



آزمون شبه‌نهایی

مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه	رشته: علوم تجربی	درس: ریاضی ۳
تاریخ امتحان: ۱۴۰۵/۰۲/۱۲	ساعت شروع: ۸ صبح	پایه دوازدهم دوره دوم متوسطه نظری

جهت دسترسی به فایل هر کیوآرکد، آن‌ها را انتخاب یا اسکن کنید.



پاسخ‌نمای تشریحی
فعال‌سازی ساعت ۲۰



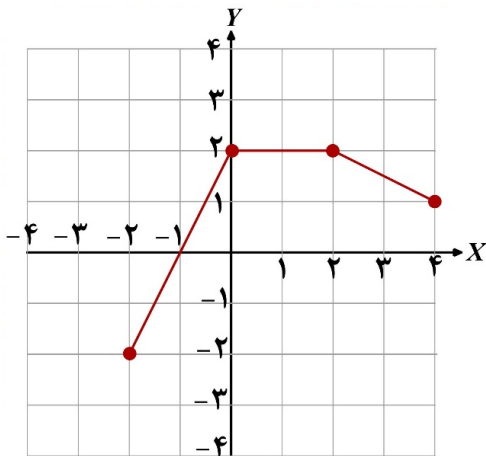
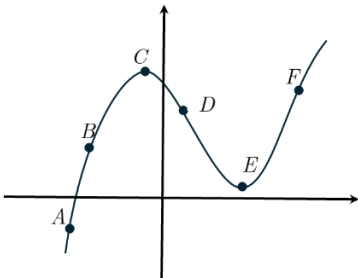
پاسخبرگ آزمون
فعال



راهنمای تصحیح
جهت آشنایی دانش‌آموزان با بارم‌بندی
فعال‌سازی ساعت ۲۰

باسمه تعالی

سوالات آزمون شبه نهایی درس: ریاضی ۳	رشته: علوم تجربی	مدت آزمون: ۱۲۰ دقیقه	تعداد صفحه: ۳
پایه دوازدهم دوره دوم متوسطه نظری	ساعت شروع: ۸ صبح	تاریخ آزمون: ۱۴۰۵/۰۲/۱۲	نام و نام خانوادگی:
ردیف	سوالات، استفاده از ماشین حساب ساده (دارای چهار عمل اصلی، جذر و درصد) بلامانع است.		
۱	درستی یا نادرستی هر یک از جمله‌های زیر را مشخص کنید. الف) اگر تابع $y = f(x)$ تابعی اکیداً یکنوا باشد، آن‌گاه تابع $y = f(x)$ همواره اکیداً یکنواست. ب) تابع $y = \tan x$، تابعی متناوب با دوره تناوب π است. پ) اگر $0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$ باشد، آن‌گاه $\sin \alpha < \tan \alpha$. ت) بازه $(1, 8)$، یک همسایگی عدد $\frac{5}{4}$ است. ث) اگر برد تابعی برابر با $\mathbb{R}$ باشد، آن‌گاه این تابع اکسترمم مطلق ندارد.		
۲	جاهای خالی را با عدد یا عبارت مناسب کامل کنید. الف) دامنه تابع $f(x)$ برابر با $(-2, 0)$ است. در این صورت دامنه تابع $y = f(x)$ برابر با است. ب) برد تابع $y = \tan x$ برابر با است. پ) تابع f یک چندجمله‌ای از درجه ۴ است. در این صورت $f \circ f'$ یک چندجمله‌ای از درجه است.		
۳	گزینه صحیح را انتخاب کنید. الف) دو تابع $f = \{(0, 1), (2, 3), (4, 5)\}$ و $g = \{(1, 4), (2, 5), (3, 3), (4, 1)\}$ را در نظر بگیرید. دامنه تابع $f \circ g$ کدام است؟ (۱) $\{1\}$ (۲) $\{2\}$ (۳) $\{2, 4\}$ (۴) $\{3, 5\}$ ب) اگر تابع f در نقطه‌ای به طول $x = c$ دارای مینیمم نسبی باشد و مشتق راست داشته باشد، آن‌گاه همواره $f'_+(c)$ چگونه است؟ (۱) مثبت (۲) منفی (۳) نامنفی (۴) نامثبت		
۴	دو تابع $f(x) = \sqrt{2-3x}$ و $g(x) = \frac{4}{2x-3}$ را در نظر بگیرید. در این صورت: الف) ضابطه تابع $g \circ f$ را بنویسید. ب) دامنه تابع $f \circ g$ را با استفاده از تعریف به دست آورید.		
	ادامه سوالات در صفحه بعد		

