پیوسته از زمان است. در نتیجه ژاکوبین باید مثبت باشد. زیرا در صورت منفی بودن حتماً باید از مقدار صفر گذر کند که این مسئله ناقض رابطه (۹-۱) است.

قضیه

شرط لازم و کافی برای وجود یک تغییر شکل پیوسته، مثبت بودن ژاکوبین آن است. در شکل اندیسی، ژاکوبین به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$J = \det \left(\delta_{\alpha\beta} + \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta} \right); \quad \alpha, \beta = 1, 2, 3$$

$$= \det(\delta_{\alpha\beta} + u_{\alpha,\beta}) > 0.$$

که در آن $\delta_{\alpha\beta}$ دلتای کرونکر با تعریف زیر است.

$$\delta_{\alpha\beta} = \begin{cases} 1 & \alpha = \beta \\ 0 & \alpha \neq \beta \end{cases}$$

در صورتی که یک میدان جابجایی مانند (u_1, u_2, u_3) دارای ژاکوبین مثبت باشد، به این میدان، تغییر شکل صحیح و قابل قبول گویند. به عنوان مثال یک میدان جابجایی به صورت $u_1 = -2x_1$ ، $u_2 = 0$ و $u_3 = 0$ قابل اعمال به یک جسم انعطاف‌پذیر نمی‌باشد. زیرا ژاکوبین آن برابر ۱- است.

مثال ۱-۱ میدان جابجایی صحیح و قابل قبول

یک میدان جابجایی به صورت زیر را در نظر بگیرید.

$$u_1 = x_1 - 2x_2 \quad u_2 = 3x_1 + 2x_2 \quad u_3 = 5x_3 \quad (\text{الف})$$

برای صحیح و قابل قبول بودن جابجایی، باید ژاکوبین مثبت باشد. در نتیجه داریم:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} &= 1 & \frac{\partial u_2}{\partial x_1} &= 3 & \frac{\partial u_3}{\partial x_1} &= 0 \\ \frac{\partial u_1}{\partial x_2} &= -2 & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} &= 2 & \frac{\partial u_3}{\partial x_2} &= 0 \\ \frac{\partial u_1}{\partial x_3} &= 0 & \frac{\partial u_2}{\partial x_3} &= 0 & \frac{\partial u_3}{\partial x_3} &= 5 \end{aligned} \quad (\text{ب})$$

بدین ترتیب J محاسبه خواهد شد.

$$J = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 10 > 0 \quad (\text{ج})$$

۱-۶ گرادیان بردار جابجایی

مؤلفه‌های دترمینان ژاکوبین از اهمیت بسیار بالایی در توصیف تغییر شکل اجسام برخوردارند. از نظر فیزیکی این مؤلفه‌ها بیان گر گرادیان بردار جابجایی q و نسبت به x می‌باشند. با توجه به تعریف بردار جابجایی q و اپراتور گرادیان داریم:

$$\text{grad } q = (\nabla, q) = i \frac{\partial q}{\partial x_1} + j \frac{\partial q}{\partial x_2} + k \frac{\partial q}{\partial x_3}$$

که در آن (∇, q) نماد دیگری از تعریف گرادیان بردار q است. با جای‌گذاری بردار q برحسب مؤلفه‌های جابجایی و بسط رابطه (۱-۱۲) خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \text{grad } q &= ii \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + ij \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + ik \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \\ &+ ji \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + jj \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + jk \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \\ &+ ki \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + kj \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + kk \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{aligned}$$

در شکل ماتریسی می‌توان گرادیان q را به صورت زیر بیان نمود.

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial u_1}{\partial x_2} & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \\ \frac{\partial u_1}{\partial x_3} & \frac{\partial u_2}{\partial x_3} & \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{1,1} & u_{2,1} & u_{3,1} \\ u_{1,2} & u_{2,2} & u_{3,2} \\ u_{1,3} & u_{2,3} & u_{3,3} \end{bmatrix}$$

به چنین کمیتی تانسور مرتبه دو گفته می‌شود. به این ترتیب می‌توان گرادیان بردار q را به صورت حاصل جمع دو تانسور متقارن و نامتقارن مرتبه دوم نوشت. به عبارت روشن‌تر داریم:

$$grad\ q = \begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cdot & \omega_{12} & \omega_{13} \\ \omega_{21} & \cdot & \omega_{23} \\ \omega_{31} & \omega_{32} & \cdot \end{bmatrix}$$

که در آن:

$$2e_{\beta\alpha} = 2e_{\alpha\beta} = u_{\alpha,\beta} + u_{\beta,\alpha}$$

$$2\omega_{\alpha\beta} = u_{\beta,\alpha} - u_{\alpha,\beta} = -2\omega_{\beta\alpha}$$

رابطه (۱-۱۶) بیانگر این موضوع است که در صورت معلوم بودن تانسورهای e_{ij} و ω_{ij} ، گرادیان بردار جابجایی معلوم خواهد بود. رابطه (۱-۱۵) را می‌توان به شکل زیر نیز نوشت.

$$grad\ q = D + \Omega$$

که در آن D جمله اول در سمت راست رابطه (۱۵۱) و Ω جمله دوم آن می‌باشد. در صورت فرض تغییر شکل های کوچک، D بیانگر مؤلفه‌های کرنش در یک نقطه از ماده و Ω معرف دوران متوسط المان حجم خواهد بود.

۷-۱ تغییر طول المان خطی

در این بخش، روابط کلی حاکم بر تغییر طول المان خطی کوچک و نحوه محاسبه ضریب بزرگنمایی ds/ds استخراج خواهند شد. این ضریب، بیانگر نسبت طول تغییر یافته المان خطی به طول اولیه آن است. معمولاً فرض تغییر شکل کوچک در تئوری‌های کلاسیک الاستیسیته و پلاستیسیته، به خطی‌سازی معادلات منجر می‌شود. در بسیاری از موارد مانند بررسی رفتار سازه‌های جدارنازک و یا مدلسازی سیالات، اثرات غیرخطی از اهمیت بالایی برخوردار می‌باشند. بدین ترتیب در وهله اول، معادلات به صورت عمومی و غیرخطی بیان می‌شوند و در ادامه، روند خطی‌سازی آن‌ها بررسی خواهد شد.

المان خطی PA به طول ds در ناحیه R و با جهت‌گیری $N: (N_1, N_2, N_3)$ مطابق شکل (۵-۱) در نظر بگیرید. پس از تغییرشکل، این المان به المان $\mathcal{PA}$ به طول $d\mathcal{s}$ و جهت‌گیری $\mathcal{N}: (\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2, \mathcal{N}_3)$ تبدیل خواهد شد. به عبارت دیگر، نقطه ابتدای المان یا $P: (x_1, x_2, x_3)$ به نقطه (ξ_1, ξ_2, ξ_3) و نقطه انتهای المان یا $A: (x_1 + dx_1, x_2 + dx_2, x_3 + dx_3)$ به نقطه $(\xi_1 + d\xi_1, \xi_2 + d\xi_2, \xi_3 + d\xi_3)$ نگاشته می‌شود. در حالت کلی، درحین تغییرشکل، هر دو ویژگی طول و جهت المان تغییر خواهد کرد.

با استفاده از هندسه می‌توان به صورت زیر، طول المان PA را محاسبه کرد:

$$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2$$

و یا به شکل اندیسی

$$ds^2 = \delta_{\alpha\beta} dx_\alpha dx_\beta = dx_\alpha dx_\alpha, \quad \alpha = 1, 2, 3$$

به طور مشابه برای آلمان خطی $\mathcal{PA}$ می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} (d\mathcal{s})^2 &= (d\xi_1)^2 + (d\xi_2)^2 + (d\xi_3)^2 \\ &= \delta_{\alpha\beta} d\xi_\alpha d\xi_\beta = d\xi_\beta d\xi_\beta, \quad \beta = 1, 2, 3 \end{aligned}$$

برای تعیین بزرگنمایی برحسب مؤلفه‌های جابجایی $u_i(x_1, x_2, x_3)$ و (dx_1, dx_2, dx_3) ، ابتدا رابطه $d\xi_i$ برحسب u_i و dx_i بیان خواهد شد. بدین ترتیب با توجه به دیفرانسیل‌های کامل $d\xi_i$ خواهیم داشت:

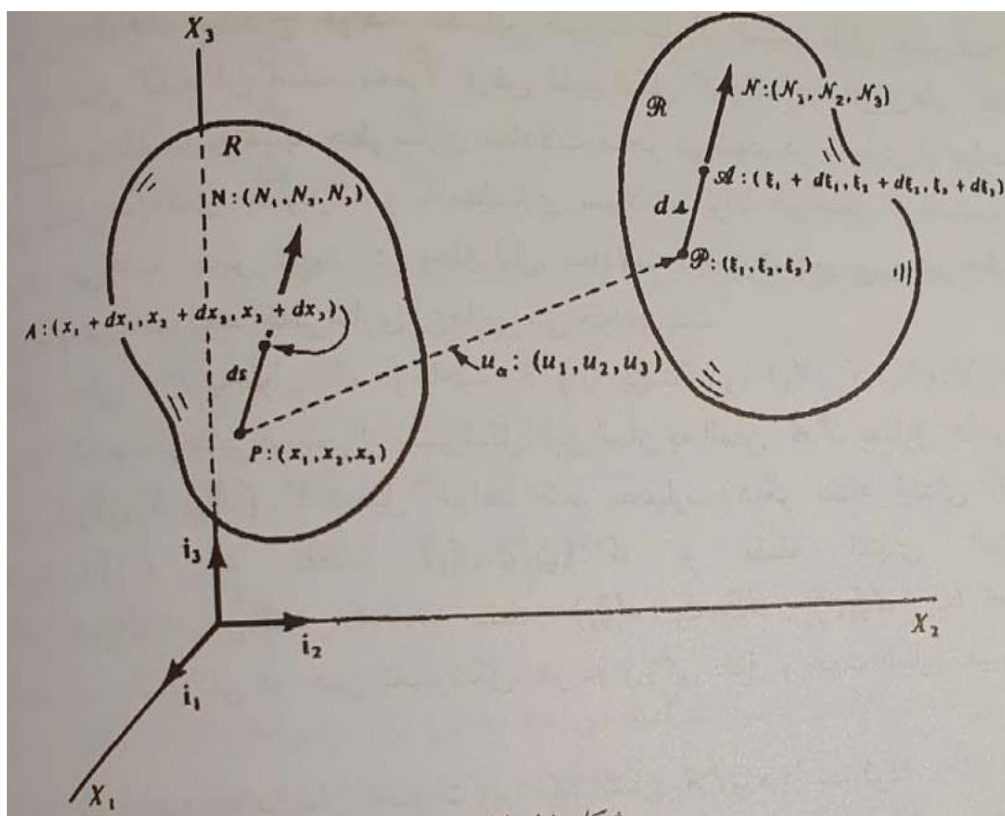
$$d\xi_1 = d\xi_{1,1} dx_1 + d\xi_{1,2} dx_2 + d\xi_{1,3} dx_3$$

$$d\xi_2 = d\xi_{2,1} dx_1 + d\xi_{2,2} dx_2 + d\xi_{2,3} dx_3$$

$$d\xi_3 = d\xi_{3,1} dx_1 + d\xi_{3,2} dx_2 + d\xi_{3,3} dx_3$$

یا

$$d\xi_\alpha = \frac{\partial \xi_\alpha}{\partial x_\beta} dx_\beta = \xi_{\alpha,\beta} dx_\beta$$



