

آزمون شبه‌نهایی

درس: حسابان ۲	رشته : ریاضی و فیزیک	مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه
پایه: دوازدهم دوره دوم متوسطه نظری	ساعت شروع : ۸ صبح	تاریخ امتحان: ۱۴۰۵/۰۲/۱۰

جهت دسترسی به فایل هر کیوآرکد، آن‌ها را انتخاب یا اسکن کنید.



پاسخ‌نمای تشریحی
فعال‌سازی ساعت ۲۰



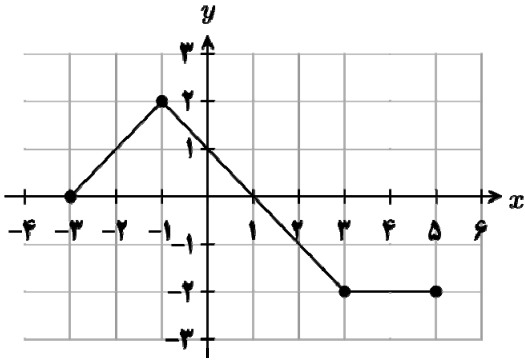
پاسخبرگ آزمون
فعال

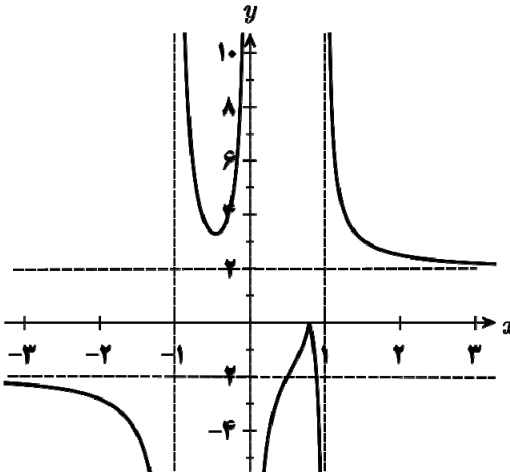


راهنمای تصحیح
جهت آشنایی دانش‌آموزان با بارم‌بندی
فعال‌سازی ساعت ۲۰

باسمه تعالی

سؤالات آزمون شبه نهایی درس : حسابان ۲	رشته : ریاضی و فیزیک	مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه	تعداد صفحه: ۳
پایه دوازدهم دوره دوم متوسطه نظری	ساعت شروع : ۸ صبح	تاریخ امتحان: ۱۴۰۵/۰۲/۱۰	نام و نام خانوادگی:
ردیف	سؤالات (استفاده از ماشین حساب ساده مجاز است).		
	نمره		

۱	درستی یا نادرستی جمله های زیر را مشخص کنید. الف) نمودار تابع $y = x^2$ در بازه $(0, 1)$ زیر نمودار تابع $y = x^3$ است. ب) عبارت $x^8 + y^8$ بر عبارت $x - y$ بخش پذیر است. ج) تابع $f(x) = 3$ یک مجانب افقی دارد. د) اگر برای تابع f داشته باشیم $f'(a) = 0$، آنگاه a نقطه اکسترمم نسبی تابع است.	۱
۲	جاهای خالی را با توجه به عبارت های داخل کمانک کامل کنید. الف) معادله $\cos x = 0$ در بازه $[0, 2\pi]$ دارای جواب است. (یک - دو - سه - چهار) ب) یک تابع می تواند مجانب قائم داشته باشد. (حداقل ۲ - حداکثر ۲ - بی شمار) ج) تابع $f(x) = [x]$ در بازه $(0, 2)$ دارای نقطه ماکسیمم نسبی است. (صفر - یک - دو - بی شمار) ([] نماد جزء صحیح است) د) تابع $f(x) = x$ در بازه $[-1, 1]$ دارای نقطه بحرانی است. (صفر - یک - دو - سه)	۲
۳	نمودار تابع $y = f(x)$ در زیر رسم شده است. نمودار تابع $y = 1 - f(1 - 2x)$ را رسم کنید. 	۳
۱/۲۵	اگر $\log_{0.3}(2x - 1) \leq \log_{0.3}(2 - x)$ حدود x را بیابید.	۴
۱/۲۵	مقادیر a, b را چنان بیابید که چندجمله ای $2x^3 - ax + b$ بر عبارت $1 - x$ بخش پذیر باشد و باقی مانده تقسیم آن بر عبارت $x + 2$ برابر ۹- باشد.	۵
	ادامه سؤالات در صفحه بعد	

