



الف

A

کنکور ۱۴۰۰



۱۲۱

A

پاسخنامه ماز

کنکور ریاضی

درس: حسابان

محمد مصطفی ابراهیمی

تهیه شده توسط:

ماز پر مخاطب ترین برگزار کننده آزمون های آزمایشی آنلاین
در کشور و تنها موسسه ای است که
مطابقت مستندی با کنکور سراسری ارائه می کند.



اشتراک الماس ماز

بهترین انتخاب برای کنکور ۱۴۰۱
اولین و آخرین خرید سال کنکور
با خرید این اشتراک تمامی محصولات ماز برای شما فعال می‌شود
(آزمون - کلاس - همایش - پروژه جمع‌بندی - نکته و تست - دوپینگ)

<https://liink.ir/6bf2>

۰۲۱۷۴۲۸۵

۰۷۱۳۲۲۷۱۸۸۴

۰۷۱۳۲۲۷۱۹۸۷

برای شرکت در آزمون‌های ماز و مشابهت مطابقت ماز با کنکورهای سراسری روی لینک زیر کلیک کنید. 😊

www.biomazeedu.ir

* داوطلب گرامی، عدم درج مشخصات و امضاء در مندرجات جدول ذیل، به منزله عدم حضور شما در جلسه آزمون است.

اینجانب..... با شماره داوطلبی..... با آگاهی کامل، یکسان بودن شماره صندلی خود را با شماره داوطلبی مندرج در بالای کارت ورود به جلسه، بالای پاسخنامه و دفترچه سؤالات، نوع و کدکنترل درج شده بر روی دفترچه سؤالات و پائین پاسخنامه را تأیید می‌نمایم.

امضاء:

۱۰۱- اگر مجموع و حاصل ضرب ریشه‌های حقیقی معادله $x^4 - 7x^2 - 5 = 0$ به ترتیب S و P باشند، حاصل عبارت $2SP + 2S - 2P^2$ ، کدام است؟

- (۱) $59 - 7\sqrt{69}$ (۲) $7 + \sqrt{69}$ (۳) ۵۰ (۴) $59 + 7\sqrt{69}$

۱۰۲- فرض کنید $\log_5(3x-2) = 1$ ، $\left| \frac{\log_5}{\log_2} \right|$ مقدار x، کدام است؟

- (۱) ۹ (۲) $\frac{17}{3}$ (۳) ۴ (۴) $\frac{7}{3}$

۱۰۳- حاصل عبارت $(\log_{11}(3))^2 + \log_{11}(147)\log_{11}(1323)$ ، کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۱۰۴- فرض کنید مجموعه جواب نامعادله $\frac{((m^2-1)x^2 - 4mx + 4)(x-3\sqrt{x}+2)}{2x-3} > 0$ ، به ازای $x > \frac{3}{2}$ ، بازه

$[2, 4]$ باشد. مقدار m، کدام است؟

- (۱) -۲ (۲) صفر (۳) ۱ (۴) ۲

۱۰۵- اگر $\tan(\frac{\alpha}{2}) = \frac{1}{4}$ باشد، حاصل $\frac{\tan(\alpha) - \sin(\alpha)}{\sin(\alpha) - \cos(\alpha)}$ ، کدام است؟

- (۱) $-\frac{91}{105}$ (۲) $-\frac{16}{105}$ (۳) $\frac{16}{105}$ (۴) $\frac{91}{105}$

۱۰۶- اگر $f(\alpha) = 4\sin(\alpha)\cos(2\alpha) + 2\sin(\alpha)$ باشد، مقدار $f(\frac{41\pi}{9})$ ، کدام است؟

- (۱) $-\sqrt{3}$ (۲) $\sqrt{3}$ (۳) ۱ (۴) -۱

۱۰۷- فرض کنید A مجموعه جواب‌های معادله مثلثاتی $(1 + \cos(2\alpha))(1 + \cos(4\alpha))(1 + \cos(8\alpha)) = \frac{1}{8}$ ، در بازه

$[0, \pi]$ باشد. ماکزیمم عضو مجموعه A، کدام است؟

- (۱) $\frac{5}{7}\pi$ (۲) $\frac{6}{7}\pi$ (۳) $\frac{7}{9}\pi$ (۴) $\frac{8}{9}\pi$

۱۰۸- تابع چندجمله‌ای درجه دوم با ضرایب طبیعی $P(x)$ مفروض است. اگر باقیمانده و خارج قسمت تقسیم $P(x)$

بر $P'(x)$ (مشتق تابع $P(x)$) به ترتیب -۲ و $\frac{1}{2}x + 1$ باشند، کمترین مقدار مجموع ضرایب $P(x)$ ، کدام است؟

- (۱) ۴ (۲) ۶ (۳) ۷ (۴) ۹

۱۰۹- فرض کنید جملهٔ صدم دنبالهٔ بازگشتی $1 + \frac{1}{a_n} = a_{n+1}$ با شرط $a_1 = 1$ ، برابر $\frac{k}{m}$ باشد. جملهٔ نود و هشتم دنباله، کدام است؟

(۱) $\frac{k-m}{2m-k}$ (۲) $\frac{k-2m}{k-m}$ (۳) $\frac{k-m}{k-2m}$ (۴) $\frac{2m-k}{k-m}$

۱۱۰- دنبالهٔ $a_n = \begin{cases} 2^k & ; n = 3k \\ -2k + 4 & ; n = 3k + 1 \\ \left\lfloor \frac{n}{k+2} \right\rfloor + a & ; n = 3k + 2 \end{cases}$ به ازای اعداد حسابی n ، مفروض است. اگر مجموع ۱۰ جملهٔ اول این دنباله ۱۹ باشد، حاصل عبارت $a_9 + a_8 + a_7 + \dots + a_2 + a_1$ ، کدام است؟

