

آزمون شبه‌نهایی

درس: حسابان ۱	رشته : ریاضی و فیزیک	مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه
پایه: یازدهم دوره دوم متوسطه نظری	ساعت شروع : ۸ صبح	تاریخ امتحان: ۱۴۰۵/۰۲/۱۰

جهت دسترسی به فایل هر کیوآرکد، آن‌ها را انتخاب یا اسکن کنید.



پاسخ‌نمای تشریحی
فعال‌سازی ساعت ۲۰

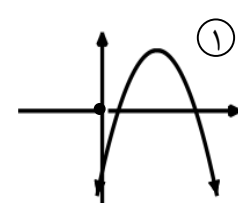
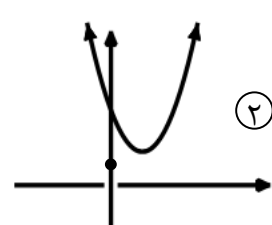
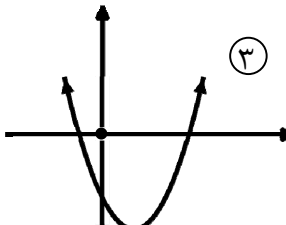
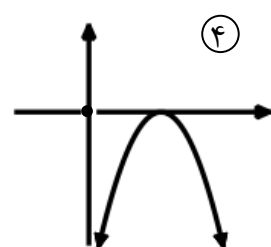


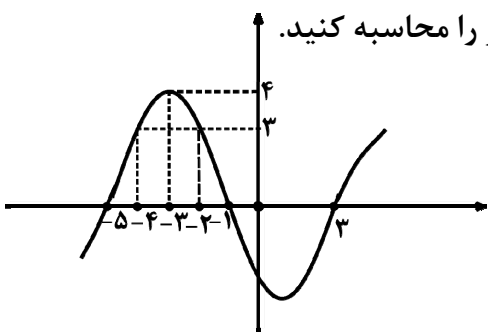
پاسخبرگ آزمون
فعال

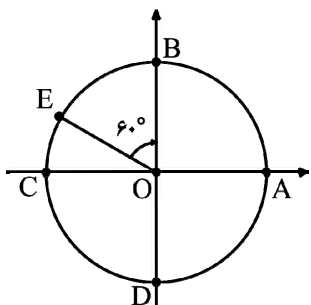


راهنمای تصحیح
جهت آشنایی دانش‌آموزان با بارم‌بندی
فعال‌سازی ساعت ۲۰

باسمه تعالی

ردیف	سوالات (استفاده از ماشین حساب ساده مجاز است).	نمره
۱	درستی یا نادرستی جمله‌های زیر را مشخص کنید. الف) اگر a, b دو عدد حقیقی هم علامت باشند، آنگاه $a + b = a + b$. ب) معادله $\sqrt{x+1} + \sqrt{x^2-1} = 0$ فاقد جواب است. پ) در معادله $x^2-1 + y-1 = 0$، x تابعی از y است.	۰/۷۵
۲	جاهای خالی را با عبارت یا عدد مناسب تکمیل کنید. الف) معادله درجه دومی که ریشه‌های آن $\frac{\sqrt{3}}{2}$ و $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ باشند، به صورت است. ب) حاصل $[x^2 - 1]$ به ازای $x = \frac{1}{\sqrt{5}}$ برابر است. ([] نماد جزء صحیح است) پ) اگر $\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{3}$ باشد، آنگاه $\sin\alpha$ برابر است. ت) حاصل عبارت $A = \frac{\sin 8^\circ \cos(-5^\circ) + \sin(-5^\circ) \cos 8^\circ}{\sin(-3^\circ)}$ برابر است.	۱
۳	نمودار سهمی به معادله $f(x) = -ax^2 + bx + a$ کدام گزینه است:  ①  ②  ③  ④	۰/۲۵
ادامه سوالات در صفحه بعد		