شکل (۵-۱)

با استفاده از شکل نمادین خواهیم داشت:

$$d\mathcal{P} = (dP \cdot \nabla)\mathcal{P} = dP \cdot \nabla \mathcal{P}$$

که در آن

$$P = i_1 x_1 + i_2 x_2 + i_3 x_3$$

$$\mathcal{P} = i_1 \xi_1 + i_2 \xi_2 + i_3 \xi_3$$

$$\nabla = i_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + i_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + i_3 \frac{\partial}{\partial x_3}$$

در نتیجه خواهیم داشت:

$$dP \cdot \nabla = dx_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + dx_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + dx_3 \frac{\partial}{\partial x_3}$$

و در نهایت

$$(dP \cdot \nabla)\mathcal{P} = i_1 \left(\frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \xi_1}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial \xi_1}{\partial x_3} dx_3 \right)$$

$$+i_r \left(\frac{\partial \xi_r}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \xi_r}{\partial x_r} dx_r + \frac{\partial \xi_r}{\partial x_3} dx_3 \right) \\ +i_3 \left(\frac{\partial \xi_3}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \xi_3}{\partial x_r} dx_r + \frac{\partial \xi_3}{\partial x_3} dx_3 \right)$$

در نتیجه با توجه به $dP = i_1 d\xi_1 + i_r d\xi_r + i_3 d\xi_3$ ، رابطه (۲۳-۱) معادل روابط (۲۱-۱) و (۲۲-۱) خواهد شد.

از سوی دیگر می توان dx_α را بر حسب $d\xi_\alpha$ نیز تعیین کرد.

$$dP = (dP.\Delta)P = dP.\Delta P$$

که در آن

$$\Delta = i_1 \frac{\partial}{\partial \xi_1} + i_r \frac{\partial}{\partial \xi_r} + i_3 \frac{\partial}{\partial \xi_3}$$

علاوه بر این، با توجه به قانون دیفرانسیل گیری زنجیره ای می توان نشان داد که دیفرانسیل جابجایی در توصیف مادی و توصیف فضایی به ترتیب عبارت اند از:

$$dq = (dP.\nabla)q = dP.\nabla q$$

$$dq = (dP.\Delta)q = dP.\Delta q$$

که در آن

$$q = i_1 u_1 + i_r u_r + i_3 u_3$$

در روابط (۲۹-۱) و (۳۰-۱) به ترتیب، u_i توابعی از x_i و ξ_i می باشند.

با استفاده از روابط میان مؤلفه های جابجایی و متغیرهای مختصات مادی و فضایی و نیز معادلات (۲۱-۱) و (۲۲-۱) خواهیم داشت:

$$d\xi_1 = (1 + u_{1,1})dx_1 + u_{1,r}dx_r + u_{1,3}dx_3$$

$$d\xi_r = u_{r,1}dx_1 + (1 + u_{r,r})dx_r + u_{r,3}dx_3$$

$$d\xi_3 = u_{3,1}dx_1 + u_{3,r}dx_r + (1 + u_{3,3})dx_3$$

یا

$$d\xi_\alpha = \left(\delta_{\alpha\beta} + \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta} \right) dx_\beta = (\delta_{\alpha\beta} + u_{\alpha,\beta}) dx_\beta$$

که در آن u_α مؤلفه‌های بردار جابجایی نقطه P در حین تغییر شکل است. در نتیجه با استفاده از روابط (۱-۱۹)، (۱-۲۰) و (۱-۳۳)، رابطه زیر حاصل می‌شود:

$$\frac{1}{\gamma} [ds^2 - ds'^2] = \varepsilon_{11} dx_1^2 + \varepsilon_{22} dx_2^2 + \varepsilon_{33} dx_3^2 + 2\varepsilon_{12} dx_1 dx_2 + 2\varepsilon_{13} dx_1 dx_3 + 2\varepsilon_{23} dx_2 dx_3 = \varepsilon_{\alpha\beta} dx_\alpha dx_\beta$$

که در آن، ضرایب dx_1^2, dx_2^2 و غیره به صورت زیر می‌باشند. شایان ذکر است که با توجه به ماهیت تانسوری ε_{ij} در مقایسه با γ_{ij} ، از نماد ε_{ij} استفاده شده است.

$$\varepsilon_{11} = u_{1,1} + \frac{1}{\gamma} (u_{1,1}^2 + u_{2,1}^2 + u_{3,1}^2)$$

$$\varepsilon_{22} = u_{2,2} + \frac{1}{\gamma} (u_{1,2}^2 + u_{2,2}^2 + u_{3,2}^2)$$

$$\varepsilon_{33} = u_{3,3} + \frac{1}{\gamma} (u_{1,3}^2 + u_{2,3}^2 + u_{3,3}^2)$$

$$2\varepsilon_{12} = u_{2,1} + u_{1,2} + u_{1,1}u_{1,2} + u_{2,1}u_{2,2} + u_{3,1}u_{3,2}$$

$$2\varepsilon_{13} = u_{3,1} + u_{1,3} + u_{1,1}u_{1,3} + u_{2,1}u_{2,3} + u_{3,1}u_{3,3}$$

$$2\varepsilon_{23} = u_{3,2} + u_{2,3} + u_{1,2}u_{1,3} + u_{2,2}u_{2,3} + u_{3,2}u_{3,3}$$

یا به شکل اندیسی

$$2\varepsilon_{\alpha\beta} = \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial u_\beta}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial u_\gamma}{\partial x_\alpha} \frac{\partial u_\gamma}{\partial x_\beta}$$

$$= u_{\alpha,\beta} + u_{\beta,\alpha} + u_{\gamma,\alpha} u_{\gamma,\beta} = 2\varepsilon_{\beta\alpha} \quad \alpha, \beta, \gamma = 1, 2, 3$$

که در آن $\varepsilon_{\alpha\beta} = \varepsilon_{\beta\alpha} = \varepsilon_{\alpha\beta}(x_1, x_2, x_3)$.

نسبت اتساع یا تغییر طول المان خطی PA به صورت $e = (ds - ds')/ds$ تعریف می‌شود. در نتیجه کفایت نسبت ds'/ds محاسبه شود. با توجه به ارتباط میان x_i و ξ_i ، این نسبت را می‌توان در هر دو حالت مختصات مادی x_i و مختصات فضایی ξ_i بیان نمود. در حالت توصیف مادی، فرض می‌شود که u_α و در نتیجه ξ_α ، توابعی از مختصات مادی x_i هستند. در نتیجه:

$$\xi_\alpha(x_1, x_2, x_3) = x_\alpha + u_\alpha$$

$$u_\alpha = u_\alpha(x_1, x_2, x_3) \quad \alpha = 1, 2, 3$$

بدین ترتیب رابطه (۳۶-۱)، معرف توصیف مادی مجموعه ضرایب مورد استفاده در تعیین $(ds^2 - ds^2)/2$ خواهد بود. مولفه‌های جابجایی در توصیف فضایی، به صورت تابعی از مختصات فضایی ξ_i در نظر گرفته می‌شوند. سپس:

$$x_\alpha(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \xi_\alpha - u_\alpha$$

$$u_\alpha = u_\alpha(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \quad \alpha = 1, 2, 3$$

مشابه روند قبل برای استخراج رابطه (۳۶۱)، می‌توان توصیف فضایی مجموعه ضرایب مورد استفاده در تعیین $(ds^2 - ds^2)/2$ را به دست آورد:

$$2\varepsilon_{\alpha\beta} = u_{\alpha,\beta} + u_{\beta,\alpha} - u_{\gamma,\alpha}u_{\gamma,\beta} = 2\varepsilon_{\beta\alpha}$$

که در این رابطه، $u_\alpha = u_\alpha(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$. با توجه به اینکه سمت چپ رابطه (۳۴-۱) دارای بعد مربع طول می‌باشد. مشخصاً $\varepsilon_{\alpha\beta}$ کمیت‌هایی بدون بعد هستند. به علاوه بر اساس رابطه (۳۶-۱)، متقارن بودن این تانسور قابل مشاهده است.

رابطه (۳۴-۱) را می‌توان به شکل دیگری نیز نوشت. به فرض (i_1, i_2, i_3) به ترتیب بردارهای واحد در جهات مثبت (X_1, X_2, X_3) باشند. با توجه به تعریف بردار N در جهت المان خطی PA خواهیم داشت:

$$N = i_1 N_1 + i_2 N_2 + i_3 N_3 = N_i$$

که در آن N_i کینوس‌های هادی بردار N نسبت به دستگاه X_i می‌باشند. با توجه به هم راستایی بردار N و بردار (dx_1, dx_2, dx_3) می‌توان نوشت:

$$N_1 = \frac{dx_1}{ds}, \quad N_2 = \frac{dx_2}{ds}, \quad N_3 = \frac{dx_3}{ds}$$

با تقسیم رابطه (۳۴-۱) بر ds^2 و استفاده از رابطه (۴۱-۱) خواهیم داشت:

$$\frac{1}{2} \left[\left(\frac{ds}{ds} \right)^2 - 1 \right] = \varepsilon_{11} N_1^2 + \varepsilon_{22} N_2^2 + \varepsilon_{33} N_3^2$$

$$+ 2\varepsilon_{12} N_1 N_2 + 2\varepsilon_{13} N_1 N_3 + 2\varepsilon_{23} N_2 N_3 = \varepsilon_{\alpha\beta} N_\alpha N_\beta$$

می‌توان رابطه بالا را به صورت زیر نیز بیان نمود.

$$MF_A = \varepsilon_{\alpha\beta} N_\alpha N_\beta$$

لازم به یادآوری است که

$$MF_A = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{ds}{ds} \right)^2 - 1 \right]$$

در این رابطه، MF_A ، با نام ضریب بزرگنمایی خط PA شناخته می‌شود.

روابط بالا به طور ضمنی، نسبت افزایش طول یک المان خطی با مکان و جهت‌گیری کاملاً دلخواه را تعیین نمودند. در نتیجه، روابط (۱-۴۲) و (۱-۳۶)، حالت تغییرشکل کل جسم را توصیف می‌کنند.

