



الف

A

کنکور ۱۴۰۰



۱۲۱

A

پاسخنامه ماز

کنکور ریاضی

درس: حسابان

سپروس نصیری

تهیه شده توسط:

ماز پر مخاطب ترین برگزار کننده آزمون های آزمایشی آنلاین
در کشور و تنها موسسه ای است که
مطابقت مستندی با کنکور سراسری ارائه می کند.



اشتراک الماس ماز

بهترین انتخاب برای کنکور ۱۴۰۱
اولین و آخرین خرید سال کنکور
با خرید این اشتراک تمامی محصولات ماز برای شما فعال می‌شود
(آزمون - کلاس - همایش - پروژه جمع‌بندی - نکته و تست - دوپینگ)

<https://liink.ir/6bf2>

۰۲۱۷۴۲۸۵

۰۷۱۳۲۲۷۱۸۸۴

۰۷۱۳۲۲۷۱۹۸۷

برای شرکت در آزمون‌های ماز و مشابهت مطابقت ماز با کنکورهای سراسری روی لینک زیر کلیک کنید. 😊

www.biomazeedu.ir

* داوطلب گرامی، عدم درج مشخصات و امضاء در مندرجات جدول ذیل، به منزله عدم حضور شما در جلسه آزمون است.

اینجانب..... با شماره داوطلبی..... با آگاهی کامل، یکسان بودن شماره صندلی خود را با شماره داوطلبی مندرج در بالای کارت ورود به جلسه، بالای پاسخنامه و دفترچه سؤالات، نوع و کدکنترل درج شده بر روی دفترچه سؤالات و پائین پاسخنامهام را تأیید می‌نمایم.

امضاء:

۱۰۱- اگر مجموع و حاصل ضرب ریشه‌های حقیقی معادله $x^4 - 7x^2 - 5 = 0$ به ترتیب S و P باشند، حاصل عبارت $2SP + 2S - 2P^2$ ، کدام است؟

- (۱) $59 - 7\sqrt{69}$ (۲) $7 + \sqrt{69}$ (۳) ۵۰ (۴) $59 + 7\sqrt{69}$

۱۰۲- فرض کنید $\log_5(3x - 2) = 1$ ، $\left| \frac{\log_5}{\log_2} \right|$ مقدار x، کدام است؟

- (۱) ۹ (۲) $\frac{17}{3}$ (۳) ۴ (۴) $\frac{7}{3}$

۱۰۳- حاصل عبارت $(\log_{11}(3))^2 + \log_{11}(147) \log_{11}(1323)$ ، کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۱۰۴- فرض کنید مجموعه جواب نامعادله $\frac{((m^2 - 1)x^2 - 4mx + 4)(x - 3\sqrt{x} + 2)}{2x - 3} > 0$ ، به ازای $x > \frac{3}{2}$ ، بازه

$[2, 4]$ باشد. مقدار m، کدام است؟

- (۱) -۲ (۲) صفر (۳) ۱ (۴) ۲

۱۰۵- اگر $\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1}{4}$ باشد، حاصل $\frac{\tan(\alpha) - \sin(\alpha)}{\sin(\alpha) - \cos(\alpha)}$ ، کدام است؟

- (۱) $-\frac{91}{105}$ (۲) $-\frac{16}{105}$ (۳) $\frac{16}{105}$ (۴) $\frac{91}{105}$

۱۰۶- اگر $f(\alpha) = 4\sin(\alpha)\cos(2\alpha) + 2\sin(\alpha)$ باشد، مقدار $f\left(\frac{41\pi}{9}\right)$ ، کدام است؟

- (۱) $-\sqrt{3}$ (۲) $\sqrt{3}$ (۳) ۱ (۴) -۱

۱۰۷- فرض کنید A مجموعه جواب‌های معادله مثلثاتی $(1 + \cos(2\alpha))(1 + \cos(4\alpha))(1 + \cos(8\alpha)) = \frac{1}{8}$ ، در بازه

$[0, \pi]$ باشد. ماکزیمم عضو مجموعه A، کدام است؟

- (۱) $\frac{5}{7}\pi$ (۲) $\frac{6}{7}\pi$ (۳) $\frac{7}{9}\pi$ (۴) $\frac{8}{9}\pi$

۱۰۸- تابع چندجمله‌ای درجه دوم با ضرایب طبیعی $P(x)$ مفروض است. اگر باقیمانده و خارج قسمت تقسیم $P(x)$

بر $P'(x)$ (مشتق تابع $P(x)$) به ترتیب -۲ و $\frac{1}{2}x + 1$ باشند، کمترین مقدار مجموع ضرایب $P(x)$ ، کدام است؟

- (۱) ۴ (۲) ۶ (۳) ۷ (۴) ۹

۱۰۹- فرض کنید جملهٔ صدم دنبالهٔ بازگشتی $1 + \frac{1}{a_n} = a_{n+1}$ با شرط $a_1 = 1$ ، برابر $\frac{k}{m}$ باشد. جملهٔ نود و هشتم دنباله، کدام است؟