۰/۷۵	چند مثلث به مساحت ۳ سانتی متر مربع داریم که طول دو ضلع آن ۵ و ۷ سانتی متر باشد؟ چرا؟	۶
۱/۵	توابع $y = \sqrt{x}$ و $y = \cos x - \sin x$ را در نظر بگیرید. با تشکیل یک معادله مثلثاتی و حل آن، تعیین کنید این دو تابع در بازه $[0, 2\pi]$ چند نقطه برخورد دارند؟ طول نقطه یا نقاط برخورد را به دست آورید.	۷
۱/۲۵	قسمتی از نمودار تابع $y = a \sin(bx) + c$ در زیر رسم شده است. با انجام محاسبات، مقادیر a, b, c را به دست آورید. ($b > 0$)	۸
۱	نمودار تابع $y = f(x)$ به صورت زیر است. موارد خواسته شده را بنویسید.  الف) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ب) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ ج) $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ د) $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x)$	۹
۱/۲۵	نمودار تابع $f(x) = \frac{2x^2 - x - 6}{x^2 - 4x + 4}$ را در اطراف مجانب قائم آن رسم کنید.	۱۰
	"ادامه سؤالات در صفحه بعد"	

۱/۲۵	الف) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1-2x}{\sqrt{x^2-1}}$ ب) $\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{4}} \frac{[x]}{\tan x}$	۱۱
۱/۲۵	قضیه: اگر تابع f در نقطه a مشتق پذیر باشد، در این نقطه پیوسته است.	۱۲
۱/۵	مشتق توابع زیر را به دست آورید: (ساده کردن مشتق لازم نیست) الف) $f(x) = \frac{\sqrt[3]{x}+6}{2x^2-x-1}$ ب) $f(x) = x^2 \cdot \sin^3 x$	۱۳
۱/۲۵	مشتق پذیری تابع $f(x) = \begin{cases} 2x-1 & x < -1 \\ x^2-4 & x \geq -1 \end{cases}$ را در نقطه ای به طول ۱- بررسی کنید.	۱۴
۱	معادله حرکت یک متحرک بر حسب ثانیه به صورت $f(t) = t^2 - 5t + 7$ است. در چه لحظه ای سرعت متوسط این متحرک در بازه زمانی $[1, 3]$ با سرعت لحظه ای برابر می شود؟	۱۵
۱/۲۵	مقادیر اکستریم مطلق تابع $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$ را در بازه $[-2, 2]$ بیابید.	۱۶
۱/۲۵	مقادیر a, b را چنان بیابید که نقطه $(-1, 2)$ اکستریم نسبی تابع $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 5$ باشد.	۱۷
۲۰	موفق و پیروز باشید	جمع نمره

۱. درستی یا نادرستی جمله های زیر را مشخص کنید. (۱ نمره)
- الف) نمودار تابع $y = x^2$ در بازه $(0, 1)$ زیر نمودار تابع $y = x^3$ است.
- ب) عبارت $x^8 + y^8$ بر عبارت $x - y$ بخش پذیر است.
- ج) تابع $f(x) = 3$ یک مجانب افقی دارد.
- د) اگر برای تابع f داشته باشیم $f'(a) = 0$ ، آنگاه a نقطه اکسترمم نسبی تابع است.