(۱) -۲ (۲) صفر (۳) ۲ (۴) ۱

۱۱۱- فرض کنید برد تابع $f(x) = \sqrt[3]{1-9\cos^2(x)} - \sqrt[3]{9\cos^2(x)-1}$ به صورت $[a, b]$ باشد. مقدار $b-a$ ، کدام است؟

(۱) $\frac{9}{4}$ (۲) $\frac{15}{4}$ (۳) $\frac{9}{2}$ (۴) $\frac{21}{4}$

۱۱۲- دامنهٔ تغییرات تابع $f(x) = \log_{\frac{1}{e}} \frac{1}{6 + \sqrt{|x|} - |x|}$ ، کدام است؟

(۱) $(-9, 9)$ (۲) $(-4, 9)$ (۳) $(4, 9)$ (۴) $(-4, 4)$

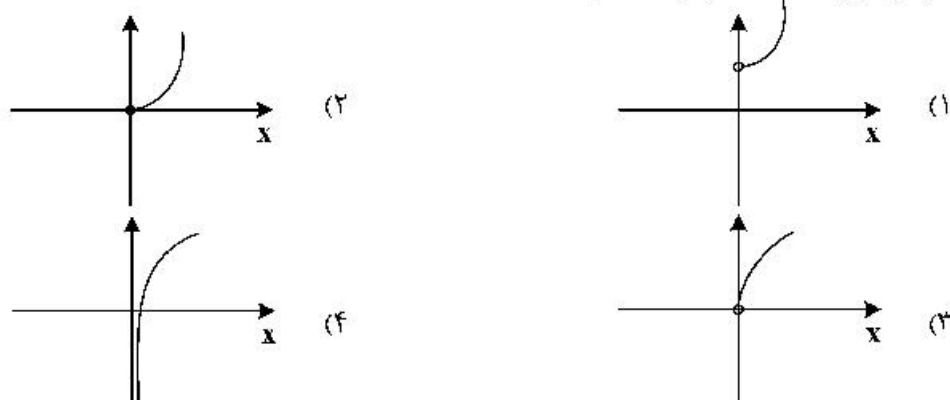
۱۱۳- نمودار منحنی $y = \sqrt{4-x}$ را k واحد در راستای قائم و $k-2$ واحد در جهت افقی چنان انتقال می‌دهیم که منحنی جدید وارون تابع خود را در نقطه‌ای با عرض ۱ قطع کند. سپس منحنی حاصل را ۱ واحد در راستای قائم به سمت پایین انتقال می‌دهیم. طول نقطهٔ برخورد منحنی به دست آمده با محور x ها، کدام است؟

(۱) -۴ (۲) -۳ (۳) ۱ (۴) ۲

۱۱۴- فرض کنید $f(x) = \begin{cases} -1 & x < -1 \\ x & -1 \leq x \leq 1 \\ 1 & x > 1 \end{cases}$ و $g(x) = 1 - x^2$. تعداد عناصر مجموعهٔ نقاطی که gof یا fog در آن‌ها مشتق‌پذیر نیست، کدام است؟

(۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵

۱۱۵- نمودار تابع $f(x) = 9^{\log_3 x}$ ، کدام است؟



۱۱۶ فرض کنید $a = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\tan^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - 1\right)}{(1 - \cos(\sqrt{2}x))^n}$ مقدار $a + n$ کدام است؟

(۱) $\frac{7}{4}$ (۲) $\frac{9}{4}$ (۳) $\frac{15}{4}$ (۴) $\frac{17}{4}$

۱۱۷ مقدار $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^-} \frac{10x - 5 + \left[\frac{3}{x^2}\right]}{16x - \left[-\frac{2}{x^2}\right]}$ کدام است؟ ([] نماد جزء صحیح است).

(۱) $-\infty$ (۲) صفر (۳) $\frac{5}{8}$ (۴) $+\infty$

۱۱۸ تابع $f(x) = \frac{ax^2 - bx^2 + 2}{ax^2 - bx + 2}$ در دو نقطه ناپیوسته و فقط دو مجانب موازی با محورهای مختصات دارد. مقدار a و b کدامند؟

(۱) $a = 0, b = 2$ (۲) $a = 8, b = 10$
(۳) $a = -2, b = 0$ (۴) $a = -8, b = -6$

۱۱۹ اگر $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt[50]{(a^2x^2 - 1)(a^4x^4 - 1) \cdots (a^{100}x^{100} - 1)}}{a^{49}x^k - 1} = -1$ ، آنگاه مقادیر a و k کدامند؟

(۱) $k = 51, a = -1$ (۲) $k = 51, a = 1$
(۳) $k = 49, a = -1$ (۴) $k = 49, a = 1$

۱۲۰ فرض کنید $f(x) = \cos^2(2x) + ax^2 + b$ ، $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} = 0$ و $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f'(x)}{x} = 2$ مقدار $a + b$ کدام است؟

(۱) ۸ (۲) ۶ (۳) ۴ (۴) -۸

۱۲۱ خطوط مماس بر منحنی تابع $f(x) = |\sin(2x)| + 1$ را در نقطه‌ای به طول $x = 0$ رسم می‌کنیم. اگر A و B به ترتیب نقاط برخورد خطوط مماس با نیمساز ربع دوم و چهارم باشند، طول پاره خط AB کدام است؟

(۱) صفر (۲) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ (۳) $\frac{4\sqrt{2}}{3}$ (۴) $2\sqrt{2}$

۱۲۲ کدام عبارت، برای تابع $f(x) = 2\sqrt{x} - \frac{3}{2\sqrt{x^2 - 1}}$ درست است؟

- (۱) تابع f در بازه $(0, 1) \cup (1, \infty)$ صعودی است.
(۲) تابع f در بازه‌های $(0, 1)$ و $(1, \infty)$ صعودی است.
(۳) تابع f در بازه $(1, \infty)$ صعودی و در بازه $(0, 1)$ نزولی است.
(۴) تابع f در بازه $(1, \infty)$ نزولی و در بازه $(0, 1)$ صعودی است.

