



آزمون شبه‌نهایی

درس: ریاضیات گسسته	رشته: ریاضی و فیزیک	مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه
پایه: دوازدهم دوره دوم متوسطه نظری	ساعت شروع: ۸ صبح	تاریخ امتحان: ۱۴۰۵/۰۲/۱۶

جهت دسترسی به فایل هر کیوآرکد، آن‌ها را انتخاب یا اسکن کنید.



پاسخ‌نمای تشریحی
فعال‌سازی ساعت ۲۰



پاسخبرگ آزمون
فعال



راهنمای تصحیح
جهت آشنایی دانش‌آموزان با بارم‌بندی
فعال‌سازی ساعت ۲۰

باسمه تعالی

سؤالات آزمون شبه نهایی درس : ریاضیات گسسته	رشته : ریاضی و فیزیک	مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه	تعداد صفحه: ۳
پایه دوازدهم دوره دوم متوسطه نظری	ساعت شروع : ۸ صبح	تاریخ امتحان: ۱۴۰۵/۰۲/۱۶	نام و نام خانوادگی:
ردیف	سؤالات (استفاده از ماشین حساب ساده مجاز است).		
	نمره		

۱	درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را مشخص کنید. الف) مجموع هر دو عدد گنگ، عددی گنگ است. ب) اگر $a b$ و $c d$، آنگاه $a + c b + d$. ج) در مربع لاتین A از مرتبه ۴ جای دو سطر را عوض می‌کنیم تا مربع لاتین B حاصل شود. در این صورت، دو مربع A و B متعامد نیستند. د) مربع لاتین مرتبه ۶ نداریم.	
۲	جاهای خالی را کامل کنید. الف) اگر $a b$ آنگاه $[a, b]$ برابر با است. ب) درجه هر رأس گراف C_n برابر با است. ج) اندازه گراف P_n برابر با است. د) مجموع درایه‌های مربع لاتین مرتبه ۳ برابر با است.	
۳	اگر a, b, c سه عدد حقیقی باشند، نشان دهید $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + ac + bc$.	۱/۵
۴	برای عدد صحیح و فرد a داریم $a + 2 b$. باقیمانده تقسیم عدد $a^2 + b^2 + 3$ بر ۸ را بیابید.	۱/۵
۵	فرض کنید a عددی طبیعی است و برای هر عدد طبیعی n داریم $a 6n + 14$ و $a 4n + 9$. مقدار a را بیابید.	۱
۶	عبارات هم‌نهشتی $a \equiv b$ و $b \equiv c$ را در نظر بگیرید. ثابت کنید $a \equiv c$.	۱
	ادامه سؤالات در صفحه بعد	