پاسخ

نادرست (۰/۲۵ نمره)

ب) نادرست (۰/۲۵ نمره)

ج) درست (۰/۲۵ نمره)

د) نادرست (۰/۲۵ نمره)

فیلم پاسخ



۲. جاهای خالی را با توجه به عبارت های داخل کمانک کامل کنید.
- (۱ نمره)
- الف) معادله $\cos x = 0$ در بازه $[0, 2\pi]$ دارای جواب است. (یک - دو - سه - چهار)
- ب) یک تابع می تواند مجانب قائم داشته باشد. (حداقل ۲ - حداکثر ۲ - بی شمار)
- ج) تابع $f(x) = [x]$ در بازه $(0, 2)$ دارای نقطهٔ ماکسیمم نسبی است. (صفر - یک - دو - بی شمار) ([] نماد جزء صحیح است)
- د) تابع $f(x) = |x|$ در بازه $[-1, 1]$ دارای نقطهٔ بحرانی است. (صفر - یک - دو - سه)

پاسخ

الف) دو (۰/۲۵ نمره)

ب) بی شمار (۰/۲۵ نمره)

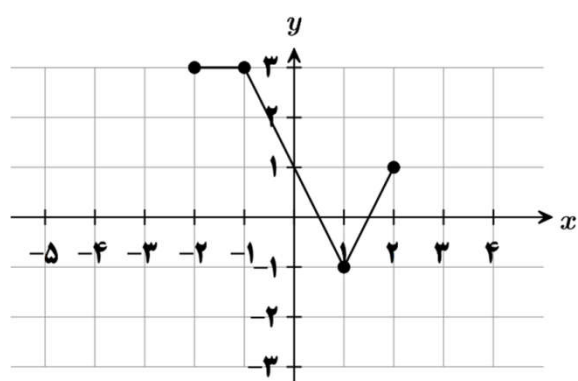
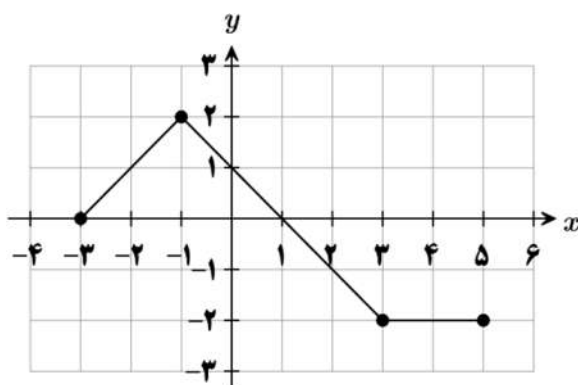
ج) بی شمار (۰/۲۵ نمره)

د) سه (۰/۲۵ نمره)

فیلم پاسخ



۳ نمودار تابع $y = f(x)$ در زیر رسم شده است. نمودار تابع $y = 1 - f(1 - 2x)$ را رسم کنید. (۱ نمره)



x	۲	۱	-۱	-۲
	-۳	-۱	۳	۵
y	۰	۲	-۲	-۲
	۱	-۱	۳	۳

هر نقطه درست شکل (۰/۲۵ نمره)

پاسخ

فیلم پاسخ



۴. اگر $\log_{\frac{1}{3}}(2x - 1) \leq \log_{\frac{1}{3}}(2 - x)$ حدود x را بیابید.
(۱/۲۵ نمره)

پاسخ

تابع $y = \log_{\frac{1}{3}} x$ اکیداً نزولی است. پس

$$\left. \begin{aligned} \log_{\frac{1}{3}}(2x - 1) \leq \log_{\frac{1}{3}}(2 - x) &\Rightarrow 2x - 1 \geq 2 - x \Rightarrow \underbrace{x \geq 1}_{(0/5 \text{ نمره})} \quad (1) \\ 2x - 1 > 0 &\Rightarrow \underbrace{x > \frac{1}{2}}_{(0/25 \text{ نمره})} \quad (2) \\ 2 - x > 0 &\Rightarrow \underbrace{x < 2}_{(0/25 \text{ نمره})} \quad (3) \end{aligned} \right\}$$

$$\xrightarrow{(1) \cap (2) \cap (3)} \underbrace{1 \leq x < 2}_{(0/25 \text{ نمره})}$$

فیلم پاسخ



مقادیر a, b را چنان بیابید که چندجمله‌ای $2x^3 - ax + b$ بر عبارت $1 - x$ بخش پذیر باشد و باقی مانده تقسیم آن بر عبارت $x + 2$ برابر -9 باشد. (۱/۲۵ نمره)