نکته مهم آن که در رابطه (۱-۳۶) مؤلفه‌های $\varepsilon_{\alpha\beta}$ دقیق می‌باشند و هیچ‌گونه تقریبی از جمله تقریب مرتبه اول و دوم، در محاسبات وارد نشده است. علاوه بر این می‌توان نشان داد که $\varepsilon_{\alpha\beta}$ و $\mathcal{E}_{\alpha\beta}$ نسبت به تبدیل دستگاه مختصات، دارای خاصیت تانسوری می‌باشند و لذا به ترتیب با نام‌های تانسور کرنش گرین - سنونان و آلمانسی شناخته می‌شوند.

در یک جابجایی از نوع حرکت جسم صلب، $d\delta = ds$ بوده و در نتیجه $\varepsilon_{\alpha\beta}, \mathcal{E}_{\alpha\beta} = 0$ است. از سوی دیگر، در صورتیکه $d\delta = ds$ با توجه به صفر بودن مؤلفه‌های کرنش، تغییرشکل از نوع جابجایی جسم صلب خواهد بود. هرچند روابط (۱-۳۶) و (۱-۳۹) برای دستگاه مختصات دکارتی استخراج شده‌اند، می‌توانند به کمک تبدیل تانسوری، در کلیه دستگاه‌های منحنی‌الخط اقلیدسی مورد استفاده قرار گیرند. در پیوست (ب) نحوه انتقال متغیرهای میدان مانند کرنش در دستگاه‌های مختلف تشریح شده است.

مثال ۱-۲ مفهوم جابجایی قابل قبول در مختصات مادی و فضایی

فرض می‌شود، بردار جابجایی به صورت $q = q(x_i, t) = (ax_1, bx_1, 0)$ باشد. که در این حالت، a و b پارامترهایی مستقل از x_i هستند. در نتیجه:

$$\xi_1 = x_1 + u_1, \quad \xi_2 = x_2 + u_2, \quad \xi_3 = x_3 + u_3 \quad (\text{الف})$$

که در آن، $u_1 = ax_1, u_2 = bx_1, u_3 = 0$ می‌باشد. در این صورت خواهیم داشت:

$$\xi_1 = (1+a)x_1, \quad \xi_2 = x_2 + bx_1, \quad \xi_3 = x_3 \quad (\text{ب})$$

از طرفی دیگر می‌توان x_i را نیز برحسب ξ_i نوشت.

$$x_1 = \frac{\xi_1}{(1+a)}, \quad x_2 = \xi_2 - \frac{b\xi_1}{(1+a)}, \quad x_3 = \xi_3 \quad (\text{ج})$$

شرط قابل قبول بودن جابجایی، مثبت بودن دترمینان ژاکوبین می‌باشد.

$$J = \frac{\partial(\xi_1, \xi_2, \xi_3)}{\partial(x_1, x_2, x_3)} = \begin{vmatrix} 1+a & 0 & 0 \\ b & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1+a \quad (\text{د})$$

در نتیجه باید $a > -1$ و $J > 0$ داشتیم:

$$u_1 = ax_1, \quad u_2 = bx_1, \quad u_3 = 0 \quad (\text{ه})$$

که در آن $u_i = u_i(x_1, x_2, x_3)$ و

$$u_1 = \frac{a}{(1+a)} \xi_1, \quad u_2 = \frac{b}{(1+a)} \xi_1, \quad u_3 = 0. \quad (و)$$

که در آن $u_i = u_i(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$. تنها مشتقات جزئی غیر صفر u_i نسبت به x_i نیز به صورت زیر است.

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1} = a, \quad \frac{\partial u_2}{\partial x_1} = b \quad (ز)$$

به طور مشابه، تنها مشتقات جزئی غیر صفر u_i نسبت به ξ_i نیز به صورت زیر است.

$$\frac{\partial u_1}{\partial \xi_1} = \frac{a}{1+a}, \quad \frac{\partial u_2}{\partial \xi_1} = \frac{b}{1+a} \quad (ح)$$

با توجه به مطالب بالا بدیهی است که $\partial u_1 / \partial x_1 \neq \partial u_1 / \partial \xi_1$ و در حالت عمومی $\partial u_i / \partial x_j \neq \partial u_i / \partial \xi_j$. با این حال در صورت کوچک بودن جابجایی‌ها و در این مثال خاص با شرط $a, b < 1$ می‌توان نوشت:

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1} = a \approx \frac{\partial u_1}{\partial \xi_1}, \quad \frac{\partial u_2}{\partial x_1} = b \approx \frac{\partial u_2}{\partial \xi_1} \quad (ط)$$

با استفاده از رابطه (۱-۲۹) می‌توان تغییرات مؤلفه‌های جابجایی را بر حسب مختصات مادی بیان نمود.

$$dq = (du_1, du_2, du_3) = [dx_1, dx_2, dx_3] \begin{bmatrix} a & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = (adx_1, bdx_1, 0) \quad (ی)$$

به طور مشابه، با استفاده از رابطه (۱-۳۰) می‌توان تغییرات مؤلفه‌های جابجایی را بر حسب مختصات فضایی بیان نمود.

$$(du_1, du_2, du_3) = \left[\frac{a}{1+a} d\xi_1, \frac{b}{1+a} d\xi_1, 0 \right] \quad (ک)$$

۸-۱ تعبیر فیزیکی کرنش نرمال

تغییر طول در یک المان خطی PA را در نظر بگیرید. مطابق قبل ds طول اولیه المان و $d\delta$ طول تغییر یافته آن می‌باشد. در نتیجه حین تغییر شکل، تغییر طول PA نسبت به طول اولیه آن برابر است با:

$$e_A = \frac{d\delta}{ds} - 1$$

با جای گذار مثبت بودن e_A بیان گر افزایش طول و منفی بودن آن معرف کاهش طول است. با توجه به این که طول تغییر یافته نمی تواند برابر صفر باشد. حد پایین e_A ، ۱- خواهد بود. با جای گذاری رابطه e_A در MF_A خواهیم داشت:

$$MF_A = e_A + \frac{1}{\gamma} e_A^2 = \varepsilon_{\alpha\beta} N_\alpha N_\beta$$

برای تشریح اهمیت مؤلفه های $\varepsilon_{\alpha\beta}$ ، بردار N را به صورت $N_1 = 1$ ، $N_2 = 0$ و $N_3 = 0$ در نظر بگیرید. در این حالت المان PA در جهت محور X_1 قرار خواهد داشت. با استفاده رابطه (۴۶-۱) داریم:

$$e_1 + \frac{1}{\gamma} e_1^2 = \varepsilon_{11}$$

که در آن، زیرنویس ۱ در e_1 بیان گر جهت قرارگیری المان می باشد. با محاسبه e_1 از رابطه (۴۷-۱) داریم:

$$e_1 = \sqrt{1 + 2\varepsilon_{11}} - 1$$

در نتیجه در حین تغییر شکل جسم، ε_{11} بیان گر تغییر طول نسبی المان PA در جهت X_1 می باشد. به طور مشابه با در نظر گرفتن المان ها در جهت X_2 و X_3 خواهیم داشت:

$$e_2 = \sqrt{1 + 2\varepsilon_{22}} - 1 \quad e_3 = \sqrt{1 + 2\varepsilon_{33}} - 1$$

در نتیجه در حالت کلی داریم:

$$e_i = \sqrt{1 + 2\varepsilon_{ii}} - 1 = \varepsilon_{ii} - \frac{1}{\gamma} \varepsilon_{ii}^2 + \dots$$

رابطه (۵۰-۱) معرف تغییر طول نسبی یک المان خطی با جهت گیری در راستای محور X_i در نقطه P از جسم بدون تغییر شکل است. در تئوری تغییر شکل های بزرگ، معمولاً از MF_A یا ضریب بزرگنمایی به عنوان کرنش المان خطی یاد می شود. در نتیجه برای محاسبه کرنش از روابط MF_A استفاده می شود.

کرنش مهندسی

تعریف کرنش در کاربردهای مهندسی به صورت تغییر طول المان خطی نسبت به طول اولیه آن متداول است. در نتیجه در این حالت، تعریف کرنش با e_A یکسان می باشد. در صورت کوچک بودن e_A در مقایسه با ۱، جمله $e_i^2/2$ قابل صرف نظر است. در نتیجه داریم:

$$MF_i = e_i + \frac{1}{\gamma} e_i^2 \approx e_i$$

کرنش لگاریتمی

در تعاریف گفته شده، همواره تغییر طول بر طول اولیه المان در نظر گرفته شد. هر چند در برخی تئوری‌ها مانند خزش و پلاستیسیته و به عبارت دیگر در بررسی تغییر شکل‌های بزرگ، طول لحظه‌ای المان مورد نظر می‌باشد. در نتیجه برای یک المان کوچک داریم:

$$d\varepsilon_n = \frac{dl}{l}$$

که در آن l طول لحظه‌ای المان است. با انتگرال‌گیری از رابطه (۵۲-۱) خواهیم داشت:

$$\varepsilon_n = \ln \frac{l}{l_0} = \log \left(1 + \frac{\Delta l}{l_0} \right) = \ln (1 + e_n)$$

که در آن l_0 طول اولیه و $e_n = \Delta l / l_0$ کرنش مهندسی است. کرنش ε_n که با نام کرنش طبیعی یا واقعی شناخته می‌شود. به علاوه به این کرنش، کرنش لگاریتمی نیز می‌گویند.

برای $e_n < 1$ رابطه ε_n به صورت زیر بسط داده می‌شود.

$$\varepsilon_n = \log(1 + e_n) = e_n - \frac{1}{2}e_n^2 + \frac{1}{3}e_n^3 - \frac{1}{4}e_n^4 + \dots \quad e_n^2 < 1$$

برای کرنش‌های کوچک خواهیم داشت:

$$\varepsilon_n = e_n \quad |e_n| \ll 1$$

تعاریف متعدد دیگری نیز از کرنش در شاخه‌های مختلف علوم مهندسی وجود دارد که هر کدام از آنها دارای کاربردی خاص می‌باشند. به عنوان مثال می‌توان از تانسور کرنش کوشی، گرادیان بردار جابجایی و ماتریس متقارن D نام برد.

۹-۱ تعبیر فیزیکی کرنش برشی و جهت نهایی المان خطی

در تئوری‌های مهندسی، تغییرات زاویه میان دو المان خطی عمود برهم در حین تغییر شکل با نام کرنش برشی شناخته می‌شود. پیش از ادامه بحث و تعیین ارتباط میان کرنش برشی و مؤلفه‌های $\varepsilon_{\alpha\beta}$ ، ابتدا روابط میان بردار N_i و $\mathcal{N}_i$ برحسب مؤلفه‌های جابجایی u_i استخراج خواهند شد. مقادیر $\mathcal{N}_i$ کسینوس‌های هادی یک المان خطی پس از تغییر شکل است. به عبارت روشن‌تر، ابتدا نحوه تغییر جهت فضایی یک المان خطی بررسی خواهد شد.