۱۲۳ بازه‌هایی که تابع $f(x) = \frac{x^4}{x^3 - 8}$ در آن‌ها اکیداً نزولی است را در نظر بگیرید. مینیمم طول این بازه‌ها، کدام است؟

(۱) ۲ (۲) $\sqrt{4} - 1$ (۳) $2\sqrt{4}$ (۴) $2(\sqrt{4} - 1)$

۱۲۴ فرض کنید A و B نقاط اکسترمم تابع $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 1$ باشند. چند نقطه روی منحنی f وجود دارد که خطوط مماس بر آن‌ها، موازی پاره خط AB است؟

(۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

تهیه شده توسط: محمد مصطفی نوری

کلید: ۴

سوال: ۱۰۱

پاسخ:

چون توان می x های استفاده شده در مدار، همی زوج هستند، پس اگر α جواب این مدار باشد، $-\alpha$

هم قی جواب مدار است. در نتیجه مجموع جواب های این مدار، قی منفی است: $S = 0$

الان باید حاصل ضرب ریشه های این مدار را حساب کنیم. با فرض $x^2 = t$ ، داریم:

$$t^2 - 7t - 5 = 0 \quad \Delta = 49 \quad t = \frac{7 \pm \sqrt{49}}{2}$$

چون $x^2 = t$ ، پس جواب های منفی t ، قابل قبول نیستند و در نتیجه فقط $t = \frac{7 + \sqrt{49}}{2}$ بقی

$$x^2 = \frac{7 + \sqrt{49}}{2} \Rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{7 + \sqrt{49}}{2}} \quad \text{مقبول است:}$$

$$P = -\sqrt{\frac{7 + \sqrt{49}}{2}} \times \sqrt{\frac{7 + \sqrt{49}}{2}} = -\frac{7 + \sqrt{49}}{2} \quad \text{پس:}$$

مقدار عبارت خواسته شده، برابر است با:

$$2P^2 - \underbrace{3Sp} + \underbrace{2S} = 2 \left(-\frac{7 + \sqrt{49}}{2} \right)^2 = 2 \left(\frac{49 + 49 + 14\sqrt{49}}{4} \right) = 59 + 7\sqrt{49}$$



تهیه شده توسط: محمد علی نوری

کلید: ۳

سوال: ۱۰۲

پاسخ:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

دترمینان ماتریس 2×2 به صورت دربر حساب می شود:

اول مقدار دترمینان را حساب کنیم:

$$\begin{vmatrix} \log 5 & \log 2 \\ \log 2 & \log 5 \end{vmatrix} = (\log 5)^2 - (\log 2)^2 \xrightarrow{\text{اختلاف زوج}} = (\log 5 + \log 2)(\log 5 - \log 2) =$$

$$(\log 10)(\log \frac{5}{2}) = 1 \times \log \frac{5}{2} = \log \frac{5}{2}$$

از فرض می دانیم $\log_a a = 1$ و $\log_a b = \log_b a$ ، و این را می بینیم:

چون ضرب $\log_{\frac{5}{2}} \frac{5}{2}$ و $\log_{\frac{5}{2}} (3x-2)$ برابر با ۱ است ، پس $3x-2 = 10$ باید باشد:

$$\log_{\frac{5}{2}} \frac{5}{2} \times \log_{\frac{5}{2}} (3x-2) = 1 \rightarrow 3x-2 = 10 \rightarrow x = 4$$



تهیه شده توسط: محمد علی نوری

کلید: ۴

سوال: ۱۰۴

پاسخ:

دو عبارت تعریفی $\log_{21} 147$ و $\log_{21} 1422$ را بر حسب $\log_{21} 3$ می نویسیم:
 • $147 = 3 \times 49$ می توانیم $\frac{49}{3}$ بنویسیم که خود 49 هم 7^2 است:

$$\log_{21} 147 = \log_{21} \frac{49}{3} = \log_{21} 7^2 - \log_{21} 3 = 2 - \log_{21} 3$$

• عدد $1422 = 2 \times 711$ می نویسیم:

$$\log_{21} 1422 = \log_{21} (21^2 \times 2) = \log_{21} 21^2 + \log_{21} 2 = 2 + \log_{21} 2$$

پس:

$$\begin{aligned} (\log_{21}(3))^2 + \log_{21}(147) \log_{21}(1422) &= (\log_{21} 3)^2 + (2 - \log_{21} 3)(2 + \log_{21} 3) \xrightarrow{\text{اتحاد فردوج}} \\ &= (\log_{21} 3)^2 + 4 - (\log_{21} 3)^2 = 4 \end{aligned}$$



تهیه شده توسط: محمد سعید انصاری

کلید: ۲

سوال: ۱۰۴

پاسخ:

پیرامون صورت را با اتحاد مربع تجزیه کنیم:

$$\frac{(m^2-1)x^2 - 4mx + 4}{2x-3} > 0$$

دو عبارت $\sqrt{x}-1$ و $2x-3$ به ازای $x=4$ مثبت اند، پس می‌توانیم ضریب کنیم:

$$(m^2-1)x^2 - 4mx + 4 > 0$$

$$\sqrt{x}-2=0 \rightarrow x=4$$

ریشه پیرامون را با هم داریم:

جواب نامعادله به صورت $[2, 4]$ بود. حال که $x=4$ ریشه پیرامون است، پس باید ریشه پیرامون

$$f(m^2-1) - 4m + 4 = 0 \rightarrow 4m^2 - 4m = 0 \rightarrow 4m(m-1) = 0 \rightarrow \begin{cases} m=0 \\ m=1 \end{cases}$$

حالا به ازای هر دو مقدار m نامعادله $(m^2-1)x^2 - 4mx + 4 > 0$ را بررسی می‌کنیم:

① به ازای $m=0$ نامعادله به شکل $(-x^2+4)(\sqrt{x}-2) > 0$ در می‌آید.

② به ازای $m=1$ نامعادله به شکل $(3x^2-4x+4)(\sqrt{x}-2) > 0$ در می‌آید.