۱	نمودار تابع f در شکل روبه‌رو رسم شده است. به کمک آن، نمودار تابع $y = -2f(2x)$ را رسم کنید. 	۵
۱	ضابطه تابع وارون $f(x) = \frac{5-8x}{3}$ را بنویسید.	۶
۰/۷۵	دوره تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع $f(x) = 3 - 5 \cos 2x$ را محاسبه کنید.	۷
۱/۵	معادله $4 \cos^2 x = 4 \sin x + 1$ را حل کنید و جواب‌های کلی آن را بنویسید.	۸
۱	مقدار $\sin \frac{\pi}{8}$ را به دست آورید.	۹
۲	حدود زیر را محاسبه کنید. الف) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^3 + x^2 + 1}{x^2 - 1}$ ب) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2 - \sqrt{x+1}}{x-3}$ پ) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2 + x - 2}{1 + x - 5x^2}$	۱۰
۰/۵	در شکل روبه‌رو نمودار تابع f رسم شده است. همچنین نقاط A, B, C, D, E, F روی نمودار این تابع قرار دارند. مشخص کنید که: الف) در کدام یک از این نقاط $f(x) < 0$ و $f'(x) > 0$ است؟ ب) در کدام یک از این نقاط $f(x) > 0$ و $f'(x) < 0$ است؟ 	۱۱
	ادامه سوالات در صفحه بعد	

۱/۲۵	۱۲	مشتق پذیری تابع $f(x) = \begin{cases} x^3 - 1 & x \geq 1 \\ x^2 - 1 & x < 1 \end{cases}$ را با استفاده از تعریف مشتق در نقطه‌ای به طول ۱ بررسی کنید.
۲	۱۳	مشتق توابع زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست). الف) $f(x) = (\sqrt{2x+1})(x^3 - 5)$ ب) $g(x) = (2x^3 + \frac{1}{x})^5$
۱	۱۴	با ذکر دلیل مشخص کنید، تابع $f(x) = \sqrt[3]{x}$ در چه نقاطی مماس قائم دارد.
۱/۲۵	۱۵	تابع $f(x) = x^2 + 3x + 2$ را در نظر بگیرید. الف) آهنگ تغییر متوسط تابع f در بازه $[0, 3]$ را به دست آورید. ب) آهنگ تغییر لحظه‌ای تابع f در نقطه‌ای به طول ۲ را محاسبه کنید.
۲	۱۶	تابع $f(x) = -x^3 - 3x^2 + 9x + 10$ را در نظر بگیرید. الف) نقاط بحرانی تابع f را مشخص کنید. ب) با رسم جدول تغییرات، نقاط ماکزیمم و مینیمم نسبی تابع f را به دست آورید.
۱	۱۷	مجموع قطرهای یک لوزی برابر ۱۰ سانتی‌متر است. قطرهای این لوزی را طوری محاسبه کنید که مساحت آن ماکزیمم شود.
۲۰		موفق و پیروز باشید جمع نمره

۱. درستی یا نادرستی هر یک از جمله‌های زیر را مشخص کنید.

(۱/۲۵ نمره)

الف) اگر تابع $y = f(x)$ تابعی اکیداً یکنوا باشد، آن گاه تابع $y = |f(x)|$ همواره اکیداً یکنواست.

ب) تابع $y = \tan x$ تابعی متناوب با دوره تناوب π است.

پ) اگر $0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$ باشد، آن گاه $\sin \alpha < \tan \alpha$.

ت) بازه $(1, 8)$ ، یک همسایگی عدد $\frac{5}{7}$ است.

ث) اگر برد تابعی برابر با $\mathbb{R}$ باشد، آن گاه این تابع اکسترمم مطلق ندارد.