۱/۵	چند جمله از دنباله هندسی $2^{n+1}, 2^n, 2^{n-1}, \dots$ را با هم جمع کنیم تا مجموع جمله‌های آن <u>۱۰۲۰</u> شود؟	۴
۱/۵	نمودار تابع $f(x) = x^2 - 3 $ را رسم کنید، سپس به کمک روش هندسی تعداد جواب‌های معادله $ x^2 - 3 = -2x$ را بیابید.	۵
۱/۵	نقطه $A(1, k)$ در ناحیه چهارم مختصات قرار دارد و فاصله A تا خط $8x + 6y = -4$ برابر ۳ است. مقدار k را بیابید.	۶
۱/۲۵	۱۰ کیلوگرم محلول آب نمک ۴ درصدی با ۴ کیلوگرم محلول آب نمک ۷ درصدی مخلوط شده‌اند. با تبخیر چند کیلوگرم از این محلول، غلظت آن به ۵ درصد می‌رسد؟	۷
۱/۲۵	ضابطه تابع وارون $f(x) = x^2 - 2x + 3$ با دامنه $(x \leq 1)$ را به دست آورید.	۸
۰/۷۵	اگر $f = 2\sqrt{x-1}$ ، $g = \{(-1, 2), (2, 3), (5, 2)\}$ باشند و $f^{-1}(g(a)) = 2$ ، مقدار یا مقادیر a را بیابید.	۹
۱/۷۵	$g(x) = \frac{x}{x+1}$ و نمودار تابع f به صورت زیر است، مقادیر زیر را محاسبه کنید. الف) $\frac{2f}{g}(-3)$ ب) $f \circ f(-4)$ پ) $(1-g)(0)$ 	۱۰
۱/۷۵	اگر $\log 2 = a$ آنگاه حاصل عبارت زیر را بر حسب a به دست آورید. $\log(0.24) - \log(\log 1000)$	۱۱
	ادامه سوالات در صفحه بعد	

۲/۵	نامعادله و معادله زیر را حل کنید و مجموعه جواب آن‌ها را مشخص کنید. الف) $4 \times 3^{-x+2} > 108$ ب) $\log_3(x-1) + \log_3\left(\frac{x}{2} + 1\right) = \log_{\sqrt{3}} 3$	۱۲
۱	در دایره مثلثاتی روبه‌رو طول کمان $\widehat{ABE}$ را به دست آورید. 	۱۳
۱/۷۵	الف) نمودار تابع $f(x) = -\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + 1$ را در بازه $[0, 2\pi]$ به کمک نمودار $y = \cos x$ رسم کنید. (رسم نمودار هر مرحله الزامی است) ب) بیشترین و کمترین مقدار تابع $f(x)$ را در بازه $[0, 2\pi]$ بنویسید.	۱۴
۱/۵	تابع $f(x) = \begin{cases} \sqrt{1+x}, & -1 < x < 3 \\ [x], & -3 < x < -1 \end{cases}$ را در نظر بگیرید و به سوالات زیر پاسخ دهید: الف) نمودار تابع را رسم کنید. ب) دامنه تابع شامل همسایگی محذوف کدام نقطه است؟ پ) آیا $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ وجود دارد؟ چرا؟	۱۵
۲۰	موفق و پیروز باشید. جمع نمره	

۱. درستی یا نادرستی جمله‌های زیر را مشخص کنید. (۰/۷۵ نمره)

الف) اگر a و b دو عدد حقیقی هم علامت باشند، آنگاه

$$|a + b| = |a| + |b|$$

ب) معادله $\sqrt{x+1} + \sqrt{x^2-1} = 0$ فاقد جواب است.

پ) در معادله $|x^2-1| + |y-1| = 0$ ، x تابعی از y است.

پاسخ

الف) درست (۰/۲۵ نمره)

ب) نادرست (۰/۲۵ نمره)

پ) نادرست (۰/۲۵ نمره)

فیلم پاسخ



۲.

جاهای خالی را با عبارت یا عدد مناسب تکمیل کنید. (۱ نمره)

الف) معادله درجه دومی که ریشه های آن $\frac{\sqrt{3}}{4}$ و $-\frac{\sqrt{3}}{4}$ باشند، به صورت است.

ب) حاصل $[x^2 - 1]$ به ازای $x = \frac{1}{\sqrt{5}}$ برابر است. ([])
نماد جزء صحیح است.)