جهت نهایی المان خطی

در حین تغییر شکل، المان dx_α با طول ds به المان $d\xi_\alpha$ با طول $d\mathcal{s}$ تبدیل می‌شود. با توجه به تعریف کسینوس‌های هادی المان بدون تغییر شکل و تغییر یافته داریم:

$$\mathcal{N}_\alpha = \frac{d\xi_\alpha}{d\mathcal{s}} \quad \mathcal{N}_\alpha = \frac{dx_\alpha}{ds}$$

رابطه اول (۵۶-۱) را می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$\mathcal{N}_\alpha = \frac{d\xi_\alpha}{d\mathcal{s}} \frac{ds}{ds} = \frac{d\xi_\alpha}{ds} \frac{ds}{d\mathcal{s}}$$

با توجه به تابعیت مختصات مادی و فضایی داریم:

$$\frac{d\xi_\alpha}{ds} = \frac{\partial \xi_\alpha}{\partial x_\beta} \frac{dx_\beta}{ds} \quad \alpha, \beta = 1, 2, 3$$

از قبل با توجه به ارتباط میان دیفرانسیل مختصات مادی و مؤلفه‌های جابجایی، خواهیم داشت:

$$\frac{\partial \xi_\alpha}{\partial x_\beta} = \delta_{\alpha\beta} + \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta} = \delta_{\alpha\beta} + u_{\alpha,\beta}$$

با استفاده از رابطه (۵۹-۱) و تعریف بردار کسینوس‌های هادی N_β داریم:

$$\frac{d\xi_\alpha}{ds} = \left(\delta_{\alpha\beta} + \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta} \right) N_\beta = (\delta_{\alpha\beta} + u_{\alpha,\beta}) N_\beta$$

با مرتب سازی رابطه MF_i خواهیم داشت:

$$\frac{ds}{d\mathcal{s}} = \frac{1}{\sqrt{1 + 2MF_i}}$$

با استفاده از روابط (۵۷-۱)، (۶۰-۱) و (۶۱-۱) رابطه زیر برای کسینوس‌های هادی المان تغییر یافته $\mathcal{N}_i$ به دست می‌آید.

$$\mathcal{N}_\alpha \sqrt{1 + 2MF_i} = (\delta_{\alpha\beta} + u_{\alpha,\beta}) N_\beta$$

و یا در شکل غیراندیسی

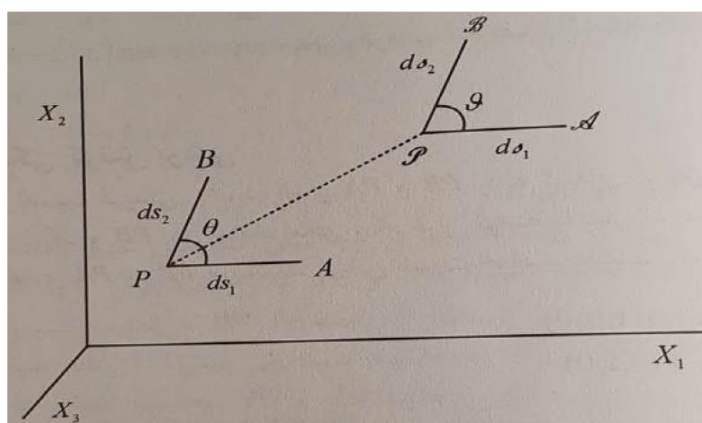
$$\mathcal{N}_1 \sqrt{1 + 2MF_i} = (1 + u_{1,1}) N_1 + u_{1,2} N_2 + u_{1,3} N_3$$

$$\mathcal{N}_2 \sqrt{1 + 2MF_i} = u_{2,1} N_1 + (1 + u_{2,2}) N_2 + u_{2,3} N_3$$

$$\mathcal{N}_\gamma \sqrt{1 + {}^2MF_i} = u_{\gamma,1} N_1 + u_{\gamma,2} N_2 + (1 + u_{\gamma,3}) N_3$$

تعریف کرنش برشی

برای تعریف کرنش برشی، دو المان کوچک PA و PB به طول‌های ds_1 و ds_2 گذرنده از نقطه P با زاویه θ نسبت به یکدیگر را در نظر بگیرید. پس از تغییر شکل، این دو المان تبدیل به دو المان $\mathcal{P}A$ و $\mathcal{P}B$ به طول‌های $d\mathcal{s}_1$ و $d\mathcal{s}_2$ مطابق شکل (۶-۱) می‌شوند. در حالت کلی لزوماً PAB و $\mathcal{P}AB$ با هم موازی نمی‌باشند.



شکل (۶-۱)

کسینوس‌های هادی PA و PB را به ترتیب با M_α و N_α نشان می‌دهیم. به طور مشابه کسینوس‌های هادی $\mathcal{P}A$ و $\mathcal{P}B$ با $\mathcal{M}_\alpha$ و $\mathcal{N}_\alpha$ نمایش داده می‌شود. در نتیجه با توجه به تعریف ضرب داخلی بردارها، زاویه ϑ میان این دو المان تغییر یافته عبارت است از:

$$\cos \vartheta = \mathcal{M}_\alpha \mathcal{N}_\alpha$$

با استفاده از رابطه (۶۲-۱) می‌توان کسینوس‌های هادی تغییر یافته $\mathcal{M}_\alpha$ و $\mathcal{N}_\alpha$ را برحسب کسینوس‌های هادی بدون تغییر شکل M_α و N_α نوشت. با استفاده از روابط (۶۲-۱) و (۶۳-۱) و با بهره‌گیری از رابطه $M_\alpha N_\alpha = \cos \theta$ خواهیم داشت:

$$\Gamma_{12} = \sqrt{(1 + {}^2MF_1)(1 + {}^2MF_2)} \cos \vartheta = \cos \theta + {}^2\varepsilon_{\alpha\beta} M_\alpha N_\beta$$

که در آن زیرنویس‌های ۱ و ۲ به ترتیب معرف المان‌های PA و PB است. رابطه (۴۵۱) بیان‌گر زاویه ϑ میان دو المان تغییر یافته با زاویه اولیه θ است. اگر دو المان در حالت اولیه بر یکدیگر عمود باشند خواهیم داشت:

$$\Gamma_{12} = {}^2\varepsilon_{\alpha\beta} M_\alpha N_\beta$$

در نتیجه رابطه (۶۶-۱) پایه تعریف کرنش برشی است. در تئوری تغییرشکل‌های بزرگ برشی میان دو المان PA و PB عبارت است از:

$$\Gamma_{12} = \sqrt{(1 + 2MF_1)(1 + 2MF_2)} \cos \vartheta$$

در صورت کوچک بودن تغییر شکل‌ها، ضرایب بزرگنمایی MF_i در مقایسه با ۱، مقداری کوچک خواهد بود. در این حالت داریم $\Gamma_{12} \approx \cos \vartheta$. در نتیجه $\Gamma_{12} \approx \cos \vartheta = \sin(\pi/2 - \vartheta) \approx \pi/2 - \vartheta$ بدین ترتیب تعریف Γ_{12} با $\gamma_{12} = \pi/2 - \vartheta$ برابر خواهد بود.

اهمیت فیزیکی کرنش برشی

برای بررسی اهمیت فیزیکی ε_{ij} ، دو المان PA و PB را به گونه‌ای در نظر بگیرید که PA در امتداد محور X_1 و PB در امتداد محور X_2 قرار گرفته باشند. به علاوه M_α و N_α کسینوس‌های هادی PA و PB می‌باشند. در این صورت خواهیم داشت:

$$(M_1, M_2, M_3) = (1, 0, 0)$$

$$(N_1, N_2, N_3) = (1, 0, 0)$$

با جای‌گذاری رابطه (۱-۶۸) در (۱-۶۵) نتیجه زیر حاصل می‌شود:

$$\Gamma_{12} = 2\varepsilon_{12}$$

به طور مشابه برای المان‌هایی در جهات دیگر مختصات مثلاً (X_2, X_3) یا (X_3, X_1) خواهیم داشت:

$$\Gamma_{23} = 2\varepsilon_{23} \quad \Gamma_{31} = 2\varepsilon_{31}$$

در نتیجه برای دو المان خطی متعامد در جهات محورهای X_i و X_j داریم:

$$\Gamma_{ij} = 2\varepsilon_{ij} \quad i \neq j$$

بدین ترتیب ε_{ij} ، در صورت برابر نبودن i و j بیان‌گر تغییر زوایای میان دو المان خطی عمود برهم می‌باشد. با فرض تغییر شکل‌های کوچک خواهیم داشت:

$$\Gamma_{ij} = 2\varepsilon_{ij} \approx \frac{\pi}{2} - \vartheta_{ij} = \gamma_{ij}$$

که در آن γ_{ij} تعریف متداول کرنش برشی است.

مثال ۳-۱ محاسبه کرنش برشی

بردار جابجایی q را به صورت زیر در نظر بگیرید.

$$q = (u_1, u_2, u_3) = (ax_2^2, 0, 0)$$

که در آن a یک ضریب ثابت است. مطلوب است محاسبه ضریب بزرگنمایی MF_i ، $\cos \vartheta$ و کرنش برشی Γ_{12} بین دو المان خطی PA و PB در صفحه X_1X_2 در صورتی که P در مختصات $(0, 1, 0)$ قرار داشته باشد.

در این حالت PA در جهت X_1 و PB در جهت X_2 می باشد و در نتیجه $\theta = \pi/2$ ، $ds_1 = dx_1$ و $ds_2 = dx_2$.

در ابتدا قابل قبول بودن بردار جابجایی بررسی می شود. یعنی:

$$J = \begin{vmatrix} 1 & 2ax_2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 > 0.$$

در نتیجه شرط فوق پابرجاست.

همان طور که می دانید زاویه ϑ برابر با زاویه میان المان های تغییر یافته PA و PB است. کسینوس های هادی خطوط PA و PB به ترتیب برابر با $M_\alpha = (1, 0, 0)$ و $N_\alpha = (0, 1, 0)$ می باشند. با استفاده از رابطه (۶۳-۱) می توانیم کسینوس های هادی المان های تغییر یافته $\mathcal{M}_\alpha$ و $\mathcal{N}_\alpha$ را محاسبه کنیم. ولی پیش از آن باید ضرایب بزرگنمایی MF_A و MF_B به ترتیب نظیر خطوط PA و PB محاسبه شوند. با کمک رابطه $MF_i = \varepsilon_{\alpha\beta} N_\alpha N_\beta$ می توانیم ضرایب بزرگنمایی خطوط PM و PB را به دست آوریم. بدین ترتیب این ضرایب برابراند با:

$$MF_A = 0 \quad MF_B = 2a^2 x_2^2$$

در نتیجه برای نقطه $P(0, 1, 0)$ ، $MF_A = 0$ و $MF_B = 2a^2$. بدین ترتیب کسینوس های هادی المان های خطی در نقطه P عبارت اند از:

$$\mathcal{M}_\alpha = (1, 0, 0) \quad \mathcal{N}_\alpha = (2a, 1, 0) / \sqrt{1 + 4a^2}$$

نهایتاً $\cos\vartheta$ به صورت زیر خواهد بود:

$$\cos\vartheta = 2a / \sqrt{1 + 4a^2}$$

با توجه به تعریف γ_{12} که به صورت کاهش زاویه میان دو المان PA و PB است. داریم:

$$\cos\vartheta = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \gamma_{12}\right) = \sin\gamma_{12} = \frac{2a}{\sqrt{1 + 4a^2}}$$

در نتیجه $\Gamma_{AB} = 2a$.