پاسخ

الف) نادرست (۰/۲۵ نمره) صفحه ۱۷

ب) درست (۰/۲۵ نمره) صفحه ۳۹

پ) درست (۰/۲۵ نمره) صفحه ۴۱

ت) نادرست (۰/۲۵ نمره) صفحه ۵۳

ث) درست (۰/۲۵ نمره) صفحه ۱۱۰

فیلم پاسخ



۲. جاهای خالی را با عدد یا عبارت مناسب کامل کنید. (۰/۷۵ نمره)
- الف) دامنه تابع $f(x)$ برابر با $(-2, 0)$ است. در این صورت دامنه تابع $y = |f(x)|$ برابر با است.
- ب) برد تابع $y = \tan x$ برابر با است.
- پ) تابع f یک چندجمله‌ای از درجه ۴ است. در این صورت $f \circ f'$ یک چندجمله‌ای از درجه است.

پاسخ

الف) $(-2, 0)$ (۰/۲۵ نمره) صفحه ۱۷ب) $\mathbb{R}$ (۰/۲۵ نمره) صفحه ۳۹

پ) ۱۲ (۰/۲۵ نمره) صفحه ۸۷

فیلم پاسخ



۳.

گزینه صحیح را انتخاب کنید. (۵/۰ نمره)

الف) دو تابع $f = \{(0, 1), (2, 3), (4, 5)\}$ و $g = \{(1, 4), (2, 5), (3, 3), (4, 1)\}$ را در نظر بگیرید. دامنه تابع $f \circ g$ کدام است؟(۱) $\{1\}$ (۲) $\{2\}$ (۳) $\{2, 4\}$ (۴) $\{3, 5\}$ ب) اگر تابع f در نقطه‌ای به طول $x = c$ دارای مینیمم نسبیباشد و مشتق راست داشته باشد، آن گاه همواره $f'_+(c)$ چگونه

است؟

(۱) مثبت

(۲) منفی

(۳) نامنفی

(۴) نامثبت

پاسخ

الف) گزینه ۱ یا $\{1\}$ (۲۵/۰ نمره) صفحه ۱۳

ب) گزینه ۳ یا نامنفی (۲۵/۰ نمره) صفحه ۱۰۵

فیلم پاسخ



۴. دو تابع $f(x) = \sqrt{2-3x}$ و $g(x) = \frac{4}{2x-3}$ را در نظر بگیرید.

در این صورت: (۱/۲۵ نمره)

الف) ضابطه تابع $g \circ f$ را بنویسید.

ب) دامنه تابع $f \circ g$ را با استفاده از تعریف به دست آورید.

پاسخ

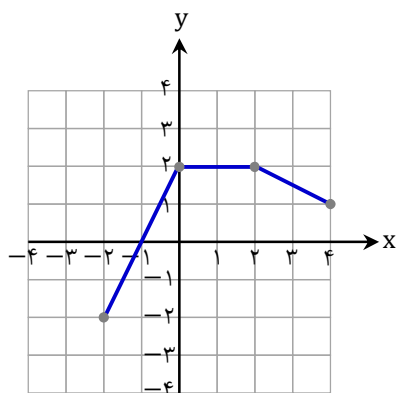
الف) $g \circ f(x) = \frac{4}{2\sqrt{2-3x}-3}$ (۵/۲۵ نمره) صفحه ۱۴
ب)

$$\begin{aligned} D_{f \circ g} &= \underbrace{\{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}}_{(۵/۲۵ \text{ نمره})} = \underbrace{\left\{x \in \mathbb{R} - \left\{\frac{3}{2}\right\} \mid \frac{4}{2x-3} \leq \frac{2}{3}\right\}}_{(۵/۲۵ \text{ نمره})} \\ &= \underbrace{\mathbb{R} - \left\{\frac{3}{2}\right\} \cap \left[\frac{9}{2}, +\infty\right)}_{(۵/۲۵ \text{ نمره})} = \left[\frac{9}{2}, +\infty\right) \end{aligned}$$

فیلم پاسخ



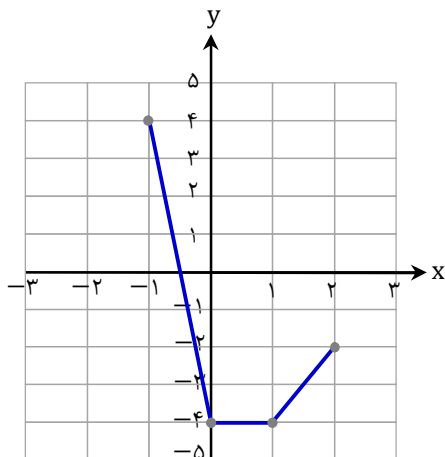
۵ نمودار تابع f در شکل زیر رسم شده است. به کمک آن، نمودار تابع $y = -2f(2x)$ را رسم کنید. (۱ نمره)



پاسخ

صفحه ۲۳

رسم صحیح شکل (۱ نمره)



توضیحات تکمیلی نمره گذاری:

۱: در صورتی که دامنه تابع به درستی ترسیم شده باشد، (۰/۲۵ نمره)
تعلق گیرد.