پ) اگر $\cos(\alpha + \frac{\pi}{4}) = \frac{1}{3}$ باشد، آنگاه $\sin \alpha$ برابر است.

ت) حاصل عبارت $A = \frac{\sin 80^\circ \cos(-50^\circ) + \sin(-50^\circ) \cos 80^\circ}{\sin(-30^\circ)}$ برابر است.

پاسخ

الف) $x^2 - \frac{3}{4} = 0$ (۲۵/۰ نمره)

ب) -1 (۲۵/۰ نمره)

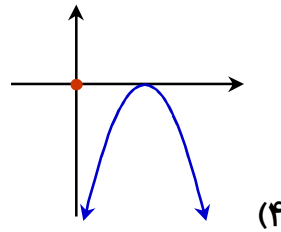
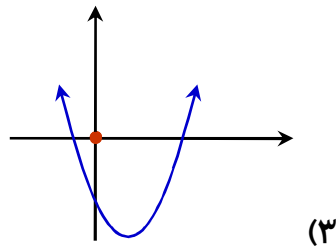
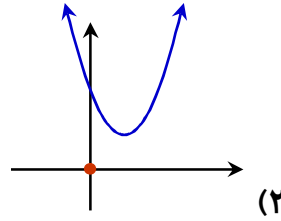
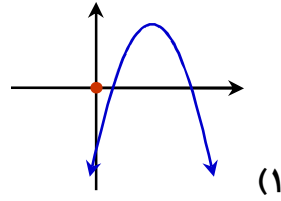
پ) $-\frac{1}{3}$ (۲۵/۰ نمره)

ت) -1 (۲۵/۰ نمره)

فیلم پاسخ



۳. نمودار سهمی به معادله $f(x) = -ax^2 + bx + a$ کدام گزینه است؟ (۰/۲۵ نمره)



گزینه ۳ (۰/۲۵ نمره)

پاسخ

فیلم پاسخ



۴. چند جمله از دنباله هندسی $2^{n+1}, 2^n, 2^{n-1}, \dots$ را با هم جمع کنیم تا مجموع جمله‌های آن ۱۰۲۰ شود؟ (۱/۵ نمره)

پاسخ

$$\begin{aligned}
 r &= \frac{1}{2} = 2^{-1} \quad (\text{نمره } ۰/۲۵), \quad S = \frac{a(1-r^n)}{1-r} \\
 \Rightarrow \frac{2^{n+1}(1-(2^{-1})^n)}{1-\frac{1}{2}} &= 1020 \quad (\text{نمره } ۰/۵) \\
 \Rightarrow \frac{2^{n+1}(1-2^{-n})}{\frac{1}{2}} &= 1020 \Rightarrow 2^{n+1} - 2 = 510 \quad (\text{نمره } ۰/۲۵) \\
 \Rightarrow 2^{n+1} = 512 = 2^9 \quad (\text{نمره } ۰/۲۵) &\Rightarrow n = 8 \quad (\text{نمره } ۰/۲۵)
 \end{aligned}$$

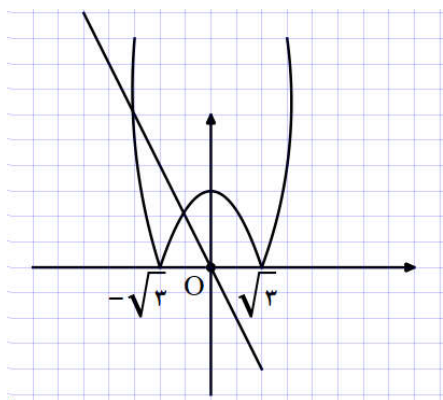
فیلم پاسخ



۵ نمودار تابع $f(x) = |x^2 - 3|$ را رسم کنید، سپس به کمک روش هندسی تعداد جواب های معادله $|x^2 - 3| = -2x$ را بیابید. (۱/۵ نمره)

پاسخ

رسم هر نمودار (۰/۵ نمره)



معادله دارای دو جواب است. (۰/۵ نمره)