۱-۱۰ تانسور کرنش

در این بخش به خاصیت تانسوری کرنش اشاره خواهد شد. بدین ترتیب نحوه انتقال تانسور کرنش از یک دستگاه دکارتی x_a به دستگاه دکارتی y_a با تشریح می شود. همان طور که می دانید، تغییر طول یک المان ds با رابطه زیر بیان می شود.

$$(ds)^2 - (ds)^2 = 2\varepsilon_{\alpha\beta} dx_{\alpha} dx_{\beta}$$

با توجه به آن که تغییر طول المان با تغییر دستگاه مختصات، ثابت است، داریم:

$$(ds)^2 - (ds)^2 = 2E_{\gamma\delta} dy_{\gamma} dy_{\delta}$$

که در آن $E_{\gamma\delta}$ مشابه مؤلفه‌های $\varepsilon_{\alpha\beta}$ و در دستگاه y_a است. از جبر تانسورها می‌دانیم که قانون انتقال محورهاى دستگاه مختصات به شکل زیر می‌باشد.

$$dx_{\alpha} = a_{\gamma\alpha} dy_{\gamma}$$

که در آن $a_{\gamma\alpha}$ به کسینوس‌های هادی میان محورهاى y_{γ} و x_{α} هستند. با جای‌گذاری رابطه (۷۵-۱) در (۷۳-۱) و برابر قرار دادن نتیجه با رابطه (۷۴-۱) و در نهایت مرتب‌سازی آن داریم:

$$E_{\gamma\delta} = \varepsilon_{\alpha\beta} a_{\gamma\alpha} a_{\delta\beta}$$

با توجه به رابطه بالا بدیهی است که مؤلفه‌های $\varepsilon_{\alpha\beta}$ که از قانون انتقال تانسورهاى مرتبه دوم تبعیت می‌کنند. در نتیجه مؤلفه‌های $\varepsilon_{\alpha\beta}$ با نام تانسور کرنش شناخته می‌شوند.

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{13} & \varepsilon_{23} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix}$$

از طرف دیگر انتقال دستگاه مختصات از y_a به x_a به شکل زیر خواهد بود.

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = a_{\gamma\alpha} a_{\delta\beta} E_{\gamma\delta}$$

روابط انتقال تانسور کرنش از دستگاه x_a به y_a در شکل گسترده به صورت زیر می‌باشند.

$$E_{11} = \varepsilon_{11} a_{11}^2 + \varepsilon_{22} a_{12}^2 + \varepsilon_{33} a_{13}^2 + 2\varepsilon_{12} a_{11} a_{12} + 2\varepsilon_{13} a_{11} a_{13} + 2\varepsilon_{23} a_{12} a_{13}$$

$$E_{22} = \varepsilon_{11} a_{21}^2 + \varepsilon_{22} a_{22}^2 + \varepsilon_{33} a_{23}^2 + 2\varepsilon_{12} a_{21} a_{22} + 2\varepsilon_{13} a_{21} a_{23} + 2\varepsilon_{23} a_{22} a_{23}$$

$$E_{33} = \varepsilon_{11} a_{31}^2 + \varepsilon_{22} a_{32}^2 + \varepsilon_{33} a_{33}^2 + 2\varepsilon_{12} a_{31} a_{32} + 2\varepsilon_{13} a_{31} a_{33} + 2\varepsilon_{23} a_{32} a_{33}$$

$$E_{12} = \varepsilon_{11} a_{11} a_{21} + \varepsilon_{22} a_{12} a_{22} + \varepsilon_{33} a_{13} a_{23} + \varepsilon_{12} (a_{11} a_{22} + a_{12} a_{21})$$

$$+ \varepsilon_{13} (a_{11} a_{23} + a_{13} a_{21}) + \varepsilon_{23} (a_{12} a_{23} + a_{13} a_{22})$$

$$E_{13} = \varepsilon_{11} a_{11} a_{31} + \varepsilon_{22} a_{12} a_{32} + \varepsilon_{33} a_{13} a_{33} + \varepsilon_{12} (a_{11} a_{32} + a_{12} a_{31})$$

$$+ \varepsilon_{13} (a_{11} a_{33} + a_{13} a_{31}) + \varepsilon_{23} (a_{12} a_{33} + a_{13} a_{32})$$

$$E_{23} = \varepsilon_{11} a_{21} a_{31} + \varepsilon_{22} a_{22} a_{32} + \varepsilon_{33} a_{23} a_{33} + \varepsilon_{12} (a_{21} a_{32} + a_{22} a_{31})$$

$$+ \varepsilon_{13} (a_{21} a_{33} + a_{23} a_{31}) + \varepsilon_{23} (a_{22} a_{33} + a_{23} a_{32})$$

۱۱-۱ کرنش‌های اصلی و جهات اصلی کرنش

در این بخش به طور خلاصه، روش و روابط مربوط به محاسبه مقادیر اصلی کرنش و جهات نظیر آن‌ها تشریح خواهند شد. همانطور که می‌دانیم تانسور مرتبه دوم کرنش مانند هر تانسور متقارن مرتبه دوم دیگر دارای جهات و مقادیر اصلی است. در این جهات‌ها، کرنش‌های برشی صفر خواهند بود. مقادیر کرنش‌های اصلی از بسط دترمینان زیر به دست می‌آید. بسط دترمینان زیر در واقع همان معادله مشخصه تانسور می‌باشد. در فصل تئوری تنش، در خصوص روش محاسبه مقادیر و جهات اصلی مباحث بیشتری خواهد آمد.

$$F(L) = \begin{vmatrix} \varepsilon_{11} - L & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} - L & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{13} & \varepsilon_{23} & \varepsilon_{33} - L \end{vmatrix} = 0$$

از حل رابطه بالا مقادیر اصلی L_i محاسبه خواهند شد. برای محاسبه جهات اصلی و به عبارت دیگر کسینوس-های هادی نظیر این جهات به روش زیر عمل می‌شود.

$$(\varepsilon_{11} - L_1)\xi_1 + \varepsilon_{12}\xi_2 + \varepsilon_{13}\xi_3 = 0$$

$$\varepsilon_{12}\xi_1 + (\varepsilon_{22} - L_1)\xi_2 + \varepsilon_{23}\xi_3 = 0$$

$$\varepsilon_{13}\xi_1 + \varepsilon_{23}\xi_2 + (\varepsilon_{33} - L_1)\xi_3 = 0$$

با شرط

$$\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 = 1$$

با جای‌گذاری مقادیر مختلف L مثلاً L_1 یا L_2 می‌توان جهات نظیر مقادیر ویژه دیگر را نیز به دست آورد.

مثال ۴-۱ محاسبه کرنش‌های اصلی و جهات اصلی آن

تانسور کرنش زیر را در نظر بگیرید.

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} 0.01 & 0.003 & 0 \\ 0.003 & 0.002 & 0 \\ 0 & 0 & 0.006 \end{bmatrix} \quad (\text{الف})$$

برای محاسبه مقادیر اصلی کرنش، بسط دترمینان زیر را به دست می‌آوریم:

$$F(L) = \begin{vmatrix} 0.01 - L & 0.003 & 0 \\ 0.003 & 0.002 - L & 0 \\ 0 & 0 & 0.006 - L \end{vmatrix} = 0 \quad (\text{ب})$$

در نتیجه خواهیم داشت:

$$L_1 = 0.011 \quad L_2 = 0.006 \quad L_3 = 0.001 \quad (\text{ج})$$

که در آن مرتب سازی L_1 ، L_2 و L_3 از بزرگترین مقدار به کوچکترین آن انجام شده است. برای محاسبه کسینوس‌های هادی نظیر جهت اصلی L_1 به صورت زیر عمل می‌کنیم.

$$\begin{aligned} (0.01 - 0.011)\xi_1 + 0.003\xi_2 + 0.0\xi_3 &= 0 \\ 0.003\xi_1 + (0.002 - 0.011)\xi_2 + 0.0\xi_3 &= 0 \end{aligned} \quad (\text{د})$$

$$\begin{aligned} 0.0\xi_1 + 0.0\xi_2 + (0.006 - 0.011)\xi_3 &= 0 \\ \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 &= 1 \end{aligned}$$

با استفاده از رابطه اول (د) داریم $\xi_1 = 3\xi_2$ و همچنین با کمک رابطه سوم (د) خواهیم داشت $\xi_3 = 0$. بدین ترتیب با جای‌گذاری آنها در رابطه آخر (د) داریم $\xi_2^2 + 9\xi_2^2 = 1$ در نتیجه:

$$\xi_1 = \pm \frac{3}{\sqrt{10}} \quad \xi_2 = \pm \frac{1}{\sqrt{10}} \quad \xi_3 = 0 \quad (\text{ه})$$

برای محاسبه جهات اصلی نظیر سایر مقادیر، روند کار مشابه است. به منظور تعیین مقادیر و جهات اصلی یک تانسور مرتبه دوم به سادگی می‌توان از نرم‌افزارهای موجود از *Maple* و *Mathematica* استفاده کرد. به عنوان مثال مجموعه دستورات زیر در نرم‌افزار *Maple* مقادیر ویژه و جهات نظیر آن را محاسبه می‌کند.

with(linalg);

$$\epsilon := [[0.01, 0.003, 0], [0.003, 0.002, 0], [0, 0, 0.006]]; \quad (\text{و})$$

eigenvalues(epsilon);

eigenvectors(epsilon);

۱۲-۱ نامتغیرهای کرنش و کرنش حجمی

برای محاسبه مقادیر نامتغیرهای کرنش، پس از جای‌گذاری λ_i به جای L و بسط دترمینان مربوط به کرنش-های اصلی، رابطه (۸۳-۱) ظاهر خواهد شد.