۲: در صورتی که برد تابع به درستی ترسیم شده باشد، (۰/۲۵ نمره)
تعلق گیرد.

فیلم پاسخ



۶ ضابطه تابع وارون $f(x) = \frac{5-8x}{3}$ را بنویسید. (۱ نمره)

پاسخ

روش اول: صفحه ۲۷

$$y = \frac{5-8x}{3} \Rightarrow \underbrace{3y = 5 - 8x}_{(25/5 \text{ نمره})} \Rightarrow \underbrace{3y - 5 = -8x}_{(25/5 \text{ نمره})}$$

$$\Rightarrow x = \frac{-3y+5}{8} \Rightarrow \underbrace{f^{-1}(x) = \frac{-3x+5}{8}}_{(25/5 \text{ نمره})}$$

روش دوم:

$$x = \frac{5-8y}{3} \Rightarrow \underbrace{3x = 5 - 8y}_{(25/5 \text{ نمره})} \Rightarrow \underbrace{y = \frac{-3x+5}{8}}_{(5/5 \text{ نمره})}$$

$$\Rightarrow \underbrace{f^{-1}(x) = \frac{-3x+5}{8}}_{(25/5 \text{ نمره})}$$

فیلم پاسخ



۷. دوره تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع $f(x) = 3 - 5 \cos 2x$ را محاسبه کنید. (۰/۷۵ نمره)

پاسخ

صفحه ۳۵

$T = \pi$ (۰/۲۵ نمره) $\text{Max} = 8$ (۰/۲۵ نمره) $\text{Min} = -2$ (۰/۲۵ نمره)

فیلم پاسخ



۸. معادله $4 \cos^2 x = 4 \sin x + 1$ را حل کنید و جواب‌های کلی آن را بنویسید. (۱/۵ نمره)

پاسخ

$$4 \cos^2 x = 4 \sin x + 1 \Rightarrow \underbrace{4(1 - \sin^2 x)}_{(۰/۲۵ \text{ نمره})} = 4 \sin x + 1$$

$$\Rightarrow \underbrace{4 \sin^2 x + 4 \sin x - 3}_{(۰/۲۵ \text{ نمره})} = 0$$

$$\begin{cases} \sin x = \frac{1}{2} \quad (۰/۲۵) \\ \sin x = -\frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow \sin x = \sin \frac{\pi}{6} \quad (۰/۲۵ \text{ نمره})$$

غقق

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \quad (۰/۲۵ \text{ نمره}) \\ x = (2k + 1)\pi - \frac{\pi}{6} \quad (۰/۲۵ \text{ نمره}) \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$$

صفحه ۴۵

فیلم پاسخ



۹. مقدار $\sin \frac{\pi}{8}$ را به دست آورید. (۱ نمره)

پاسخ

$$\cos \frac{\pi}{4} = \cos \left(2 \times \frac{\pi}{8} \right) \Rightarrow \underbrace{\cos \frac{\pi}{4} = 1 - 2 \sin^2 \frac{\pi}{8}}_{(۲۵/۵ \text{ نمره})}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\sin^2 \frac{\pi}{8} = \frac{1 - \sqrt{2}}{2}}_{(۵/۵ \text{ نمره})} \Rightarrow \underbrace{\sin \frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{1 - \sqrt{2}}{2}}}_{(۲۵/۵ \text{ نمره})}$$

صفحه ۴۸

فیلم پاسخ



۱۰. حدود زیر را محاسبه کنید. (۲ نمره)