۷	تمام اعداد طبیعی کمتر از ۲۰ را بیابید که ۴ برابر آنها منهای ۲۳۲، بر ۶ بخش پذیر باشند. (محاسبات نوشته شود)	۱/۵																																																	
۸	۲۹ دی ماه یک سال، روز سه شنبه است. ۳ تیر همان سال چند شنبه است؟ (محاسبات نوشته شود)	۰/۷۵																																																	
۹	۱۱ نفر در یک مهمانی شرکت می کنند. به علت زیادی مهمانان، هر فرد به برخی از مهمانان دست می دهد. آیا امکان دارد هر فرد فقط به ۷ نفر دست بدهد؟ چرا؟	۱																																																	
۱۰	نشان دهید، تعداد رئوس فرد در هر گراف، عددی زوج است.	۱																																																	
۱۱	گراف G روبرو را در نظر بگیرید. الف) $N_G[a]$ را بنویسید. ب) اندازه گراف مکمل را محاسبه کنید. پ) مسیری به طول ۴ معرفی کنید.	۱/۲۵																																																	
۱۲	فاصله هر دو روستا از شش روستای a, b, c, d, f, g بر حسب کیلومتر در جدول زیر آمده است. می خواهیم در برخی از روستاها مرکز بهداشت بسازیم به طوریکه هر فرد از این روستاها، برای رسیدن به یک مرکز بهداشت، مسافت بیش از ۲۰ کیلومتر طی نکند. با رسم گراف مناسب و ارائه دلیل، تعیین کنید حداقل چند مرکز بهداشت باید ساخته شود؟ در کدام یک از روستاها؟ <table><tr><td></td><td>a</td><td>b</td><td>c</td><td>d</td><td>f</td><td>g</td></tr><tr><td>a</td><td>۰</td><td>۱۲</td><td>۱۷</td><td>۵</td><td>۱۵</td><td>۲۵</td></tr><tr><td>b</td><td>۱۲</td><td>۰</td><td>۳۵</td><td>۱۰</td><td>۲۸</td><td>۴۰</td></tr><tr><td>c</td><td>۱۷</td><td>۳۵</td><td>۰</td><td>۳۰</td><td>۵۵</td><td>۲۶</td></tr><tr><td>d</td><td>۵</td><td>۱۰</td><td>۳۰</td><td>۰</td><td>۲۹</td><td>۳۳</td></tr><tr><td>f</td><td>۱۵</td><td>۲۸</td><td>۵۵</td><td>۲۹</td><td>۰</td><td>۱۷</td></tr><tr><td>g</td><td>۲۵</td><td>۴۰</td><td>۲۶</td><td>۳۳</td><td>۱۷</td><td>۰</td></tr></table>		a	b	c	d	f	g	a	۰	۱۲	۱۷	۵	۱۵	۲۵	b	۱۲	۰	۳۵	۱۰	۲۸	۴۰	c	۱۷	۳۵	۰	۳۰	۵۵	۲۶	d	۵	۱۰	۳۰	۰	۲۹	۳۳	f	۱۵	۲۸	۵۵	۲۹	۰	۱۷	g	۲۵	۴۰	۲۶	۳۳	۱۷	۰	۲
	a	b	c	d	f	g																																													
a	۰	۱۲	۱۷	۵	۱۵	۲۵																																													
b	۱۲	۰	۳۵	۱۰	۲۸	۴۰																																													
c	۱۷	۳۵	۰	۳۰	۵۵	۲۶																																													
d	۵	۱۰	۳۰	۰	۲۹	۳۳																																													
f	۱۵	۲۸	۵۵	۲۹	۰	۱۷																																													
g	۲۵	۴۰	۲۶	۳۳	۱۷	۰																																													
	ادامه سؤالات در صفحه بعد																																																		

۱	۱۳	یک گراف همبند از مرتبه ۸ رسم کنید که یک مجموعه احاطه گر مینیمم یکتا با اندازه ۲ داشته باشد. همچنین ۷- مجموعه آن را مشخص کنید.
۱	۱۴	به چند طریق می توان از یک کلاس ۱۰ نفره، ۵ نفر را برای تیم فوتبال، ۳ نفر را برای تیم والیبال و ۲ نفر را برای تیم بسکتبال انتخاب کرد؟ جواب نهایی را محاسبه کنید.
۲	۱۵	تعداد جواب های صحیح معادله $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 16$ با شرط $x_i > 1$ $1 \leq i \leq 4$ را بیابید.
۱/۵	۱۶	در یک مسابقه اتومبیل رانی قرار است ۳ راننده در ۳ روز اول هفته با ۳ ماشین مختلف در ۳ مسیر مختلف مسابقه دهند به طوری که شرایط زیر برقرار باشد: الف) هر راننده هر روز با یک ماشین در یک مسیر رانندگی کند؛ ب) هر راننده با هر ماشین دقیقاً یک روز رانندگی کند؛ پ) هر راننده هر روز دقیقاً در یک مسیر رانندگی کند؛ ت) هر ماشین در هر مسیر دقیقاً یک بار به کار گرفته شود؛ ث) راننده شماره ۲ در روز دوشنبه با ماشین شماره ۱ در مسیر شماره ۳ رانندگی کند. برای این منظور یک برنامه ریزی انجام دهید.
۲۰		موفق و پیروز باشید جمع نمره

۱. درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را مشخص کنید. (۱ نمره)
- الف) مجموع هر دو عدد گنگ، عددی گنگ است.
- ب) اگر $a|b$ و $c|d$ ، آنگاه $a + c|b + d$.
- ج) در مربع لاتین A از مرتبه ۴ جای دو سطر را عوض می‌کنیم تا مربع لاتین B حاصل شود. در این صورت، دو مربع A و B متعامد نیستند.
- د) مربع لاتین مرتبه ۶ نداریم.