$$\lambda_i^3 - J_1 \lambda_i^2 + J_2 \lambda_i - J_3 = 0$$

که در آن

$$\begin{aligned} J_1 &= \epsilon_{11} + \epsilon_{22} + \epsilon_{33} = \delta_{\alpha\beta} \epsilon_{\alpha\beta} \\ J_2 &= \epsilon_{11}\epsilon_{22} + \epsilon_{11}\epsilon_{33} + \epsilon_{22}\epsilon_{33} - \epsilon_{12}^2 - \epsilon_{13}^2 - \epsilon_{23}^2 = \delta_{\alpha\beta} \epsilon_{\alpha\beta} \\ &= \begin{vmatrix} \epsilon_{11} & \epsilon_{12} \\ \epsilon_{12} & \epsilon_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \epsilon_{11} & \epsilon_{13} \\ \epsilon_{13} & \epsilon_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \epsilon_{22} & \epsilon_{23} \\ \epsilon_{23} & \epsilon_{33} \end{vmatrix} = \delta_{\alpha\beta} \cdot \text{cof } \epsilon_{\alpha\beta} \end{aligned}$$

$$J_3 = \begin{vmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{13} & \varepsilon_{23} & \varepsilon_{33} \end{vmatrix} = \det(\varepsilon_{\alpha\beta})$$

براساس تئوری معادلات جبری اثبات می‌شود که ثوابت (J_1, J_2, J_3) با ریشه‌های رابطه (۱-۸۳) در ارتباط می‌باشند. بدین ترتیب داریم:

$$J_1 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$$

$$J_2 = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3$$

$$J_3 = \lambda_1\lambda_2\lambda_3$$

با مشاهده روابط بالا، در می‌یابیم که رابطه (۱-۸۵) در واقع بیان‌گر حالتی است که در آن محورهای X_i دستگاه اصلی و مؤلفه‌های کرنش برشی صفر می‌باشند. به عبارت روشن‌تر مقادیر (J_1, J_2, J_3) نامتغیرهای تانسور کرنش هستند.

برای اثبات نامتغیربودن مقادیر (J_1, J_2, J_3) می‌توان به‌طور مستقیم نیز عمل کرد. به این منظور، رابطه انتقال تانسور کرنش $\varepsilon_{\alpha\beta}$ به $E_{\alpha\beta}$ ، از دستگاه x_α و به دستگاه y_α را در نظر بگیرید.

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = a_{\gamma\beta} a_{\delta\alpha} E_{\gamma\delta}$$

که در آن، $a_{\alpha\beta}$ کسینوس‌های هادی میان محورهای y_α و x_β می‌باشند. با جای‌گذاری رابطه (۱-۸۶) در رابطه اول (۱-۸۴) با فرض $(\alpha = \beta)$ و $a_{\alpha\gamma} a_{\beta\gamma} = \delta_{\alpha\beta}$ داریم:

$$J_1 = \varepsilon_{\alpha\alpha} = a_{\gamma\alpha} a_{\delta\alpha} E_{\gamma\delta} = \delta_{\gamma\delta} E_{\gamma\delta} = E_{\alpha\alpha}$$

در نتیجه مقدار J_1 مستقل از دستگاه مختصات و به عبارتی نامتغیر است. به‌طور مشابه برای J_2 داریم:

$$J_2 = \delta_{\alpha\beta} \cdot \text{cof}(\varepsilon_{\alpha\beta}) = \frac{1}{\gamma} \varepsilon_{\alpha\beta} \varepsilon_{\gamma\delta} \varepsilon_{i\alpha\gamma} \varepsilon_{k\beta\delta}$$

که در آن ε_{ijk} تانسور تناوبی مرتبه سوم و $\text{cof}(\varepsilon_{\alpha\beta})$ ، کوفاکتور تانسور کرنش است. با جای‌گذاری رابطه (۱-۸۸) در رابطه (۱-۸۶) خواهیم داشت:

$$J_2 = \frac{1}{\gamma} (a_{\zeta\alpha} a_{\eta\beta} E_{\zeta\eta}) (a_{\mu\gamma} a_{\nu\delta} E_{\mu\nu}) \varepsilon_{i\alpha\gamma} \varepsilon_{k\beta\delta}$$

پس از مرتب‌سازی داریم:

$$J_2 = \frac{1}{\gamma} E_{\zeta\eta} E_{\mu\nu} (\varepsilon_{i\alpha\gamma} a_{\zeta\alpha} a_{\mu\gamma}) (\varepsilon_{k\beta\delta} \cdot a_{\nu\delta} a_{\eta\beta})$$

با توجه به روابط $\varepsilon_{ijk} = a_{\gamma k} a_{\alpha \gamma} \varepsilon_{\alpha}$ ، $\varepsilon_{ijk} = a_{i\alpha} a_{j\beta} a_{k\gamma} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma}$ و تعریف تانسور تناوبی خواهیم داشت:

$$J_2 = \frac{1}{2} E_{\zeta\eta} E_{\mu\nu} \varepsilon_{i\zeta\mu} \varepsilon_{k\theta\nu} = \frac{1}{2} E_{\alpha\beta} E_{\gamma\delta} \varepsilon_{i\alpha\gamma} \varepsilon_{k\beta\delta}$$

در نتیجه مقدار J_2 نیز مستقل از دستگاه مختصات و به عبارتی نامتغیر است. در نهایت برای J_3 می‌توان نشان داد:

$$J_3 = \det(\varepsilon_{\alpha\beta}) = \frac{1}{6} \varepsilon_{\alpha\beta} \varepsilon_{\delta\gamma} \varepsilon_{\zeta\eta} \varepsilon_{\zeta\alpha\delta} \varepsilon_{\eta\beta\gamma} = \frac{1}{6} E_{\alpha\beta} E_{\delta\gamma} E_{\zeta\eta} \varepsilon_{\zeta\alpha\delta} \varepsilon_{\eta\beta\gamma}$$

در نتیجه مقدار J_3 نیز مستقل از دستگاه مختصات و نامتغیر است.

کرنش حجمی

در حین تغییر شکل، حجم اولیه المان dV ، که به حجم تغییر یافته $d\mathcal{V}$ تبدیل می‌شود. مشابه تعریف ضریب بزرگنمایی، کرنش حجمی e به شکل زیر تعریف می‌شود.

$$e = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{d\mathcal{V}}{dV} \right)^2 - 1 \right]$$

هر چند کرنش حجمی را می‌توان به‌طور مستقیم از مؤلفه‌های $\varepsilon_{\alpha\beta}$ به دست آورد، استفاده از کرنش‌های اصلی در ساده‌سازی روابط بسیار مفید است. بدین ترتیب یک المان مکعبی کوچک با لبه‌هایی موازی جهات اصلی کرنش را در نظر بگیرید. بنابراین با توجه به تعریف جهات اصلی، لبه‌های المان پس از تغییر شکل نیز عمود بر یکدیگر باقی خواهند ماند. با استفاده از رابطه $MF_A = [(ds/ds)^2 - 1]/2$ داریم:

$$\left(\frac{ds_1}{ds_1} \right)^2 = 1 + 2\lambda_1$$

که در آن λ_1 کرنش اصلی در جهت یکی از اضلاع المان است. روابط مشابهی را می‌توان برای دو ضلع دیگر نوشت. در نتیجه با توجه به اینکه $dV = ds_1 ds_2 ds_3$ ، داریم:

$$\left(\frac{d\mathcal{V}}{dV} \right)^2 = (1 + 2\lambda_1)(1 + 2\lambda_2)(1 + 2\lambda_3)$$

که در آن λ_1 ، λ_2 و λ_3 کرنش‌های اصلی می‌باشند. با استفاده از روابط بالا می‌توانیم کرنش حجمی e را برحسب نامتغیرهای کرنش به دست آوریم.

$$e = J_1 + 2J_2 + 4J_3$$

کرنش حجمی با نام تغییر حجم مکعبی و یا به‌طور ساده، تغییر حجم نیز ساخته می‌شود. با مشاهده رابطه (۹۶-۱) بدیهی است که e نیز از جمله مقادیر نامتغیر کرنش است. در صورت بازنویسی مقادیر J_1 ، J_2 و J_3

برحسب مؤلفه‌های کرنش می‌توان کرنش حجمی e را برحسب ε_{ij} به دست آورد. به علاوه با توجه به اینکه J_2 و J_3 از مراتب دوم و سوم نسبت به J_1 می‌باشند، با صرف‌نظر از آنها خواهیم داشت:

$$e = J_1 = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} = \varepsilon_{\alpha\alpha}$$

در نتیجه با فرض کوچک بودن جملات مرتبه دوم u_i و مشتقات آنها در مقایسه با جملات خطی u_i خواهیم داشت:

$$e = u_{1,1} + u_{2,2} + u_{3,3}$$

رابطه (۹۸-۱) به طور تقریبی، کرنش حجمی را برحسب مشتقات جابجایی بیان می‌کند. در یک جسم تراکم-ناپذیر، مقدار کرنش حجمی برابر صفر است و در نتیجه خواهیم داشت:

$$e = J_1 = u_{1,1} + u_{2,2} + u_{3,3} = 0$$

تانسور کرنش متوسط و انحرافی

آزمایش‌های مختلف حاکی از آن است که پدیده تسلیم پلاستیک در بسیاری از مواد فلزی، مستقل از کرنش متوسط است. این کرنش به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\varepsilon_m = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z}{3} = \frac{\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}}{3} = \frac{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3}{3} = \frac{1}{3}J_1$$

در نتیجه برای مطالعه رفتار پلاستیک، معمولاً کرنش متوسط را از تانسور کرنش مجزا می‌کنند. تانسور کرنش در این حالت برابر است با:

$$D = D_m + D_d$$

که در آن D نماد تانسور کرنش و D_m تانسور کرنش متوسط است.

$$D_m = \begin{bmatrix} \varepsilon_m & \cdot & \cdot \\ \cdot & \varepsilon_m & \cdot \\ \cdot & \cdot & \varepsilon_m \end{bmatrix}$$

تانسور D_d بیان‌گر تانسور کرنش انحرافی بوده و به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$D_d = \begin{bmatrix} \bar{\varepsilon}_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{12} & \bar{\varepsilon}_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{13} & \varepsilon_{23} & \bar{\varepsilon}_{33} \end{bmatrix}$$

که در آن

$$\bar{\varepsilon}_{11} = \varepsilon_x - \varepsilon_m = \varepsilon_{11} - \varepsilon_m$$

$$\bar{\varepsilon}_{22} = \varepsilon_y - \varepsilon_m = \varepsilon_{22} - \varepsilon_m$$

$$\bar{\varepsilon}_{33} = \varepsilon_z - \varepsilon_m = \varepsilon_{33} - \varepsilon_m$$

در صورتی که محورهاى (x_1, x_2, x_3) محورهاى اصلی باشند خواهیم داشت:

$$\varepsilon_x = \varepsilon_{11} = \lambda_1$$

$$\varepsilon_y = \varepsilon_{22} = \lambda_2$$

$$\varepsilon_z = \varepsilon_{33} = \lambda_3$$

$$\varepsilon_{12} = \varepsilon_{13} = \varepsilon_{23} = 0$$

بدین ترتیب روابط، شکل ساده‌تری پیدا خواهند کرد.