فیلم پاسخ



۶ نقطه $A(1, k)$ در ناحیه چهارم مختصاتی قرار دارد و فاصله A تا خط $8x + 6y = -4$ برابر ۳ است. مقدار k را بیابید.
(۱/۵ نمره)

پاسخ

$$d = \frac{|ax+by+c|}{\sqrt{a^2+b^2}} \quad (۰/۲۵ \text{ نمره})$$

$$\Rightarrow \frac{|8x_0+6y_0+4|}{\sqrt{8^2+6^2}} = \frac{|8(1)+6(k)+4|}{10} = 3$$

$$\Rightarrow |12 + 6k| = 30 \quad (۰/۵ \text{ نمره})$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 12 + 6k = 30 \rightarrow k = 3 \quad (۰/۲۵ \text{ نمره}) \\ 12 + 6k = -30 \rightarrow k = -7 \quad (۰/۲۵ \text{ نمره}) \end{cases}$$

با توجه به اینکه نقطه A در ناحیه چهارم واقع است، جواب $k = -7$ قابل قبول است. (۰/۲۵ نمره)

فیلم پاسخ



۷. ۱۰ کیلوگرم محلول آب نمک ۴ درصدی با ۴ کیلوگرم محلول آب نمک ۷ درصدی مخلوط شده اند. با تبخیر چند کیلوگرم از این محلول، غلظت آن به ۵ درصد می‌رسد؟ (۱/۲۵ نمره)

پاسخ

میزان آب تبخیر شده را X کیلوگرم فرض می‌کنیم.

$$۱۰ \times \frac{۴}{۱۰۰} = ۰/۴ \quad (\text{نمره } ۰/۲۵)$$

$$۴ \times \frac{۷}{۱۰۰} = ۰/۲۸ \quad (\text{نمره } ۰/۲۵)$$

$$\Rightarrow \frac{۰/۴ + ۰/۲۸}{(۱۰ + ۴) - X} = \frac{۵}{۱۰۰} \quad (\text{نمره } ۰/۵)$$

$$\Rightarrow ۶۸ = ۷۰ - ۵X \Rightarrow X = ۰/۴ \quad (\text{نمره } ۰/۲۵)$$

فیلم پاسخ



۸. ضابطه تابع وارون $f(x) = x^2 - 2x + 3$ با دامنه $(x \leq 1)$ را به دست آورید. (۱/۲۵ نمره)

پاسخ

$$f(x) = (x - 1)^2 + 2 \quad (۰/۵ \text{ نمره})$$

$$\underbrace{y - 2 = (x - 1)^2}_{(۰/۵ \text{ نمره})} \Rightarrow \sqrt{y - 2} = -(x - 1)$$

$$\rightarrow \underbrace{x = -\sqrt{y - 2} + 1}_{(۰/۲۵ \text{ نمره})} \rightarrow f^{-1}(x) = -\sqrt{x - 2} + 1$$

فیلم پاسخ



۹. اگر $f = 2\sqrt{x-1}$ و $g = \{(-1, 2), (2, 3), (5, 2)\}$ باشند و $f^{-1}(g(a)) = 2$ مقدار یا مقادیر a را بیابید. (۷۵ نمره)

پاسخ

$$f^{-1}(g(a)) = 2 \Rightarrow \underbrace{f(2) = g(a)}_{(25 \text{ نمره})} \Rightarrow 2 = g(a)$$

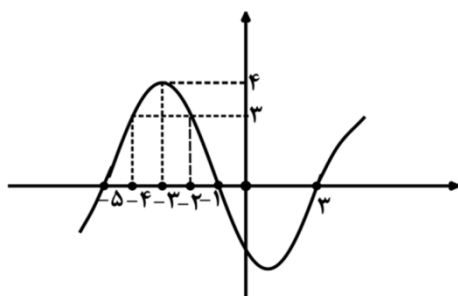
$$\rightarrow \underbrace{a = -1}_{(25 \text{ نمره})}$$

$$\text{یا } \underbrace{a = 5}_{(25 \text{ نمره})}$$

فیلم پاسخ



۱۰. $g(x) = \frac{x}{x+1}$ و نمودار تابع f به صورت زیر است، مقادیر زیر را محاسبه کنید. (۱/۷۵ نمره)