پاسخ

الف) نادرست (۰/۲۵ نمره)

ب) نادرست (۰/۲۵ نمره)

ج) درست (۰/۲۵ نمره)

د) نادرست (۰/۲۵ نمره)

فیلم پاسخ



۲.

جاهای خالی را کامل کنید. (۱ نمره)

الف) اگر $a|b$ آنگاه $[a, b]$ برابر با است.ب) درجه هر رأس گراف C_n برابر با است.ج) اندازه گراف P_n برابر با است.

د) مجموع درایه‌های مربع لاتین مرتبه ۳ برابر با است.

پاسخ

الف) $|b|$ (۰/۲۵ نمره)

ب) ۲ (۰/۲۵ نمره)

ج) ۴ (۰/۲۵ نمره)

د) ۱۸ (۰/۲۵ نمره)

فیلم پاسخ



۳. اگر a, b, c سه عدد حقیقی باشند، نشان دهید (۱/۵ نمره)

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + ac + bc$$

پاسخ

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + ac + bc$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{2a^2 + 2b^2 + 2c^2 \geq 2ab + 2ac + 2bc}_{(۰/۲۵ \text{ نمره})}$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{a^2 + a^2 + b^2 + b^2 + c^2 + c^2 \geq 2ab + 2ac + 2bc}_{(۰/۲۵ \text{ نمره})}$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{(a^2 - 2ab + b^2) + (b^2 - 2bc + c^2) + (c^2 - 2ac + a^2)}_{(۰/۲۵ \text{ نمره})} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{(a - b)^2 + (b - c)^2 + (a - c)^2}_{(۰/۲۵ \text{ نمره})} \geq 0$$

عبارت همواره درست (۰/۲۵ نمره)

استفاده از نماد $\Leftrightarrow$ (۰/۲۵ نمره)

فیلم پاسخ



۴. برای عدد صحیح و فرد a داریم $a + 2 \mid b$. باقیمانده تقسیم عدد $a^2 + b^2 + 3$ بر ۸ را بیابید. (۱/۵ نمره)

پاسخ

a عددی فرد است پس $a + 2$ نیز فرد است. (۲/۲۵ نمره) چون $a + 2 \mid b$ ، عدد b نیز فرد است. (۲/۲۵ نمره) پس:

$$\left. \begin{array}{l} \overbrace{a^2 = 8q + 1}^{(۲/۲۵ \text{ نمره})} \\ \overbrace{b^2 = 8k + 1}^{(۲/۲۵ \text{ نمره})} \end{array} \right\} \Rightarrow \underbrace{a^2 + b^2 + 3 = 8q + 8k + 5}_{(۲/۲۵ \text{ نمره})} = 8q' + 5$$

$$\Rightarrow \underbrace{r = 5}_{(۲/۲۵ \text{ نمره})}$$

فیلم پاسخ



فرض کنید a عددی طبیعی است و برای هر عدد طبیعی n داریم $a|4n + 9$ و $a|6n + 14$. مقدار a را بیابید. (۱ نمره)

پاسخ

$$\left. \begin{array}{l} a|4n + 9 \Rightarrow \overbrace{a|12n + 27}^{(نمره \ ۰/۲۵)} \\ a|6n + 14 \Rightarrow \overbrace{a|12n + 28}^{(نمره \ ۰/۲۵)} \end{array} \right\} \Rightarrow \underbrace{a|1}_{(نمره \ ۰/۲۵)} \Rightarrow \underbrace{a=1}_{(نمره \ ۰/۲۵)}$$

فیلم پاسخ



۶ عبارات هم‌نهستی $a \equiv b^m$ و $b \equiv c^m$ را در نظر بگیرید. ثابت کنید $a \equiv c^m$. (۱ نمره)