یک عدد در بازه $[2, 4]$ ، یعنی $x=3$ را در نامعادله می‌گذاریم. این عدد فقط در نامعادله ① صدق می‌کند پس $m=0$ می‌باشد.



تهیه شده توسط: محمد سهرابزاده

کلید: ۲

سوال: ۱۰۵

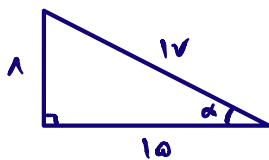
پاسخ:

از رابطه $\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$ یک می‌گیریم:

$$\tan \alpha = \frac{2 \tan \frac{\alpha}{2}}{1 - \tan^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{2(\frac{1}{5})}{1 - (\frac{1}{5})^2} = \frac{\frac{2}{5}}{\frac{24}{25}} = \frac{1}{12}$$

$\tan \alpha = \frac{1}{12} \rightarrow$ ضلع مقابل
 $\rightarrow$ ضلع مجاور

۱۰۵ از مثلث قائم الزامی یک می‌گیریم:



و در رابطه یک رابطه فیثاغورس حساب می‌کنیم:

مقدار نسبت ما را بدست می‌آوریم. چون $\tan \alpha$ ، $\sin \alpha$ و $\cos \alpha$ در دست دارند:

$$\sin \alpha = \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{وتر}} = \frac{1}{13}$$

$$\cos \alpha = \frac{\text{مجاور}}{\text{وتر}} = \frac{12}{13}$$

① یا هر دو مثبت اند

$$\sin \alpha = -\frac{1}{13}$$

$$\cos \alpha = -\frac{12}{13}$$

② یا هر دو منفی اند:

مقدار عبارت خواسته شده را در هر دو حالت حساب می‌کنیم:

$$\textcircled{1} \frac{\tan(\alpha) - \sin(\alpha)}{\sin(\alpha) - \cos(\alpha)} = \frac{\frac{1}{13} - \frac{1}{13}}{\frac{1}{13} - \frac{12}{13}} = \frac{\frac{2 \times 1}{13 \times 13}}{\frac{-11}{13}} = \frac{-2}{11}$$

$$\textcircled{2} \frac{\tan(\alpha) - \sin(\alpha)}{\sin(\alpha) - \cos(\alpha)} = \frac{\frac{1}{13} + \frac{1}{13}}{-\frac{1}{13} + \frac{12}{13}} = \frac{\frac{2 \times 1}{13 \times 13}}{\frac{11}{13}} = \frac{2 \times 1}{13 \times 11} = \frac{2}{143}$$

هر دو جواب قابل قبول اند ولی فقط $\frac{-2}{11}$ در گزینه وجود دارد.



کلید: ۱

سوال: ۱۵۶

پاسخ:

$$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$$

با عرض سرمندی، باید این فرمول را بلد باشید!

اول از آنجا که $\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha$ استفاده کنیم:

$$f(\alpha) = 3\sin\alpha(1 - \sin^2\alpha) + 4\sin^3\alpha = 3\sin\alpha - 3\sin^3\alpha + 4\sin^3\alpha \xrightarrow{\text{از آنجا که}} 3\sin\alpha + \sin^3\alpha$$

$$f(\alpha) = 3(\underbrace{\sin\alpha - \sin^3\alpha}_{\sin 3\alpha}) = 3\sin 3\alpha$$

$$f\left(\frac{41\pi}{9}\right) = 3\sin\left(\frac{41\pi}{9}\right) = 3\sin\left(14\pi - \frac{\pi}{9}\right) = 3\left(-\sin\frac{\pi}{9}\right) = 3 \times -\frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{3\sqrt{2}}{2}$$



پاسخ:

در مرحله پراتزان آمار $1 + \cos A = 2 \cos^2 \frac{A}{2}$ استفاده میکنیم:

$$(1 + \cos 2\alpha)(1 + \cos 4\alpha)(1 + \cos 8\alpha) = \frac{1}{\lambda} \rightarrow (2 \cos^2 \alpha)(2 \cos^2 2\alpha)(2 \cos^2 4\alpha) = \frac{1}{\lambda} \rightarrow$$

$$\cos^2 \alpha \cos^2 2\alpha \cos^2 4\alpha = \frac{1}{4\lambda} \xrightarrow{\text{ضرب}} |\cos \alpha \cos 2\alpha \cos 4\alpha| = \frac{1}{\lambda}$$

$$|\sin \alpha \cos \alpha \cos 2\alpha \cos 4\alpha| = \frac{1}{\lambda} |\sin \alpha| \quad \text{دوطرف هر دو را با رادار ضرب میکنیم:}$$

حالا از آنجا که $\sin A \cos A = \frac{1}{2} \sin 2A$ به بار استفاده میکنیم:

$$\underbrace{\underbrace{\underbrace{|\sin \alpha \cos \alpha \cos 2\alpha \cos 4\alpha|}_{\frac{1}{2} \sin 2\alpha}}_{\frac{1}{4} \sin 4\alpha}}_{\frac{1}{8} \sin 8\alpha} = \frac{1}{\lambda} |\sin \alpha| \rightarrow |\sin 8\alpha| = |\sin \alpha| \rightarrow \begin{cases} \sin 8\alpha = \sin \alpha \\ \sin 8\alpha = \sin(-\alpha) \end{cases}$$

حالا در مرحله راجل میکنیم و بزرگترین جواب اولیام در بازه $[0, \pi]$ را میگیریم:

$$\textcircled{1} \sin 8\alpha = \sin \alpha \rightarrow \begin{cases} 8\alpha = 2k\pi + \alpha \rightarrow \alpha = \frac{2k\pi}{7} \rightarrow \alpha_{\max} = \frac{2\pi}{7} \\ 8\alpha = 2k\pi + \pi - \alpha \rightarrow \alpha = \frac{2k\pi + \pi}{9} \rightarrow \alpha_{\max} = \frac{\pi}{9} \end{cases}$$

$$\textcircled{2} \sin 8\alpha = \sin(-\alpha) \rightarrow \begin{cases} 8\alpha = 2k\pi - \alpha \rightarrow \alpha = \frac{2k\pi}{9} \rightarrow \alpha_{\max} = \frac{2\pi}{9} \\ 8\alpha = 2k\pi + \pi + \alpha \rightarrow \alpha = \frac{2k\pi + \pi}{7} \rightarrow \alpha_{\max} = \pi \end{cases}$$

در بین جواب حال بدست آمده $\alpha = \pi$ جواب افغانی تولید شده (به خاطر ضرب کردن در $\sin \alpha$) حذف می‌شود.
پس بزرگترین جواب $\frac{2\pi}{7}$ است.