برای تانسور کرنش متوسط D_m داریم:

$$J_{1m} = J_1 = 3\varepsilon_m$$

$$J_{2m} = \frac{1}{3}J_1^* = 3\varepsilon_m^*$$

$$J_{3m} = \frac{1}{3}J_1^* = 3\varepsilon_m^*$$

برای تانسور کرنش انحرافى D_d داریم:

$$J_{1d} = 0$$

$$J_{2d} = J_2 - \frac{1}{3}J_1^* = -\frac{1}{6}[(\lambda_1 - \lambda_2)^2 + (\lambda_2 - \lambda_3)^2 + (\lambda_3 - \lambda_1)^2]$$

$$= \bar{\varepsilon}_{11}\bar{\varepsilon}_{22} + \bar{\varepsilon}_{11}\bar{\varepsilon}_{33} + \bar{\varepsilon}_{22}\bar{\varepsilon}_{33}$$

$$J_{3d} = \frac{1}{3}(\lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_3 - \lambda_1)$$

$$\times (\lambda_3 - \lambda_1 - \lambda_2)$$

$$= (\lambda_1 - \varepsilon_m)(\lambda_2 - \varepsilon_m)(\lambda_3 - \varepsilon_m)$$

$$= \bar{\bar{\varepsilon}}_{11}\bar{\bar{\varepsilon}}_{22}\bar{\bar{\varepsilon}}_{33}$$

که در آن $\bar{\bar{\varepsilon}}_{11} = \lambda_1 - \varepsilon_m$ ، $\bar{\bar{\varepsilon}}_{22} = \lambda_2 - \varepsilon_m$ و $\bar{\bar{\varepsilon}}_{33} = \lambda_3 - \varepsilon_m$ بیان گر مقادیر اصلی $\bar{\varepsilon}_{11}$ ، $\bar{\varepsilon}_{22}$ و $\bar{\varepsilon}_{33}$ است.

کرنش‌های اکتاهدرال یا هشت وجهی

صفحات فضایی اکتاهدرال، صفحاتی می‌باشند که بردار نرمال آن‌ها از رابطه $N_1^* = N_2^* = N_3^* = 1/3$ تبعیت می‌کنند. به عبارت روشن‌تر، هشت صفحه اکتاهدرال دارای بردار نرمال‌هایی با رابطه بالا نسبت به محورهاى اصلی کرنش هستند. در نتیجه:

$$\lambda_{oct} = \varepsilon_{oct} = \frac{\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}}{3} = \varepsilon_m = \frac{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3}{3}$$

که در آن ε_{oct} کرنش اکتاهدرال نامیده می‌شود. به طور مشابه، حداکثر کرنش برشی میان صفحات اکتاهدرال و بردار نرمال آنها برابر است با:

$$\Gamma = \gamma_{oct} = \frac{2}{3} \sqrt{(\lambda_1 - \lambda_2)^2 + (\lambda_1 - \lambda_3)^2 + (\lambda_2 - \lambda_3)^2}$$

که در آن γ_{oct} کرنش برشی اکتاهدرال است. این کرنش نقش مهمی در تئوری‌های پلاستیسیته ایفا می‌کند.

۱۳-۱ تغییر شکل همگن

در این بخش حالت خاصی از تغییر شکل، مورد بررسی قرار خواهد گرفت. بدین ترتیب که مکان نهایی یک ذره (ξ_1, ξ_2, ξ_3) به صورت ترکیبی خطی از مکان اولیه آن (x_1, x_2, x_3) است. در نتیجه:

$$\xi_1 = C_{1.} + (1 + C_{11})x_1 + C_{12}x_2 + C_{13}x_3$$

$$\xi_2 = C_{2.} + C_{21}x_1 + (1 + C_{22})x_2 + C_{23}x_3$$

$$\xi_3 = C_{3.} + C_{31}x_1 + C_{32}x_2 + (1 + C_{33})x_3$$

که در آن ضرایب دلخواه ثابت‌اند. با استفاده از رابطه بالا و $u_i = \xi_i - x_i$ خواهیم داشت:

$$u_1 = C_{1.} + C_{11}x_1 + C_{12}x_2 + C_{13}x_3$$

$$u_2 = C_{2.} + C_{21}x_1 + C_{22}x_2 + C_{23}x_3$$

$$u_3 = C_{3.} + C_{31}x_1 + C_{32}x_2 + C_{33}x_3$$

به ازای $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ داریم $u_1 = C_{1.}$ ، $u_2 = C_{2.}$ و $u_3 = C_{3.}$ لذا مقادیر ثابت $C_{1.}$ ، $C_{2.}$ و $C_{3.}$ بیان‌گر جابجایی مبدأ مختصات می‌باشند. به علاوه با توجه به این که این ضرایب، کرنشی در جسم ایجاد نمی‌کنند، معرف جابجایی جسم صلب در جسم خواهند بود. در نتیجه می‌توان از این ضرایب صرف‌نظر کرد. یعنی:

$$u_1 = C_{11}x_1 + C_{12}x_2 + C_{13}x_3$$

$$u_2 = C_{21}x_1 + C_{22}x_2 + C_{23}x_3$$

$$u_3 = C_{31}x_1 + C_{32}x_2 + C_{33}x_3$$

و یا در شکل اندیسی

$$u_\alpha = c_{\alpha\beta}x_\beta$$

با مشتق‌گیری از مؤلفه‌های جابجایی می‌توان مؤلفه‌های تانسور تنش را به صورت زیر به دست آورد.

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \frac{1}{\gamma} (c_{\alpha\beta} + c_{\beta\alpha} + c_{\theta\alpha}c_{\theta\beta})$$

و یا در شکل گسترده خواهیم داشت:

$$\varepsilon_{11} = C_{11} + \frac{1}{\gamma} (c_{11}^2 + c_{21}^2 + c_{31}^2)$$

⋮

$$2\varepsilon_{12} = C_{21} + C_{12} + C_{11}C_{12} + C_{21}C_{22} + C_{31}C_{32}$$

⋮

در نتیجه شش مؤلفه تانسور کرنش در این حالت ثابت خواهند بود. به عبارت روشن‌تر، در صورتی که (ξ_1, ξ_2, ξ_3) توابعی خطی از (x_1, x_2, x_3) باشند، کرنش در کل جسم ثابت می‌باشد. این تغییر شکل با نام تغییرشکل همگن و یا تانسور کرنش همگن شناخته می‌شود.

ویژگی‌های هندسی

تغییرشکل همگن دارای برخی ویژگی‌های هندسی خاص است. از این جمله می‌توان به عدم تغییر تعدادی از نواحی هندسی مانند خط مستقیم، صفحه مسطح و سطوح عمود برهم نام برد. به عنوان مثال معادله پارامتری خط مستقیم به صورت زیر است.

$$x_1 = a_1 + b_1 t \quad x_2 = a_2 + b_2 t \quad x_3 = a_3 + b_3 t$$

که در آن a_i و b_i ضرایب ثابت و t پارامتر است. در حین تغییر شکل x_i به ξ_i تبدیل خواهند شد. یعنی:

$$\xi_1 = x_1 + u_1 \quad \xi_2 = x_2 + u_2 \quad \xi_3 = x_3 + u_3$$

با جای‌گذاری روابط (۱۱۲-۱) و (۱۱۶-۱) در (۱۱۷-۱) خواهیم داشت:

$$\xi_1 = (1 + c_{11})a_1 + c_{12}a_2 + c_{13}a_3 + [(1 + c_{11})b_1 + c_{12}b_2 + c_{13}b_3]t$$

$$\xi_2 = \dots$$

$$\xi_3 = \dots$$

رابطه (۱۱۸-۱) بیان‌گر معادله پارامتری یک خط مستقیم است. در نتیجه می‌توان گفت که یک خط مستقیم، تحت تغییرشکل همگن به یک خط مستقیم تبدیل خواهد شد. به علاوه می‌توان نتیجه گرفت که هر صفحه مسطح نیز طی تغییرشکل همگن به صفحه‌ای مسطح تبدیل می‌شود. زیرا هر صفحه را می‌توان به کمک دو خط مستقیم به دست آورد.

به طور مشابه ثابت می‌شود که خطوط موازی به خطوط موازی، صفحات موازی به صفحات موازی و نیز هر متوازی‌السطوح به یک متوازی‌السطوح تبدیل خواهد شد. به علاوه اثبات می‌شود که هر سطح کروی در حالت کلی و در طی تغییر شکل همگن به یک سطح بیضی گون تبدیل می‌شود.

کرنش خالص یا تغییر حجم

یکی از حالات خاص مهم، حالت کرنش خالص است. در این حالت تغییر شکل همگن با نام کرنش خالص شناخته می‌شود اگر بتوان محورهای متعامد را یافت که در طی تغییر شکل، ثابت باقی بمانند. به عبارت دیگر در طی تغییر شکل دستگاه x_i به X_i نگاشته می‌شود. این تغییر شکل در صورتی کرنش خالص است که این دو دستگاه برهم منطبق باشند. بدین ترتیب دستگاه‌های x_i و X_i همان دستگاه محورهای اصلی خواهند بود. در این دستگاه اصلی مختصات نقطه P برابر با (x_1, x_2, x_3) و مختصات تغییر یافته نقطه P برابر با ξ_1, ξ_2, ξ_3 می‌باشند. در حین تغییر شکل همگن خواهیم داشت:

$$\xi_1 = (1 + c_{11})x_1 + c_{12}x_2 + c_{13}x_3$$

$$\xi_2 = c_{21}x_1 + (1 + c_{22})x_2 + c_{23}x_3$$

$$\xi_3 = c_{31}x_1 + c_{32}x_2 + (1 + c_{33})x_3$$

که در آن جابجایی‌های جسم صلب (c_{11}, c_{22}, c_{33}) حذف شده‌اند. با توجه به تعریف کرنش خالص، اگر نقطه P روی محور x_1 باشد، لزوماً نقطه P هم بر روی X_1 قرار خواهد داشت. در نتیجه به دلیل صفر بودن (x_2, x_3) باید (ξ_2, ξ_3) نیز صفر باشند. با توجه به غیرصفر بودن x_1 ، باید $c_{21} = c_{31} = 0$. به طور مشابه با در نظر گرفتن نقاطی بر روی محور x_2 و x_3 ضرایب c_{12}, c_{13}, c_{23} و نیز برابر صفر می‌باشند. در نتیجه در دستگاه محورهای اصلی، تغییر شکل کرنش خالص به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\xi_1 = (1 + c_{11})x_1 \quad \xi_2 = (1 + c_{22})x_2 \quad \xi_3 = (1 + c_{33})x_3$$

مقادیر ثابت (c_{11}, c_{22}, c_{33}) در واقع بیان‌گر میزان تغییر طول المان‌های خطی با جهت‌گیری محورهای اصلی هستند. این ضرایب با نام ضرایب تغییر حجم اصلی شناخته می‌شوند. مثبت بودن آنها معرف افزایش طول و منفی بودن آنها نظیر کاهش طول المان خواهد بود.