پاسخ

$$\left. \begin{aligned} 1 - x = 0 &\Rightarrow \underbrace{x = 1}_{(0/25 \text{ نمره})} \Rightarrow \underbrace{2(1)^3 - a(1) + b = 0}_{(0/25 \text{ نمره})} \\ x + 2 = 0 &\Rightarrow \underbrace{x = -2}_{(0/25 \text{ نمره})} \Rightarrow \underbrace{2(-2)^3 - a(-2) + b = -9}_{(0/25 \text{ نمره})} \end{aligned} \right\}$$

$$\Rightarrow \underbrace{a = 3, b = 1}_{(0/25 \text{ نمره})}$$

فیلم پاسخ



۶ چند مثلث به مساحت ۳ سانتی متر مربع داریم که طول دو ضلع آن ۵ و ۷ سانتی متر باشد؟ چرا؟ (۰/۷۵ نمره)

پاسخ

$$S = \frac{1}{2} ab \sin \theta \Rightarrow 3 = \underbrace{\frac{1}{2} \times 5 \times 7 \sin \theta}_{(0/25 \text{ نمره})}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\sin \theta = \frac{6}{35}}_{(0/25 \text{ نمره})} < 1 \Rightarrow (0/25 \text{ نمره}) \text{ دو مثلث داریم}$$

فیلم پاسخ



۷. توابع $y = \cos x - \sin x$ و $y = \sqrt{2}$ را در نظر بگیرید. با تشکیل یک معادله مثلثاتی و حل آن، تعیین کنید این دو تابع در بازه $[0, 2\pi]$ چند نقطه برخورد دارند؟ طول نقطه یا نقاط برخورد را به دست آورید. (۱/۵ نمره)

پاسخ

$$\cos x - \sin x = \sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \underbrace{(\cos x - \sin x)^2}_{(0/25 \text{ نمره})} = 2$$

$$\Rightarrow \underbrace{\cos^2 x + \sin^2 x - 2 \sin x \cos x}_{(0/25 \text{ نمره})} = 2$$

$$\Rightarrow \underbrace{\sin 2x}_{(0/5 \text{ نمره})} = -1$$

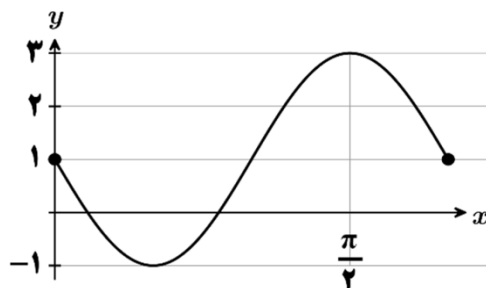
$$\Rightarrow \underbrace{x = k\pi - \frac{\pi}{4}}_{(0/25 \text{ نمره})}$$

با امتحان جواب، فقط جواب‌های به فرم $x = 2k\pi - \frac{\pi}{4}$ قابل قبول است، که دو تابع در بازه $[0, 2\pi]$ فقط یک نقطه برخورد $\frac{7\pi}{4}$ دارند. (۰/۲۵ نمره)

فیلم پاسخ



۸. قسمتی از نمودار تابع $y = a \sin(bx) + c$ در زیر رسم شده است. با انجام محاسبات، مقادیر a , b , c را به دست آورید. ($b > 0$) (نمره ۱/۲۵)



پاسخ

$$\frac{3}{4}T = \frac{\pi}{2} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{3} = \frac{2\pi}{|b|} \Rightarrow \underbrace{b = 3}_{(نمره ۰/۲۵)}$$

$$\left. \begin{array}{l} \max = 3 = c + |a| \\ \min = -1 = c - |a| \end{array} \right\} \Rightarrow \underbrace{c = 1}_{(نمره ۰/۲۵)}, |a| = 2 \Rightarrow \underbrace{a = -2}_{(نمره ۰/۲۵)}$$