کلید: ۳

سوال: ۱۰۸

پاسخ:

$$P(x) = ax^2 + bx + c$$

تابع P به صورت درجه دوم است:

$$P'(x) = 2ax + b$$

P' به صورت درجه اول است:

سوال گفته اگر P را بر P' تقسیم کنیم، خارج قسمت $\frac{x}{4} + 1$ و باقی مانده -2 است. این دو تقسیم را بنویسیم:

$$P(x) = P'(x) \cdot \left(\frac{x}{4} + 1\right) + (-2) \rightarrow ax^2 + bx + c = (2ax + b) \left(\frac{x}{4} + 1\right) - 2 \rightarrow$$

$$ax^2 + bx + c = ax^2 + \left(2a + \frac{b}{4}\right)x + (b - 2)$$

ضرایب عبارات هم درجه را برابر قرار می دهیم:

$$\text{ضرایب } x^2 \rightarrow a = a \checkmark$$

$$\text{ضرایب } x \rightarrow b = 2a + \frac{b}{4} \xrightarrow{\times 4} 4b = 8a + b \rightarrow b = 4a$$

$$\text{ضرایب جمله ثابت} \rightarrow c = b - 2$$

a ، b و c سه عدد طبیعی اند. چون می خواهیم کمترین مقدار $a + b + c$ را بگیریم پس باید در رابطه $b = 4a$ ،

$$a = 1 \text{ و } b = 4 \text{ باشد پس: } c = b - 2 = 4 - 2 = 2$$

$$\min(a + b + c) = 1 + 4 + 2 = 7$$

در نتیجه:



تهیه شده توسط: محمد سعید انصاری

کلید: ۱

سوال: ۱۰۹

پاسخ:

اولیابی n ، a_{99} قرار می‌دهیم که a_{99} بدست آید:

$$a_{100} = \frac{1}{a_{99}} + 1 \rightarrow \frac{k}{m} = \frac{1}{a_{99}} + 1 \rightarrow \frac{k-m}{m} = \frac{1}{a_{99}} \rightarrow a_{99} = \frac{m}{k-m}$$

الانیابی n ، a_{98} قرار می‌دهیم:

$$a_{99} = \frac{1}{a_{98}} + 1 \rightarrow \frac{m}{k-m} = \frac{1}{a_{98}} + 1 \rightarrow \frac{m-(k-m)}{k-m} = \frac{1}{a_{98}} \rightarrow a_{98} = \frac{k-m}{2m-k}$$



کلید: ۱

سوال: ۱۱۰

پاسخ:

اولاً باید حواسمان باشد که مجموع ۱۰ جمله اول یعنی مجموع جمله a_0 تا a_9 !

$$\begin{cases} a_0 = 2^0 = 1 \\ a_1 = 2^1 = 2 \\ a_2 = 2^2 = 4 \\ a_3 = 2^3 = 8 \end{cases}$$

• جمله a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 را از رابطه 2^k حساب کنیم.

باید ۵ جمله k اعداد ۰، ۱، ۲، ۳ را در 2^k قرار دهیم:

$$\begin{cases} a_1 = 0 + 4 = 4 \\ a_2 = -2 + 4 = 2 \\ a_3 = -4 + 4 = 0 \end{cases}$$

• جمله a_1, a_2, a_3, a_4 را از رابطه $-2k + 4$ حساب کنیم.

باید ۴ جمله k اعداد ۰، ۱، ۲، ۳ را در $-2k + 4$ قرار دهیم:

$$\left[\frac{5k+2}{k+2} \right] + a$$

• جمله a_4, a_5, a_6, a_7, a_8 را از رابطه $\left[\frac{n}{k+2} \right] + a$ حساب کنیم. ۵ جمله k اعداد ۴، ۵، ۶، ۷، ۸ را در $\left[\frac{5k+2}{k+2} \right] + a$ قرار دهیم:

$$\begin{cases} a_4 = \left[\frac{22}{4} \right] + a = a+1 \\ a_5 = \left[\frac{27}{5} \right] + a = a+1 \\ a_6 = \left[\frac{32}{6} \right] + a = a+2 \end{cases}$$

باید ۳ جمله k اعداد ۰، ۱، ۲ را قرار دهیم:

مجموع ۱۰ جمله اول، ۱۹ شده پس: $19 = 10a + 20 \rightarrow a = -2$

• جمله $a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9, \dots, a_{18}$ صفتی در رابطه سوم یعنی $\left[\frac{5k+2}{k+2} \right] - 2$ هستند. اولی جمله را بنویسید:

$$\left[\frac{5k+2}{k+2} \right] - 2 = \left[\frac{5k+2}{k+2} - 2 \right] = \left[\frac{k-2}{k+2} \right]$$

باید در $\left[\frac{k-2}{k+2} \right]$ ۹ جمله k اعداد ۰ تا ۹ را قرار دهیم و تعداد بیت آمده را با هم جمع کنیم:

$$\left[\frac{-2}{2} \right] + \left[\frac{-1}{3} \right] + [0] + \left[\frac{1}{5} \right] + \left[\frac{2}{6} \right] + \left[\frac{3}{7} \right] + \left[\frac{4}{8} \right] + \left[\frac{5}{9} \right] + \left[\frac{6}{10} \right] + \left[\frac{7}{11} \right] = -2$$