یک تغییر شکل کرنش خالص یا تغییر حجم در صورت برابر بودن ضرایب بالا با نام تغییر حجم ساده شناخته می‌شود. به عنوان مثالی از تغییر حجم ساده می‌توان به یک جسم ایزوتروپ تحت فشار هیدرواستاتیک خارجی یکنواخت اشاره کرد.

در دستگاه مختصات کروی، تغییر حجم ساده به صورت زیر بیان می‌شود.

$$u = Cr \quad v = w = 0 \quad c_{11} = c_{22} = c_{33} = C$$

که در آن (u, v, w) مؤلفه‌های جابجایی در (ρ, ϕ, θ) می‌باشند. در دستگاه مختصات استوانه‌ای (r, θ, z) تغییر شکل ناشی از کشش و فشار ساده در یک تیر منشوری به صورت زیر می‌باشد.

$$u = Cr \quad v = 0 \quad w = Kz \quad c_{11} = c_{22} = C \quad c_{33} = K$$

در این حالت K و C دارای علامت مختلف خواهند بود و نسبت C/K - یکی از ویژگی‌های ماده با نام نسبت پواسن می‌باشد. این نسبت برای اکثر فلزات در محدود $1/4$ تا $1/3$ است.

۱-۱۴ تئوری کرنش و دوران کوچک

در این بخش به طور مختصر، تئوری حاکم بر کرنش و دوران‌های کوچک در یک جسم انعطاف‌پذیر بیان خواهد شد. به منظور جلوگیری از اطاله کلام، تنها نتایج مهم و روابط کاربردی ذکر خواهند شد. مقصود اصلی از ارایه این تئوری، دستیابی به روابط خطی و ساده با فرض تغییرشکل‌های کوچک است. این فرض علاوه بر ساده‌سازی روابط غیرخطی، دارای کاربرد وسیعی در مباحث کلاسیک الاستیسیته می‌باشد. با صرف‌نظر از جملات غیرخطی در حالت کوچک‌بودن کرنش‌ها، روابط کلی زیر به دست خواهند آمد.

$$\varepsilon_{11} = e_{11} = u_x = \frac{\partial u}{\partial x} = u_{1,1}$$

$$\varepsilon_{22} = e_{22} = v_y = \frac{\partial v}{\partial y} = u_{2,2}$$

$$\varepsilon_{33} = e_{33} = w_z = \frac{\partial w}{\partial z} = u_{3,3}$$

$$\gamma_{12} = \gamma_{21} = v_x + u_y = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = u_{2,1} + u_{1,2}$$

$$\gamma_{13} = \gamma_{31} = w_x + u_z = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = u_{3,1} + u_{1,3}$$

$$\gamma_{23} = \gamma_{32} = w_y + v_z = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} = u_{3,2} + u_{2,3}$$

و یا در شکل اندیسی

$$\gamma_{\alpha\beta} = \left(\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial u_\beta}{\partial x_\alpha} \right) = u_{\alpha,\beta} + u_{\beta,\alpha}$$

فرض اساسی در تئوری تغییر شکل کوچک کلاسیک، کوچک بودن کرنش و دوران به طور همزمان است. به عبارت دیگر کوچک بودن کرنش‌ها همیشه لزوماً با کوچک بودن دوران همراه نیست. به عنوان مثال پدیده رول شدن یک ورق نازک و بلند فلزی و تبدیل آن به استوانه را در نظر بگیرید. در این حالت علی‌رغم کوچک

بودن کرنش‌ها، جابجایی و در نتیجه مقادیر دوران بزرگ می‌باشند. در نتیجه فرض کوچک بودن تغییر شکل‌ها و استفاده از روابط (۱-۱۲۴) نادرست خواهد بود. در حالت کلی، استفاده از این تئوری در تحلیل اجسام توپر و حجیم مناسب می‌باشد. از طرف دیگر، به کار بردن این تئوری در تحلیل سازه‌های جدار نازک، ممکن است به خطاهای بسیار زیاد منجر شود.

جابجایی جسم صلب

یکی از ساده‌ترین حالات، ثابت بودن بردار جابجایی q است. این حرکت انتقال یک جسم را بیان می‌کند. حالت دیگر، دوران جسم صلب است. این دو حالت بیان‌گر کلی‌ترین حالت حرکت جسم صلب در فضا می‌باشد. در این بخش می‌خواهیم نشان دهیم که یک حرکت کلی جسم صلب، به صورت نواری خطی از مؤلفه‌های دستگاه مختصات بیان می‌شود. برای استخراج مؤلفه‌های جابجایی از شرط صفر بودن مؤلفه‌های کرنش استفاده خواهد شد. در نتیجه داریم:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

با دیفرانسیل‌گیری از سه رابطه آخر (۱-۱۲۵) نسبت به (x, y, z) داریم:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial z} = 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} = 0.$$

در نتیجه خواهیم داشت:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 v}{\partial z \partial x} = \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = 0.$$

در نتیجه روابط $\partial u / \partial x = 0$ و $\partial^2 u / \partial y \partial z = 0$ نشان می‌دهند که u برابر با حاصل جمع خطی تابعی از y و تابعی از z است. در نتیجه:

$$u = f_1(y) + f_2(z)$$

و به طور مشابه

$$v = f_3(x) + f_4(z)$$

$$w = f_5(x) + f_6(y)$$

با استفاده از رابطه $\partial w / \partial y + \partial v / \partial z = 0$ خواهیم داشت:

$$f_6' + f_4' = 0.$$

که در آن پریم، نماد مشتق گیری است. از آنجا که f_ϵ از تابع y و f_ϕ تابع z است، در کلی ترین حالت داریم:

$$f'_\epsilon(y) = -f'_\phi(z) = c_1$$

که در آن c_1 مقداری ثابت است. به طور مشابه داریم:

$$f'_\gamma(z) = -f'_\delta(x) = c_2$$

$$f'_\gamma(x) = -f'_\delta(y) = c_3$$

با انتگرال گیری از روابط (۱-۱۳۱) و (۱-۱۳۲) و جای گذاری در روابط (u, v, w) خواهیم داشت:

$$u = a. + c_2 z - c_3 y$$

$$u = b. + c_3 x - c_1 z$$

$$u = c. + c_1 y - c_2 x$$

که در آن $(a., b., c.)$ ثوابت انتگرال گیری می باشند. رابطه (۱-۱۳۳) بیان گر مؤلفه های جابجایی کوچک جسم صلب است. در این رابطه، $(a., b., c.)$ معرف انتقال و (c_1, c_2, c_3) نظیر دوران جسم صلب می باشند.

مثال ۵-۱ تحلیل جامع تغییر شکل

بردار جابجایی یک جسم انعطاف پذیر به صورت زیر است.

$$u_1 = C(10x_1 + 3x_2) \quad u_2 = C(3x_1 + 2x_2) \quad u_3 = 6Cx_3 \quad (\text{الف})$$

که در آن C مقداری ثابت است. هدف، تحلیل جامع تغییر شکل این جسم می باشد. در آغاز، قابل قبول بودن جابجایی با کنترل مثبت بودن دترمینان ژاکوبین بررسی می شود. این دترمینان برابر با $J = (1+6C)(1+11C)(1+C)$ است. با بررسی شرط مثبت بودن J ، گستره قابل قبول C به صورت $-1 < C < -1/6$ و $-1/11 < C < -1/6$ به دست می آید. با استفاده از روابط میان مؤلفه های کرنش ϵ_{ij} و مؤلفه های بردار جابجایی (u_1, u_2, u_3) ، می توان مؤلفه های کرنش را به صورت زیر محاسبه نمود. به روابط میان کرنش و جابجایی، به طور خلاصه معادلات سینماتیک یا معادلات هندسی گویند.

$$\epsilon_{11} = 10C + 54.5C^2 \quad \epsilon_{22} = 2C + 6.5C^2 \quad \epsilon_{33} = 6C + 18C^2 \quad (\text{ب})$$

$$2\epsilon_{12} = 6C + 36C^2 \quad 2\epsilon_{13} = 2\epsilon_{23} = 0$$

در استخراج مؤلفه‌های کرنش، فرض تغییر شکل کوچک به کار برده نشده و در نتیجه از حالت کلی معادلات سینماتیک استفاده شده است. با صرف نظر از اثرات غیرخطی و جمله‌های دارای C^2 با فرض $C \ll I$ ، مؤلفه‌های ε_{ij} با e_{ij} تقریب زده می‌شوند. در این حالت داریم:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} \approx e_{11} = 10C \quad \varepsilon_{22} \approx e_{22} = 2C \quad \varepsilon_{33} \approx e_{33} = 6C \quad (ج) \\ 2\varepsilon_{12} \approx 6C \quad 2\varepsilon_{13} \approx e_{13} = 0 \quad 2\varepsilon_{23} \approx e_{23} = 0 \end{aligned}$$

به علاوه برای مقادیر کوچک C ، کرنش حجمی e برابر است با:

$$e = J_1 + 2J_2 + 4J_3 \approx J_1 \approx e_{11} + e_{22} + e_{33} = 18C \quad (د)$$

مقادیر اصلی کرنش نیز از حل دترمینان زیر به دست می‌آید. در این بخش از فرض $\varepsilon_{ij} \approx e_{ij}$ استفاده شده است.

$$F(L) = \begin{vmatrix} 10C - L & 3C & 0 \\ 3C & 2C - L & 0 \\ 0 & 0 & 6C - L \end{vmatrix} = 0 \quad (ه)$$

که در آن مقادیر L_i کرنش‌های اصلی می‌باشند. با بسط دترمینان بالا، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} F(L) &= (6C - L)(L^2 - 12CL + 11C^2) \\ &= (6C - L)(L - 11C)(L - C) = 0 \end{aligned} \quad (و)$$

ریشه‌های این معادله عبارتند از:

$$L_1 = e_1 \approx \varepsilon_1 = 11C \quad L_2 = e_2 \approx \varepsilon_2 = 6C \quad L_3 = e_3 \approx \varepsilon_3 = C \quad (ز)$$

برای محاسبه جهات اصلی نظیر مقادیر اصلی، مطابق روش گفته شده عمل می‌کنیم. در این حالت برای $L_1 = 11C$ داریم:

$$\begin{aligned} (10C - 11C)N_1 + 3CN_2 &= 0 \\ 3CN_1 + (2C - 11C)N_2 &= 0 \quad (ح) \\ (6C - 11C)N_3 &= 0 \\ N_1^2 + N_2^2 + N_3^2 &= 1 \end{aligned}$$