الف) $\frac{2f}{g}(-3)$

ب) $f \circ f(-4)$

پ) $(1 - g)(0)$

پاسخ

الف)

$$\frac{2f(-3)}{g(-3)} = \frac{\widehat{2 \times 4}}{\frac{3}{-2}} = \frac{\widehat{16}}{3} \quad \begin{matrix} (2/25 \text{ نمره}) \\ (2/25 \text{ نمره}) \end{matrix}$$

ب)

$$f \circ f(-4) = f(f(-4)) = f(3) = 0 \quad \begin{matrix} (2/25 \text{ نمره}) \\ (2/25 \text{ نمره}) \end{matrix}$$

پ)

$$(1 - g)(0) = \underbrace{1 - g(0)}_{(2/25 \text{ نمره})} = 1 - 0 = 1 \quad (2/25 \text{ نمره})$$

فیلم پاسخ



۱۱. اگر $\log_2 a = 2$ آنگاه حاصل عبارت زیر را بر حسب a به دست

آورید. (۱/۷۵ نمره)

$$\log\left(\frac{24}{100}\right) - \log(\log 1000)$$

پاسخ

$$\log\left(\frac{24}{100}\right) - \log(\log 1000) = \underbrace{\log\left(\frac{6}{25}\right)}_{(0.25 \text{ نمره})} - \underbrace{\log 3}_{(0.25 \text{ نمره})}$$

$$= \underbrace{\log 6 - \log 25 - \log 3}_{(0.25 \text{ نمره})}$$

$$= \underbrace{\log 2 + \log 3}_{(0.25 \text{ نمره})} - \underbrace{2\log 5}_{(0.25 \text{ نمره})} - \log 3$$

$$= \log 2 - \underbrace{2(1 - \log 2)}_{(0.25 \text{ نمره})} = \underbrace{3a - 2}_{(0.25 \text{ نمره})}$$

یا

$$\log\left(\frac{24}{100}\right) - \log(\log 1000) = \underbrace{\log 3 \times 2^3 - \log 10^2}_{(0.5 \text{ نمره})} - \underbrace{\log 3}_{(0.25 \text{ نمره})}$$

$$= \underbrace{\log 3 + 3\log 2}_{(0.5 \text{ نمره})} - \underbrace{2\log 10}_{(0.25 \text{ نمره})} - \log 3 = 3a - 2 \quad (0.25 \text{ نمره})$$

فیلم پاسخ



۱۲. نامعادله و معادله زیر را حل کنید و مجموعه جواب آن‌ها را

مشخص کنید. (۲/۵ نمره)

الف) $4 \times 3^{-x+2} > 108$

ب) $\log_3(x-1) + \log_3\left(\frac{x}{2} + 1\right) = \log_{\sqrt{3}} 3$

پاسخ

الف)

$$4 \times 3^{-x+2} > 108 \Rightarrow \underbrace{3^{-x+2} > 27}_{(2/5 \text{ نمره})}$$

$$\Rightarrow \underbrace{3^{-x+2} > 3^3}_{(5/5 \text{ نمره})} \Rightarrow x < -1$$

ب)

$$\overbrace{\log_3(x-1) \left(\frac{x}{2} + 1\right)}^{(5/5 \text{ نمره})} = \overbrace{2 \log_3 3}^{(2/5 \text{ نمره})} = 2$$

$$\Rightarrow \overbrace{\log_3 \left(\frac{x^2+x-2}{2}\right)}^{(5/5 \text{ نمره})} = 2$$

$$\Rightarrow x^2 + x - 20 = 0 \quad (5/5 \text{ نمره})$$

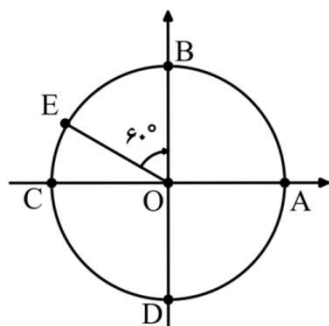
$$\Rightarrow \begin{cases} x = -5 \\ x = 4 \end{cases} \quad (5/5 \text{ نمره})$$