الف) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^3 + x^2 + 1}{x^2 - 1}$

ب) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2 - \sqrt{x+1}}{x-3}$

پ) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2 + x - 2}{1 + x - 5x^2}$

پاسخ

$$\text{الف) } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^3 + x^2 + 1}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(2x^2 - x + 1)}{\underbrace{(x+1)(x-1)}}_{\text{(۲۵/۰ نمره)}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2 - x + 1}{x - 1} = \frac{-2}{\text{(۲۵/۰ نمره)}}$$

$$\text{ب) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2 - \sqrt{x+1}}{x-3} \times \frac{2 + \sqrt{x+1}}{2 + \sqrt{x+1}} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-(x-3)}{\underbrace{(x-3)(2 + \sqrt{x+1})}}_{\text{(۲۵/۰ نمره)}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-1}{2 + \sqrt{x+1}} = \frac{-1}{4} \quad \text{(۲۵/۰ نمره)}$$

الف و ب صفحه ۵۷

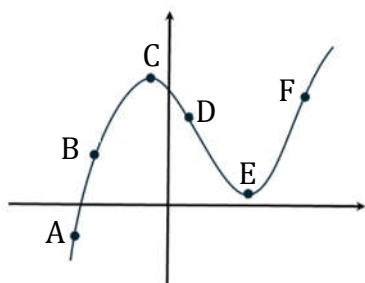
$$\text{پ) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2 + x - 2}{1 + x - 5x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2}{\underbrace{-5x^2}}_{\text{(۲۵/۰ نمره)}} = \frac{-3}{5} \quad \text{(۲۵/۰ نمره)}$$

ج صفحه ۶۴

فیلم پاسخ



۱۱. در شکل زیر نمودار تابع f رسم شده است. همچنین نقاط A ، B ، C ، D ، E و F روی نمودار این تابع قرار دارند. مشخص کنید که: (۵/۰ نمره)



- الف) در کدام یک از این نقاط $f'(x) > 0$ و $f(x) < 0$ است؟
 ب) در کدام یک از این نقاط $f'(x) < 0$ و $f(x) > 0$ است؟

پاسخ

الف) نقطه A (۲۵/۰ نمره)ب) نقطه D (۲۵/۰ نمره) صفحه ۷۱

فیلم پاسخ



۱۲. مشتق پذیری تابع $f(x) = \begin{cases} x^3 - 1 & x \geq 1 \\ x^2 - 1 & x < 1 \end{cases}$ را با استفاده از تعریف مشتق در نقطه‌ای به طول ۱ بررسی کنید. (۱/۲۵ نمره)

پاسخ

روش اول: صفحه ۷۹

$$\left\{ \begin{array}{l} \overbrace{f'_+(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x^3 - 1) - 0}{x - 1}}^{(0/25 \text{ نمره})} \\ = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-1)(x^2 + x + 1)}{x - 1} = 3 \quad (0/25 \text{ نمره}) \\ \overbrace{f'_-(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x^2 - 1) - 0}{x - 1}}^{(0/25 \text{ نمره})} \\ = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x-1)(x+1)}{x - 1} = 2 \quad (0/25 \text{ نمره}) \end{array} \right.$$

بنابراین تابع در $x = 1$ مشتق پذیر نیست. (۰/۲۵ نمره)

روش دوم:

$$\left\{ \begin{array}{l} \overbrace{f'_+(1) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{((1+h)^3 - 1) - 0}{h}}^{(0/25 \text{ نمره})} \\ = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{h(3 + 3h + h^2)}{h} = 3 \quad (0/25 \text{ نمره}) \\ \overbrace{f'_-(1) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{((1+h)^2 - 1) - 0}{h}}^{(0/25 \text{ نمره})} \\ = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{h(2 + h)}{h} = 2 \quad (0/25 \text{ نمره}) \end{array} \right.$$

بنابراین تابع در $x = 1$ مشتق پذیر نیست. (۰/۲۵ نمره)

فیلم پاسخ



۱۳. مشتق توابع زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست.) (۲ نمره)

الف) $f(x) = (\sqrt{2x+1})(x^3 - 5)$

ب) $g(x) = (2x^3 + \frac{1}{x})^5$

پاسخ

صفحه ۸۸

$$f'(x) = \underbrace{\left(\frac{2}{2\sqrt{2x+1}}\right)}_{(2/25 \text{ نمره})} \underbrace{(x^3 - 5)}_{(2/25 \text{ نمره})} + \underbrace{(\sqrt{2x+1})}_{(2/25 \text{ نمره})} \underbrace{(3x^2)}_{(2/25 \text{ نمره})}$$

$$g'(x) = \underbrace{5}_{(2/25 \text{ نمره})} \underbrace{\left(6x^2 - \frac{1}{x^2}\right)}_{(2/25 \text{ نمره})} \underbrace{\left(2x^3 + \frac{1}{x}\right)^4}_{(2/25 \text{ نمره})}$$