تهیه شده توسط: محمد علی نیکو

کلید: ۲

سوال: ۱۱

پاسخ:

$$f(x) = \sqrt[3]{4\cos^2 x - 1} - \sqrt[3]{1 - 4\cos^2 x}$$

اگر $4\cos^2 x - 1 = A$ باشد که $-1 \leq A \leq 1$ باشد، تابع زیر برای خواص:

$$y = \sqrt[3]{A} - \sqrt[3]{-A}$$

توجه کنید که $\sqrt[3]{A}$ اندک صغیر و $\sqrt[3]{-A}$ اندک نزول و در نتیجه $-\sqrt[3]{-A}$

اندک صغیر است. پس تابع y اندک صغیر است. پس کمترین مقدار آن به ازای

$A = -1$ و بیشترین مقدار به ازای $A = 1$ رخ می دهد.

$$y(-1) = \sqrt[3]{-1} - \sqrt[3]{1} = -\frac{1}{3} - 1 = -\frac{4}{3}$$

$$\rightarrow R_f = \left[-\frac{4}{3}, \frac{15}{2}\right]$$

$$y(1) = \sqrt[3]{1} - \sqrt[3]{-1} = 1 - \left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{4}{3}$$

$$b - a = \frac{15}{2} - \left(-\frac{4}{3}\right) = \frac{15+8}{2} = \frac{23}{2}$$



کلید: ۱

سوال: ۱۱۲

پاسخ:

صورت سؤال شکل دارد و دایره تابع را از مای خواصد.

پس فنج کر باید نسبت یارند.

فنج کر:

از $\sqrt{|x|} = A$ یارند داریم.

$$y = 4 + A - A^2 = -(A^2 - A - 4) = -(A - 2)(A + 2) > 0 \quad \text{---} \quad -2 < A < 2$$

$$\text{---} \quad -2 < \sqrt{|x|} < 2 \quad \text{---} \quad \sqrt{|x|} < 2 \quad \text{---} \quad |x| < 4 \quad \text{---} \quad -4 < x < 4$$



تهیه شده توسط: محمد مصطفی بزرگمهر

کلید: ۳

سوال: ۱۱۳

پاسخ:

$$y = \sqrt{5-x} \quad \xrightarrow{\text{نمودار جدید}} y_2 = \sqrt{5-(x-k-2)} + k = \sqrt{3+k-x} + k$$

نمودارها را درون خود را در نقطه ای با عرض ۱ قطع کنند یعنی از (۱، ۱) می گذرند.

$$1 = \sqrt{5+k} + k \quad \rightarrow \quad \sqrt{5+k} = 1-k \quad \rightarrow \quad k = -1$$

$$= 0 \quad \xrightarrow{\text{اواحد به پائین}} \sqrt{5-x} - 1 \quad \text{نمودار جدید: } y_2 = \sqrt{5-x} - 1$$

$$\sqrt{5-x} = 2 \quad \rightarrow \quad 5-x = 4 \quad \rightarrow \quad x = 1$$



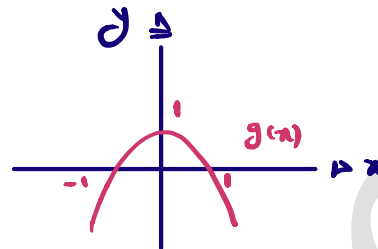
تهیه شده توسط: محمد مصطفی بزرگوار

کلید: ۳

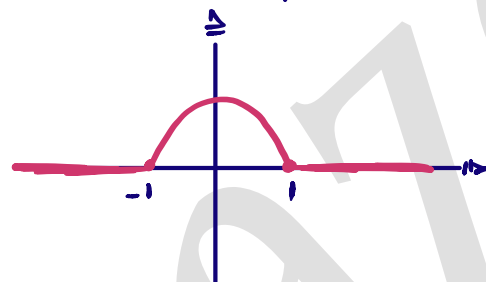
سوال: ۱۱۴

پاسخ:

$$f(x) = \begin{cases} -1 & x \leq -1 \\ x & -1 \leq x \leq 1 \\ 1 & x > 1 \end{cases} \quad g(x) = 1 - x^2$$



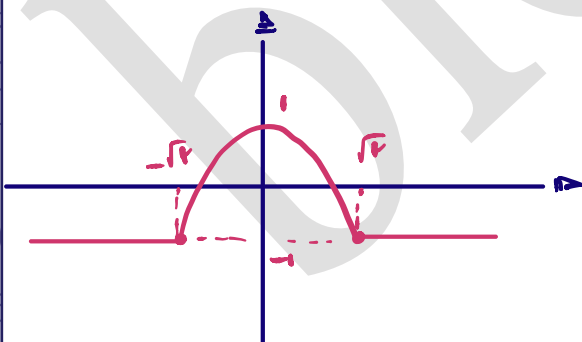
$$g \circ f(x) = \begin{cases} g(-1) = 0 & x \leq -1 \\ 1 - x^2 & -1 \leq x \leq 1 \\ g(1) = 0 & x > 1 \end{cases}$$



در $x = -1$ و $x = 1$ نقطه کثرت داریم. f و g متناهی و پیوسته است.

$$f \circ g(x) = \begin{cases} -1 & g(x) \leq -1 \\ g(x) & -1 \leq g(x) \leq 1 \\ 1 & g(x) > 1 \end{cases} = \begin{cases} -1 & x \leq -\sqrt{2} \text{ یا } x \geq \sqrt{2} \\ 1 - x^2 & -\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2} \end{cases}$$

$$g(x) \leq -1 \rightarrow 1 - x^2 \leq -1 \rightarrow x^2 \geq 2 \rightarrow \begin{cases} x \geq \sqrt{2} \\ x \leq -\sqrt{2} \end{cases}$$



در $x = \pm\sqrt{2}$ نقطه کثرت داریم و تابع متناهی و پیوسته است!