فیلم پاسخ



۹. نمودار تابع $y = f(x)$ به صورت زیر است. موارد خواسته شده

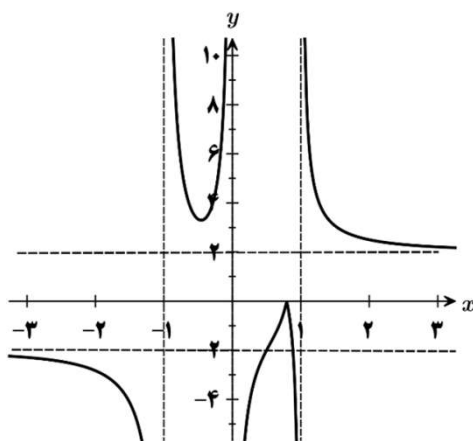
را بنویسید. (۱ نمره)

الف) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

ب) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

ج) $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$

د) $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x)$



پاسخ

الف) ۲ (۰/۲۵ نمره)

ب) -۲ (۰/۲۵ نمره)

ج) $-\infty$ (۰/۲۵ نمره)

د) $+\infty$ (۰/۲۵ نمره)

فیلم پاسخ



۱۰. نمودار تابع $f(x) = \frac{2x^2 - x - 6}{x^2 - 4x + 4}$ را در اطراف مجانب قائم آن رسم کنید. (۱/۲۵ نمره)

پاسخ

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2x^2 - x - 6}{x^2 - 4x + 4} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(2x+3)(x-2)}{(x-2)^2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2x+3}{x-2} = \frac{7}{0^+}$$

(۰/۲۵ نمره)

$$= +\infty$$

(۰/۲۵ نمره)

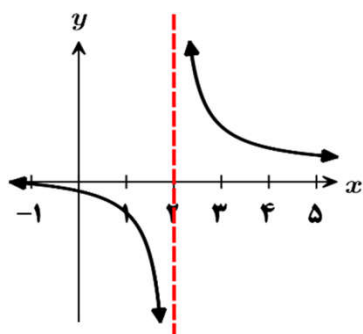
$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{2x^2 - x - 6}{x^2 - 4x + 4} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{(2x+3)(x-2)}{(x-2)^2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{2x+3}{x-2} = \frac{7}{0^-}$$

(۰/۲۵ نمره)

$$= -\infty$$

(۰/۲۵ نمره)

$x = 2$ مجانب قائم است. (۰/۲۵ نمره)



فیلم پاسخ



۱۱. حدود زیر را به دست آورید. ([] نماد جزء صحیح است)

(الف) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1-2x}{\sqrt{x^2-1}}$ (نمره ۱/۲۵)

(ب) $\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}} \frac{[x]}{\tan x}$

پاسخ

(الف)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1-2x}{\sqrt{x^2-1}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x}{\sqrt{x^2}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x}{|x|} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x}{-x}$$

(نمره ۰/۲۵) (نمره ۰/۲۵)

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} 2$$

(نمره ۰/۲۵)

(ب)

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}} \frac{[x]}{\tan x} = \frac{-2}{\infty} = 0$$

(نمره ۰/۲۵) (نمره ۰/۲۵)

فیلم پاسخ



۱۲. قضیه: اگر تابع f در نقطه a مشتق پذیر باشد، در این نقطه پیوسته است. (۱/۲۵ نمره)

پاسخ

تابع f در نقطه a مشتق پذیر است. پس:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = L \quad (\text{نمره } ۰/۲۵)$$

لذا:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) - f(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} (x - a) \quad (\text{نمره } ۰/۲۵)$$

$$= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \times \lim_{x \rightarrow a} (x - a) = L \times 0 = 0 \quad (\text{نمره } ۰/۵)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) \quad (\text{نمره } ۰/۲۵)$$

یعنی تابع f در نقطه a پیوسته است.