فیلم پاسخ



۱۴. با ذکر دلیل مشخص کنید، تابع $f(x) = \sqrt[3]{x}$ در چه نقاطی مماس قائم دارد. (۱ نمره)

پاسخ

تابع $f(x) = \sqrt[3]{x}$ در همه نقاط حقیقی ناصفر مشتق پذیر و $f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$ است (۰/۲۵ نمره) که در همه نقاط حقیقی ناصفر، مقدار مشتق عددی مثبت و حقیقی است. (۰/۲۵ نمره) از طرفی $f'_+(0) = f'_-(0) = +\infty$. بنابراین تابع در نقطه $x = 0$ مماس قائم دارد و خط $x = 0$ مماس قائم تابع است. (۰/۲۵ نمره)

صفحه ۹۱

فیلم پاسخ



۱۵. تابع $f(x) = x^2 + 3x + 2$ را در نظر بگیرید. (۱/۲۵ نمره)

الف) آهنگ تغییر متوسط تابع f در بازه $[0, 3]$ را به دست آورید.

ب) آهنگ تغییر لحظه‌ای تابع f در نقطه‌ای به طول ۲ را محاسبه کنید.

پاسخ

$$\text{الف)} = \frac{f(3) - f(0)}{3 - 0} = \frac{20 - 2}{3}$$

(۰/۲۵ نمره)

$$\text{آهنگ متوسط تغییر} = \frac{18}{3} = 6 \quad (۰/۲۵ \text{ نمره})$$

صفحه ۹۵

$$\text{ب)} f'(x) = 2x + 3 \quad (۰/۲۵ \text{ نمره}) \Rightarrow f'(2) = 7 \quad (۰/۵ \text{ نمره})$$

صفحه ۹۸

فیلم پاسخ



۱۶. تابع $f(x) = -x^3 - 3x^2 + 9x + 10$ را در نظر بگیرید.
(۲ نمره)

الف) نقاط بحرانی تابع f را مشخص کنید.

ب) با رسم جدول تغییرات، نقاط ماکزیمم و مینیمم نسبی تابع f را به دست آورید.

پاسخ

الف) صفحه ۱۰۶

$$f'(x) = -3x^2 - 6x + 9 \quad (۰/۲۵ \text{ نمره})$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow -3x^2 - 6x + 9 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 & (۰/۲۵ \text{ نمره}) \\ x = -3 & (۰/۲۵ \text{ نمره}) \end{cases}$$

ب) صفحه ۱۱۲

رسم صحیح جدول تغییرات (۰/۷۵ نمره)

نقطه $(-3, -17)$ مینیمم نسبی است. (۰/۲۵ نمره)

نقطه $(1, 15)$ ماکزیمم نسبی است. (۰/۲۵ نمره)

x	$-\infty$	-3		1	$+\infty$		
f'		$-$	0	$+$	0	$-$	
f	$+\infty$	$\searrow$	-17	$\nearrow$	15	$\searrow$	$-\infty$
			Min نسبی		Max نسبی		

توضیحات نمره گذاری: در صورتی که نقاط ماکزیمم و مینیمم نسبی به درستی در جدول تغییرات مشخص گردد، نمره به تناسب تعلق گیرد.

فیلم پاسخ



۱۷. مجموع قطرهای یک لوزی برابر ۱۰ سانتی متر است. قطرهای این لوزی را طوری محاسبه کنید که مساحت آن ماکزیمم شود. (۱ نمره)

پاسخ

یکی از قطرهای لوزی را x و دیگری را y می نامیم. صفحه ۱۲۰

$$x + y = 10$$

$$\Rightarrow y = 10 - x, s(x) = \frac{xy}{2} = \frac{x(10-x)}{2} \quad (0/25 \text{ نمره})$$

$$s'(x) = 5 - x \quad (0/25 \text{ نمره}) \xrightarrow{s'(x)=0} x = 5$$

$$\Rightarrow y = 5 \quad (0/25 \text{ نمره})$$

فیلم پاسخ