پاسخ

$$\left. \begin{array}{l} a \equiv b^m \Rightarrow \overbrace{m|b-a}^{(نمره ۰/۲۵)} \\ b \equiv c^m \Rightarrow \overbrace{m|c-b}^{(نمره ۰/۲۵)} \end{array} \right\} \Rightarrow \underbrace{m|c-a}_{(نمره ۰/۲۵)} \Rightarrow \underbrace{a \equiv c^m}_{(نمره ۰/۲۵)}$$

فیلم پاسخ



۷. تمام اعداد طبیعی کمتر از ۲۰ را بیابید که ۴ برابر آنها منهای ۲۳۲، بر ۶ بخش پذیر باشند. (محاسبات نوشته شود) (۱/۵ نمره)

پاسخ

عدد طبیعی را X در نظر می گیریم. پس:

$$\begin{aligned}
 & \underbrace{4X - 232 \equiv 0}_{(0/25 \text{ نمره})} \Rightarrow 4X \equiv 232 \xrightarrow{(4,6)=2} X \equiv 58 \equiv 1 \pmod{6} \quad \begin{matrix} \uparrow & \uparrow \\ (0/25 \text{ نمره}) & (0/25 \text{ نمره}) \end{matrix} \\
 & \Rightarrow \underbrace{X = 3k + 1}_{(0/25 \text{ نمره})} \Rightarrow \underbrace{X = 1, 4, 7, 10, 13, 16, 19}_{(0/25 \text{ نمره})}
 \end{aligned}$$

فیلم پاسخ



۸. ۲۹ دی ماه یک سال، روز سه شنبه است. ۳ تیر همان سال چندشنبه است؟ (محاسبات نوشته شود) (۰/۷۵ نمره)

پاسخ

تیر	مرداد	شهریور	مهر	آبان	آذر	دی
۲۸	۳۱	۳۱	۳۰	۳۰	۳۰	۲۹

$$\underbrace{۲۹ + ۳(۳۰) + ۲(۳۱) + ۲۸}_{(۰/۵ \text{ نمره})} \equiv ۶ \Rightarrow \text{روز به عقب ۶}$$

$\Rightarrow$ (۰/۲۵ نمره) چهارشنبه

فیلم پاسخ



۹. ۱۱ نفر در یک مهمانی شرکت می‌کنند. به علت زیادی مهمانان، هر فرد به برخی از مهمانان دست می‌دهد. آیا امکان دارد هر فرد فقط به ۷ نفر دست بدهد؟ چرا؟ (۱ نمره)

پاسخ

خیر (۰/۲۵ نمره)

زیرا اگر مهمانان را رئوس گراف و دست دادن هر دو نفر را یک یال در نظر بگیریم، باید یک گراف ۷ منتظم از مرتبه ۱۱ داشته باشیم. (۰/۲۵ نمره) در این صورت $q = \frac{7 \times 11}{2} = 38/5$ (۰/۲۵ نمره) که امکان‌پذیر نیست. (۰/۲۵ نمره)

فیلم پاسخ



۱۰. نشان دهید، تعداد رئوس فرد در هر گراف، عددی زوج است.
(۱ نمره)

پاسخ

مجموع درجات رئوس زوج گراف را a و مجموع درجات رئوس فرد گراف را b می‌نامیم. پس a زوج است (۰/۲۵ نمره) و داریم:

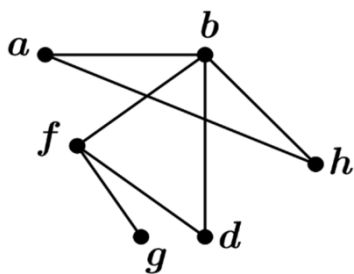
$$\underbrace{a + b}_{(۰/۲۵ \text{ نمره})} = 2q \Rightarrow b = 2q - a \quad (۰/۲۵ \text{ نمره}) \text{ زوج}$$

بنابراین مجموع تعدادی عدد فرد، زوج شده است. لذا باید آن تعداد، عددی زوج باشد. یعنی تعداد رئوس فرد در هر گراف، عددی زوج است. (۰/۲۵ نمره)

فیلم پاسخ



۱۱. گراف G زیر را در نظر بگیرید. (۱/۲۵ نمره)



الف) $N_G[a]$ را بنویسید.