با توجه به دامنه لگاریتم، جواب $x = -5$ قابل قبول نیست. (۲/۵ نمره)

فیلم پاسخ



۱۳. در دایره مثلثاتی روبه‌رو طول کمان $\widehat{ABE}$ را به‌دست آورید.
(۱ نمره)



پاسخ

$$\widehat{AOE} = 90^\circ + 60^\circ = 150^\circ \quad (\text{نمره } 0/25)$$

$$\Rightarrow \widehat{AOE} = \frac{\Delta\pi}{6} \quad (\text{نمره } 0/25)$$

$$\Rightarrow \theta = \frac{L}{r} \quad (\text{نمره } 0/25)$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta\pi}{6} = \frac{L}{1} \rightarrow L = \frac{\Delta\pi}{6} \quad (\text{نمره } 0/25)$$

فیلم پاسخ

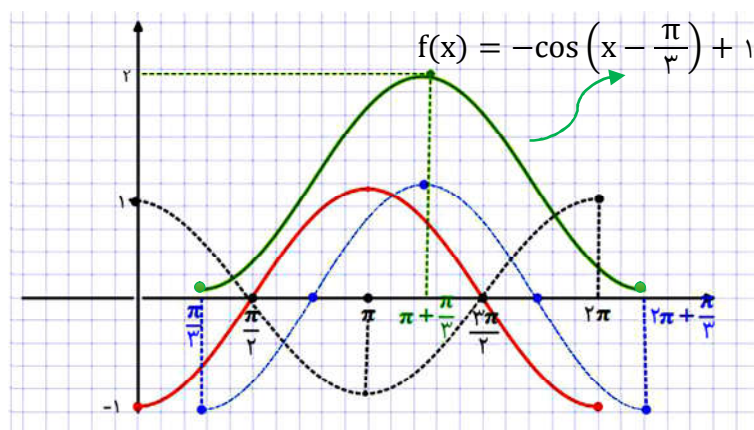


۱۴. الف) نمودار تابع $f(x) = -\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + 1$ را در بازه $[0, 2\pi]$ به کمک نمودار $y = \cos x$ رسم کنید. (رسم نمودار هر مرحله الزامی است).

ب) بیشترین و کمترین مقدار تابع $f(x)$ را در بازه $[0, 2\pi]$ بنویسید. (۱/۷۵ نمره)

پاسخ

الف)



رسم هر نمودار (۰/۲۵ نمره)

ب) بیشترین مقدار در $x = \frac{4\pi}{3}$ (۰/۲۵ نمره) و کمترین مقدار در $x = \frac{\pi}{3}$, $x = \frac{7\pi}{3}$ (۰/۵ نمره)

فیلم پاسخ



۱۵. تابع $f(x) = \begin{cases} \sqrt{1+x} & , -1 < x < 3 \\ [x] & , -3 < x < -1 \end{cases}$ را در نظر

بگیرید و به سوالات زیر پاسخ دهید: (۱/۵ نمره)

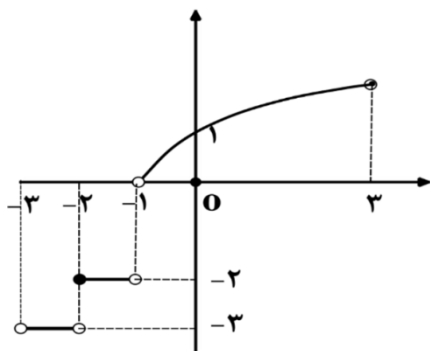
الف) نمودار تابع را رسم کنید.

ب) دامنه تابع شامل همسایگی محذوف کدام نقطه است؟

پ) آیا $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ وجود دارد؟ چرا؟

پاسخ

الف) رسم نمودار (۰/۷۵ نمره)



ب) همسایگی محذوف در نقطه $x = -1$ (۰/۲۵ نمره)

پ) خیر (۰/۲۵ نمره)

زیرا در $x = 3$ همسایگی راست وجود ندارد. (۰/۲۵ نمره)

فیلم پاسخ