(۱) $\frac{k-m}{2m-k}$ (۲) $\frac{k-2m}{k-m}$ (۳) $\frac{k-m}{k-2m}$ (۴) $\frac{2m-k}{k-m}$

۱۱۰- دنبالهٔ $a_n = \begin{cases} 2^k & ; n = 3k \\ -2k + 4 & ; n = 3k + 1 \\ \left\lfloor \frac{n}{k+2} \right\rfloor + a & ; n = 3k + 2 \end{cases}$ به ازای اعداد حسابی n ، مفروض است. اگر مجموع ۱۰ جملهٔ اول این دنباله ۱۹ باشد، حاصل عبارت $a_9 + a_8 + a_7 + \dots + a_2 + a_1$ ، کدام است؟

(۱) -۲ (۲) صفر (۳) ۲ (۴) ۱

۱۱۱- فرض کنید برد تابع $f(x) = \sqrt[3]{1-9\cos^2(x)} - \sqrt[3]{9\cos^2(x)-1}$ به صورت $[a, b]$ باشد. مقدار $b-a$ ، کدام است؟

(۱) $\frac{9}{4}$ (۲) $\frac{15}{4}$ (۳) $\frac{9}{2}$ (۴) $\frac{21}{4}$

۱۱۲- دامنهٔ تغییرات تابع $f(x) = \log_6 \frac{1}{6 + \sqrt{|x|} - |x|}$ ، کدام است؟

(۱) $(-9, 9)$ (۲) $(-4, 9)$ (۳) $(4, 9)$ (۴) $(-4, 4)$

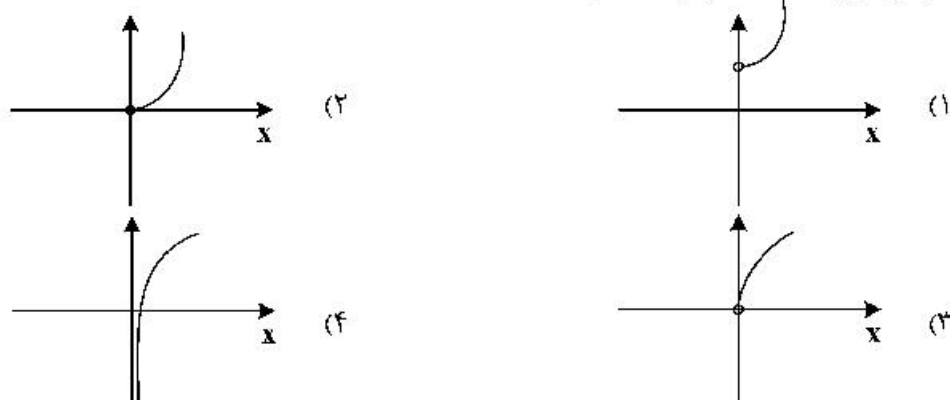
۱۱۳- نمودار منحنی $y = \sqrt{4-x}$ را k واحد در راستای قائم و $k-2$ واحد در جهت افقی چنان انتقال می‌دهیم که منحنی جدید وارون تابع خود را در نقطه‌ای با عرض ۱ قطع کند. سپس منحنی حاصل را ۱ واحد در راستای قائم به سمت پایین انتقال می‌دهیم. طول نقطهٔ برخورد منحنی به دست آمده با محور x ها، کدام است؟

(۱) -۴ (۲) -۳ (۳) ۱ (۴) ۲

۱۱۴- فرض کنید $f(x) = \begin{cases} -1 & x < -1 \\ x & -1 \leq x \leq 1 \\ 1 & x > 1 \end{cases}$ و $g(x) = 1 - x^2$. تعداد عناصر مجموعه نقاطی که gof یا fog در آن‌ها مشتق‌پذیر نیست، کدام است؟

(۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵

۱۱۵- نمودار تابع $f(x) = 9^{\log_3 x}$ ، کدام است؟



۱۱۶ فرض کنید $a = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\tan^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - 1\right)}{(1 - \cos(\sqrt{2}x))^n}$ مقدار $a + n$ کدام است؟

(۱) $\frac{7}{4}$ (۲) $\frac{9}{4}$ (۳) $\frac{15}{4}$ (۴) $\frac{17}{4}$

۱۱۷ مقدار $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^-} \frac{10x - 5 + \left[\frac{3}{x^2}\right]}{16x - \left[-\frac{2}{x^2}\right]}$ کدام است؟ ([] نماد جزء صحیح است).