کلید: ۲

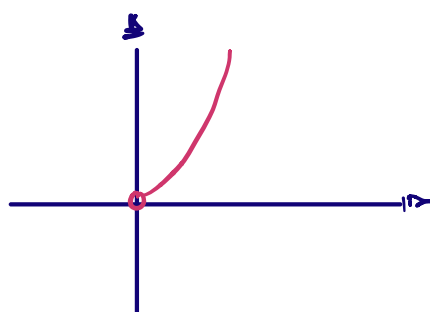
سوال: ۱۵

پاسخ:

$$y = 9^{\log_3 x} = 3^{2 \log_3 x} = 3^{\log_3 x^2} = x^2$$

رابطه تابع $y = x^2$ است.

تابع $y = x^2$ را در فاصله $(-\infty, +\infty)$ باید رسم کنیم.



تهیه شده توسط: محمد مصطفی براهی

کلید: ۴

سوال: ۱۱۶

پاسخ:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\tan^r \left(\frac{1}{\sqrt{1-x^r}} - 1 \right)}{(1 - \cos(\sqrt{r}n))^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^r}} - 1 \right)^r}{\left(\frac{r_n}{r} \right)^n}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{1 - \sqrt{1-x^r}}{\sqrt{1-x^r}} \times \frac{1 + \sqrt{1-x^r}}{1 + \sqrt{1-x^r}} \right)^r}{2^n}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1 - (1-x^r)}{\sqrt{1-x^r} \times (1 + \sqrt{1-x^r})} \right)^r$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{-x^r}{r} \right)^r}{2^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^r}{2^n}}{2^n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a = \frac{1}{r}$$

$$a + n = r + \frac{1}{r} = \frac{1+r^2}{r}$$



تهیه شده توسط: محمد مصطفی لبراحی

کلید: ۱

سوال: ۱۷

پاسخ:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow (-\frac{1}{4})^-} \frac{10x - 5 + \left[\frac{x}{x^2} \right]}{14x - \left[-\frac{x}{x^2} \right]} &= \lim_{x \rightarrow (-\frac{1}{4})^-} \frac{10x - 5 + \left[4x(x)^{-1} \right]}{14x - \left[-4x(x)^{-1} \right]} \\ &= \lim_{x \rightarrow (-\frac{1}{4})^-} \frac{10x - 5 + [12^-]}{14x - [(-1)^+]} = \lim_{x \rightarrow (-\frac{1}{4})^-} \frac{10x - 5 + 11}{14x - (-1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow (-\frac{1}{4})^-} \frac{10x + 6}{14x + 1} = \frac{-5 + 6}{(-1)^- + 1} = \frac{1}{0^-} = -\infty \end{aligned}$$



تهیه شده توسط: محمد مصطفی لبراق

کلید: ۷

سوال: ۱۱۸

پاسخ:

$$f(n) = \frac{ax^3 - bx^2 + 2}{ax^3 - bx + 2}$$

تابع در انتط نامیورته است پس فنج ۲ ارت دلد.

الرت های فنج حایب های قائم باشند. پس تابع حایب افقی دلد. یعنی $a=0$ است.

$$f(x) = \frac{-bx^2 + 2}{-bx + 2}$$

در انتطورت به بنافض می رسم چون فنج معکول ارت دلد. (رتزیه حذف)

پس تماراه این است که فنج ارت دلد باشد که می توان از اینبارت صورت مشتق باشد:

کلی سداگران رت مشتق صورت و فنج را برابر می ندلیم:

$$ax^3 - bx^2 + 2 = ax^3 - bx + 2 \rightarrow -bx^2 + bx = 0 \rightarrow -bx(x-1) = 0 \rightarrow x=+1$$

پس $x=+1$ رت فنج است:

$$a - b + 2 = 0 \rightarrow a + 2 = b$$

$$f(x) = \frac{ax^3 - bx^2 + 2}{ax^3 - bx + 2} = \frac{ax^3 - (a+2)x^2 + 2}{ax^3 - (a+2)x + 2} = \frac{ax^3 - ax^2 - 2x^2 + 2}{ax^3 - ax - 2x + 2}$$

$$= \frac{ax(x-1) - 2(x-1)(x+1)}{ax(x-1) - 2(x-1)} = \frac{ax - 2(x+1)}{ax(x+1) - 2} = \frac{ax - 2x - 2}{ax^2 + ax - 2}$$

فنج باید رت معاف رانده باشد:

$$x^2 - 2(a+2)x - 2 = 0 \rightarrow a^2 + 4a = 0 \rightarrow a = -4, b = -2$$



تهیه شده توسط: محمد علی نیا

کلید: ۲

سوال: ۱۱۹

پاسخ:

$$\lim_{n \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt[n]{(a^1 x^1 - 1)(a^2 x^2 - 1) \dots (a^{100} x^{100} - 1)}}{a^{100} x^k - 1} \quad \text{پروان} \quad \lim_{n \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt[n]{(a^1 x^1)(a^2 x^2) \dots (a^{100} x^{100})}}{a^{100} x^k}$$

$$= \lim_{n \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt[n]{a^{1+2+\dots+100} x^{1+2+\dots+100}}}{a^{100} x^k} = \lim_{n \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt[n]{a^{50 \times 21} x^{50 \times 21}}}{a^{100} x^k}$$

$$= \lim_{n \rightarrow -\infty} \frac{|a^{50} x^{50}|}{a^{100} x^k} = -1 \quad \text{ک} = 21 \quad \frac{|a^{50}| x^{50}}{a^{100} x^{21}} \quad \text{ک} = 21$$

$$-\frac{|a^{50}|}{a^{100}} = -1 \quad \frac{|a^{50}|}{a^{100}} = 1 \quad a > 0 \quad a^r = 1 \rightarrow a = 1$$



تهیه شده توسط:  بیومایز

کلید: ۲

سوال: ۱۲۰

پاسخ:

$$f(x) = \cos^3 x + ax^2 + b$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} = 0$$