ب) اندازه گراف مکمل را محاسبه کنید.

پ) مسیری به طول ۴ معرفی کنید.

پاسخ

الف) $\{a, b, h\}$ (۵/۲۵ نمره)

ب)

$$q = \underbrace{\frac{p(p-1)}{2}}_{(۵/۲۵ \text{ نمره})} = \frac{6 \times 5}{2} = ۱۵ \Rightarrow \underbrace{q_{\bar{G}} = ۱۵ - ۷}_{(۲۵/۵ \text{ نمره})} = ۸$$

ج) $gfbha$ یا مسیرهای دیگر به طول (۲۵/۵ نمره)

فیلم پاسخ

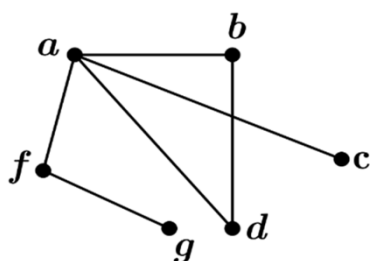


۱۲. فاصله هر دو روستا از شش روستای a, b, c, d, f, g بر حسب کیلومتر در جدول زیر آمده است. می‌خواهیم در برخی از روستاها مرکز بهداشت بسازیم به طوری که هر فرد از این روستاها، برای رسیدن به یک مرکز بهداشت، مسافت بیش از ۲۰ کیلومتر طی نکند. با رسم گراف مناسب و ارائه دلیل، تعیین کنید حداقل چند مرکز بهداشت باید ساخته شود؟ در کدام یک از روستاها؟ (۲ نمره)

	a	b	c	d	f	g
a	۰	۱۲	۱۷	۵	۱۵	۲۵
b	۱۲	۰	۳۵	۱۰	۲۸	۴۰
c	۱۷	۳۵	۰	۳۰	۵۵	۲۶
d	۵	۱۰	۳۰	۰	۲۹	۳۳
f	۱۵	۲۸	۵۵	۲۹	۰	۱۷
g	۲۵	۴۰	۲۶	۳۳	۱۷	۰

پاسخ

هر یک از روستاها را یک رأس در نظر می‌گیریم و هر دو روستا که فاصله آنها حداکثر ۲۰ کیلومتر است را با یک یال به هم وصل می‌کنیم تا گراف زیر حاصل شود. (۰/۷۵ نمره)



مجموعه $\{a, g\}$ (یا $\{a, f\}$) یک مجموعه احاطه‌گر مینیمم است. (۰/۲۵ نمره) زیرا گراف را احاطه می‌کند و:

$$\gamma(G) \geq \left\lceil \frac{n}{\Delta+1} \right\rceil = \left\lceil \frac{6}{4+1} \right\rceil = 2 \quad (۰/۵ نمره)$$

پس $\gamma(G) = 2$ (۰/۲۵ نمره) لذا باید حداقل در دو روستای a, g (یا a, f) مرکز بهداشت احداث کرد. (۰/۲۵ نمره)

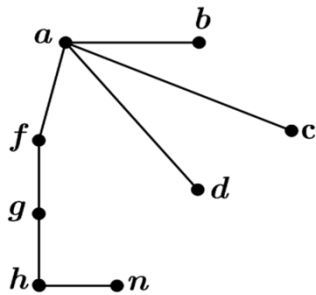
فیلم پاسخ



۱۳. یک گراف همبند از مرتبه ۸ رسم کنید که یک مجموعه احاطه گر مینیمم یکتا با اندازه ۲ داشته باشد. همچنین ۷- مجموعه آن را مشخص کنید. (۱ نمره)

پاسخ

برای گراف همبند زیر، $\{a, h\}$ یک مجموعه احاطه گر مینیمم یکتا با اندازه ۲ است. (۰/۲۵ نمره)



بارم (۰/۷۵ نمره)