فیلم پاسخ



۱۳. مشتق توابع زیر را به دست آورید: (ساده کردن مشتق لازم نیست)
(۱/۵ نمره)

الف) $f(x) = \frac{\sqrt[3]{x} + 6}{2x^2 - x - 1}$

ب) $f(x) = x^2 \cdot \sin^3 x$

پاسخ

(الف)

$$f(x) = \frac{\sqrt[3]{x} + 6}{2x^2 - x - 1}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{\underbrace{\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}}_{(0.25 \text{ نمره})} (2x^2 - x - 1) - \underbrace{(2x - 1)}_{(0.25 \text{ نمره})} (\sqrt[3]{x} + 6)}{(2x^2 - x - 1)^2}$$

(۰.۵ نمره)

(ب)

$$f(x) = x^2 \cdot \sin^3 x \Rightarrow f'(x)$$

$$= \underbrace{2x \cdot \sin^3 x}_{(0.25 \text{ نمره})} + \underbrace{x^2 (\cos x)}_{(0.25 \text{ نمره})} \underbrace{(3 \sin^2 x)}_{(0.25 \text{ نمره})}$$

فیلم پاسخ



۱۴. مشتق پذیری تابع $f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & x < -1 \\ x^2 - 4x & x \geq -1 \end{cases}$ را در نقطه‌ای به طول ۱- بررسی کنید. (۱/۲۵ نمره)

پاسخ

$$f'_-(-1) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)}$$

(۰/۲۵ نمره)

$$= \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{2x - 1 - ((-1)^2 - 4)}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{2x + 2}{x + 1} = 2$$

(۰/۲۵ نمره)

$$f'_+(-1) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)}$$

(۰/۲۵ نمره)

$$= \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^2 - 4 - ((-1)^2 - 4)}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^2 - 1}{x + 1} = -2$$

(۰/۲۵ نمره)

چون $f'_-(-1) \neq f'_+(-1)$ تابع در نقطه ۱- مشتق پذیر نیست. (۰/۲۵ نمره)

فیلم پاسخ



۱۵. معادله حرکت یک متحرک بر حسب ثانیه به صورت $f(t) = t^2 - 5t + 7$ است. در چه لحظه‌ای سرعت متوسط این متحرک در بازه زمانی $[1, 3]$ با سرعت لحظه‌ای برابر می‌شود؟ (۱ نمره)

پاسخ

$$\begin{aligned} \text{سرعت متوسط} &= \frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} \quad (\text{نمره } 0/25) \\ &= \frac{(3^2 - 5(3) + 7) - (1^2 - 5(1) + 7)}{2} = -1 \quad (\text{نمره } 0/25) \\ \text{سرعت لحظه‌ای} &= f'(t) = 2t - 5 = -1 \quad (\text{نمره } 0/25) \\ \Rightarrow t &= 2 \quad (\text{نمره } 0/25) \end{aligned}$$

فیلم پاسخ



۱۶. مقادیر اکسترمم مطلق تابع $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$ را در بازه $[-2, 2]$ بیابید. (نمره ۱/۲۵)

پاسخ

$$f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$$

$$\Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 0$$

(نمره ۰/۲۵)

$$\Rightarrow x = -1, x = 3 \notin [-2, 2]$$

(نمره ۰/۲۵)

$$f(-2) = -1, f(2) = -21, f(-1) = 6$$

(نمره ۰/۲۵)

$$\Rightarrow 6 = \text{ماکسیمم مطلق (نمره ۰/۲۵)}$$

$$-21 = \text{مینیمم مطلق (نمره ۰/۲۵)}$$

فیلم پاسخ



۱۷. مقادیر a, b را چنان بیابید که نقطه $(-1, 2)$ اکسترمم نسبی تابع $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 5$ باشد. (۱/۲۵ نمره)

پاسخ

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 5 \Rightarrow f'(x) = \underbrace{3x^2 + 2ax + b}_{(0/25 \text{ نمره})}$$

$$\xrightarrow{x=-1} \underbrace{3(-1)^2 + 2a(-1) + b}_{(0/25 \text{ نمره})} = 0$$

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 5$$

$$\xrightarrow{x=-1} \underbrace{(-1)^3 + a(-1)^2 + b(-1) + 5}_{(0/25 \text{ نمره})} = 2$$

$$\begin{cases} b - 2a = -3 \\ -b + a = -2 \end{cases} \Rightarrow \underbrace{a = 5}_{(0/25 \text{ نمره})}, \underbrace{b = 7}_{(0/25 \text{ نمره})}$$

فیلم پاسخ