چون حاصل حد صفر است پس صورت هم باید صفر باشد:

$$f(0) = \cos(0) + a(0) + b = 1 + 0 + b = 0 \rightarrow b = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f'(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3x^2 \cos^2(x) \times -\sin(x) + 2ax}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-3x \cos^2(x) \sin(x) + 2ax}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-3 \cos^2(x) (x) + 2ax}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-3 \cos^2(x) + 2a}{1} = -3 + 2a = 2 \rightarrow 2a = 5$$

$$\rightarrow a = \frac{5}{2}$$

$$a + b = \frac{5}{2} + (-1) = \frac{3}{2}$$



تهیه شده توسط: محمد مصطفی ابراهیم

کلید: ۳

سوال: ۱۲۱

پاسخ:

خطوط نیم یاس حید و راست دارد (او) ی خواصیم:

$$f(x) = | \sin x | + 1$$

$$0^+ : \sin x + 1 \xrightarrow{\text{مشتق}} x \cos x \xrightarrow{\text{مشتق}} f'_+(0) = 2$$

مشتق نیم یاس حید : $y - 1 = x \rightarrow y = x + 1$

$$\begin{cases} y = x + 1 \\ y = -x \end{cases} \rightarrow A \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right)$$

نقطه برخورد بنیاد ربع دوم در حید:

$$0^- : -\sin x + 1 \xrightarrow{\text{مشتق}} -x \cos x \xrightarrow{\text{مشتق}} f'_-(0) = -2$$

مشتق نیم یاس حید : $y - 1 = -x \rightarrow y = -x + 1$

$$\begin{cases} y = -x + 1 \\ y = -x \end{cases} \rightarrow B(1, 1)$$

نقطه برخورد بنیاد ربع دوم در حید:

$$AB = \sqrt{\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(-1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = \sqrt{2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$



پاسخ:

$$f(x) = 2\sqrt{x} - \frac{2}{\sqrt[3]{x^2-1}}$$

تابع f در $x=1$ به جانب $x \rightarrow 1^-$ میل دارد. پس نمی‌تواند در $x=1$ محدود باشد و از آنجا که $f(x)$ در $x=1$ از سمت راست و چپ به سمت $+\infty$ میل می‌کند، پس $f(x)$ در $x=1$ از هر دو طرف به سمت $+\infty$ میل می‌کند و از آنجا که $f(x)$ در $x=1$ از هر دو طرف به سمت $+\infty$ میل می‌کند، پس $f(x)$ در $x=1$ از هر دو طرف به سمت $+\infty$ میل می‌کند و از آنجا که $f(x)$ در $x=1$ از هر دو طرف به سمت $+\infty$ میل می‌کند، پس $f(x)$ در $x=1$ از هر دو طرف به سمت $+\infty$ میل می‌کند.

برای $x > 1$ و $x < 1$ داریم: $2\sqrt{x}$ و $\frac{2}{\sqrt[3]{x^2-1}}$ هر دو در $x=1$ به سمت $+\infty$ میل می‌کنند. پس $f(x)$ در $x=1$ از هر دو طرف به سمت $+\infty$ میل می‌کند و از آنجا که $f(x)$ در $x=1$ از هر دو طرف به سمت $+\infty$ میل می‌کند، پس $f(x)$ در $x=1$ از هر دو طرف به سمت $+\infty$ میل می‌کند.

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{x}{\sqrt[3]{(x^2-1)^4}}$$

راه حل دوم:

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{x}{\sqrt[3]{(x^2-1)^4}}$$

از آنجا که $x > 1$ و $x < 1$ داریم: $2\sqrt{x}$ و $\frac{2}{\sqrt[3]{x^2-1}}$ هر دو در $x=1$ به سمت $+\infty$ میل می‌کنند. پس $f(x)$ در $x=1$ از هر دو طرف به سمت $+\infty$ میل می‌کند و از آنجا که $f(x)$ در $x=1$ از هر دو طرف به سمت $+\infty$ میل می‌کند، پس $f(x)$ در $x=1$ از هر دو طرف به سمت $+\infty$ میل می‌کند.



کلید: ۴

سوال: ۱۲۳

پاسخ:

$$f(x) = \frac{x^4}{x^3 - 1} \rightarrow f'(x) = \frac{4x^3(x^3 - 1) - x^4(3x^2)}{(x^3 - 1)^2} < 0 \rightarrow \frac{x^3(4(x^3 - 1) - 3x^3)}{(x^3 - 1)^2} < 0$$

$$\rightarrow \frac{x^3(4x^3 - 4 - 3x^3)}{(x^3 - 1)^2} < 0$$

x	0	1	$\sqrt[3]{2}$	
~	+	-	-	+

تابع در فاصله های (0, 1) و $(\sqrt[3]{2}, 2)$ نزولی است. پسیم طول این بازه ها برابر است با:

$$\sqrt[3]{2} - 1 = 2(\sqrt[3]{2} - 1)$$



کلید: ۳

سوال: ۱۲۴

پاسخ:

$$f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 1 \longrightarrow f'(x) = 6x^2 - 6x - 12 = 6(x^2 - x - 2) = 6(x-2)(x+1)$$

$$f'(x) = 0 \longrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 2 \end{cases}$$

اکسترم‌های تابع در $x = -1$, $x = 2$ رخ می‌دهند.

$$f(-1) = 8 \longrightarrow \max: (-1, 8)$$

$$f(2) = -14 \longrightarrow \min: (2, -14)$$

$$\text{شیب AB: } \frac{8 - (-14)}{-1 - 2} = \frac{22}{-3} = -\frac{22}{3}$$

مشتق را برابر $-\frac{22}{3}$ قرار می‌دهیم:

$$f'(x) = 6x^2 - 6x - 12 = -\frac{22}{3} \longrightarrow 6x^2 - 6x - 12 + \frac{22}{3} = 0 \longrightarrow \Delta > 0$$

انطباق این ویژگی وجود دارد.