فیلم پاسخ



۱۴. به چند طریق می‌توان از یک کلاس ۱۰ نفره، ۵ نفر را برای تیم فوتبال، ۳ نفر را برای تیم والیبال و ۲ نفر را برای تیم بسکتبال انتخاب کرد؟ جواب نهایی را محاسبه کنید. (۱ نمره)

پاسخ

$$\underbrace{\binom{10}{5} \times \binom{5}{3}}_{(نمره \circ / ۷۵)} = \underbrace{۲۵۲۰}_{(نمره \circ / ۲۵)} \text{ یا } \underbrace{\frac{۱۰!}{۵! \times ۳! \times ۲!}}_{(نمره \circ / ۷۵)} = \underbrace{۲۵۲۰}_{(نمره \circ / ۲۵)}$$

فیلم پاسخ



۱۵. تعداد جواب‌های صحیح معادله $x_1 + x_2^2 + x_3 + x_4 = 16$ با شرط $x_i > 1$ را بیابید. (۲ نمره)

پاسخ

$$x_1 + x_2^2 + x_3 + x_4 = 16 \xrightarrow{x_1, x_3, x_4 \geq 2} x_1 + x_2^2 + x_3 + x_4 = 16 - 2 - 2 - 2 = 10$$

(۲۵/۰ نمره)

$$x_2 = 2 \Rightarrow x_1 + x_3 + x_4 = 10 - 4 = 6$$

(۲۵/۰ نمره)

$$\Rightarrow \binom{n+k-1}{k-1} = \binom{6+3-1}{3-1} = \binom{8}{2} = 28$$

(۲۵/۰ نمره) (۲۵/۰ نمره)

$$x_2 = 3 \Rightarrow x_1 + x_3 + x_4 = 10 - 9 = 1$$

(۲۵/۰ نمره)

$$\Rightarrow \binom{n+k-1}{k-1} = \binom{1+3-1}{3-1} = \binom{3}{2} = 3$$

(۲۵/۰ نمره) (۲۵/۰ نمره)

$$28 + 3 = 31 = \text{تعداد جواب (۲۵/۰ نمره)}$$

فیلم پاسخ



۱۶. در یک مسابقه اتومبیل رانی قرار است ۳ راننده در ۳ روز اول هفته با ۳ ماشین مختلف در ۳ مسیر مختلف مسابقه دهند به طوری که شرایط زیر برقرار باشد: (۱/۵ نمره)

(الف) هر راننده هر روز با یک ماشین در یک مسیر رانندگی کند؛
 (ب) هر راننده با هر ماشین دقیقاً یک روز رانندگی کند؛
 (پ) هر راننده هر روز دقیقاً در یک مسیر رانندگی کند؛
 (ت) هر ماشین در هر مسیر دقیقاً یک بار به کار گرفته شود؛
 (ث) راننده شماره ۲ در روز دوشنبه با ماشین شماره ۱ در مسیر شماره ۳ رانندگی کند.

برای این منظور یک برنامه ریزی انجام دهید.

راننده‌ها را D_1, D_2, D_3 در نظر می‌گیریم.

	ماشین‌ها		
روزها	D_1	D_2	D_3
شنبه	۱	۲	۳
یکشنبه	۲	۳	۱
دوشنبه	۳	۱	۲

A
(۰/۲۵ نمره)

	مسیرها		
روزها	D_1	D_2	D_3
شنبه	۲	۱	۳
یکشنبه	۳	۲	۱
دوشنبه	۱	۳	۲

B
(۰/۲۵ نمره)

	ماشین و مسیرها		
روزها	D_1	D_2	D_3
شنبه	۱۲	۲۱	۳۳

فیلم پاسخ



یکشنبه	۲۳	۳۲	۱۱
دوشنبه	۱۳	۳۱	۲۲

AB

(۰/۲۵ نمره)

عدد ۲۳ در مربع AB به این معناست که راننده شماره ۱ در روز یکشنبه با ماشین شماره ۲ در مسیر شماره ۳ رانندگی می کند. (۰/۲۵ نمره)

متعامد بودن دو مربع لاتین A و B (۰/۲۵ نمره) توجه به جایگاه عدد ۱۳ (۰/۲۵ نمره)