(۱) $-\infty$ (۲) صفر (۳) $\frac{5}{8}$ (۴) $+\infty$

۱۱۸ تابع $f(x) = \frac{ax^2 - bx^2 + 2}{ax^2 - bx + 2}$ در دو نقطه ناپیوسته و فقط دو مجانب موازی با محورهای مختصات دارد. مقدار a و b کدامند؟

(۱) $a = 0, b = 2$ (۲) $a = 8, b = 10$
(۳) $a = -2, b = 0$ (۴) $a = -8, b = -6$

۱۱۹ اگر $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt[50]{(a^2x^2 - 1)(a^4x^4 - 1) \cdots (a^{100}x^{100} - 1)}}{a^{49}x^k - 1} = -1$ ، آنگاه مقادیر a و k کدامند؟

(۱) $k = 51, a = -1$ (۲) $k = 51, a = 1$
(۳) $k = 49, a = -1$ (۴) $k = 49, a = 1$

۱۲۰ فرض کنید $f(x) = \cos^2(2x) + ax^2 + b$ ، $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} = 0$ و $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f'(x)}{x} = 2$ ، مقدار $a + b$ کدام است؟

(۱) ۸ (۲) ۶ (۳) ۴ (۴) -۸

۱۲۱ خطوط مماس بر منحنی تابع $f(x) = |\sin(2x)| + 1$ را در نقطه‌ای به طول $x = 0$ رسم می‌کنیم. اگر A و B به ترتیب نقاط برخورد خطوط مماس با نیمساز ربع دوم و چهارم باشند، طول پاره خط AB کدام است؟

(۱) صفر (۲) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ (۳) $\frac{4\sqrt{2}}{3}$ (۴) $2\sqrt{2}$

۱۲۲ کدام عبارت، برای تابع $f(x) = 2\sqrt{x} - \frac{3}{2\sqrt{x^2 - 1}}$ درست است؟

(۱) تابع f در بازه $(0, 1) \cup (1, \infty)$ صعودی است.
(۲) تابع f در بازه‌های $(0, 1)$ و $(1, \infty)$ صعودی است.
(۳) تابع f در بازه $(1, \infty)$ صعودی و در بازه $(0, 1)$ نزولی است.
(۴) تابع f در بازه $(1, \infty)$ نزولی و در بازه $(0, 1)$ صعودی است.

۱۲۳ بازه‌هایی که تابع $f(x) = \frac{x^4}{x^2 - 8}$ در آن‌ها اکیداً نزولی است را در نظر بگیرید. مینیمم طول این بازه‌ها، کدام است؟

(۱) ۲ (۲) $\sqrt{4} - 1$ (۳) $2\sqrt{4}$ (۴) $2(\sqrt{4} - 1)$

۱۲۴ فرض کنید A و B نقاط اکسترمم تابع $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 1$ باشند. چند نقطه روی منحنی f وجود دارد که خطوط مماس بر آن‌ها، موازی پاره خط AB است؟

(۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

۱- اگر مجموع و حاصل ضرب ریشه‌های حقیقی معادله $x^4 - 7x^2 - 5 = 0$ به ترتیب S و P باشند، حاصل عبارت $2P^2 - 3SP + 2S$ ، کدام است؟

(۱) $59 - 7\sqrt{69}$ (۲) $7 + \sqrt{69}$ (۳) 50 (۴) $59 + 7\sqrt{69}$

۱- گزینه «۴»

مجموع ریشه‌های معادله درجه چهارم دو مجذوری $ax^4 + bx^2 + c = 0$ صفر است. برای حاصل ضرب تغییر متغیر $x^2 = t$ را فرض می‌کنیم.

$$x^2 = t \Rightarrow t^2 - 7t - 5 = 0 \Rightarrow \begin{cases} t_1 = x_1^2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{t_1} \\ t_2 = x_2^2 < 0 \end{cases}$$

$$P = (\sqrt{t_1})(-\sqrt{t_1}) = -t_1 = -\frac{7 + \sqrt{69}}{2}$$

$$2P^2 - 3PS + 2S = 2 \times \frac{118 + 14\sqrt{69}}{4} = 59 + 7\sqrt{69}$$

$$t = \frac{7 + \sqrt{69}}{2} = x^2$$

$$2P^2 = 2(x_1 x_2)^2 = 2x_1^2 x_2^2$$

$$= 2 \times \left(\frac{7 + \sqrt{69}}{2} \times \frac{7 - \sqrt{69}}{2} \right)^2$$

$$= 2 \times \left(\frac{49 - 69}{4} \right)^2 = 2 \times 25 = 50$$

۲- فرض کنید $\log_{\frac{\Delta}{2}}(3x - 2) = 1$ ، مقدار x، کدام است؟

(۱) ۹ (۲) $\frac{17}{3}$ (۳) ۴ (۴) $\frac{7}{3}$

۲- گزینه «۳»

$$\left| \begin{matrix} \log \Delta & \log 2 \\ \log 2 & \log \Delta \end{matrix} \right| \log_{\frac{\Delta}{2}}(3x - 2) = 1$$

$$\Rightarrow ((\log \Delta)^2 - (\log 2)^2) \log_{\frac{\Delta}{2}}(3x - 2) = 1$$

$$\Rightarrow (\log \Delta - \log 2)(\log \Delta + \log 2) \log_{\frac{\Delta}{2}}(3x - 2) = 1$$

$$\Rightarrow (\log_2 \frac{\Delta}{2})(\log_{\frac{\Delta}{2}}(3x - 2)) = 1$$

$$\Rightarrow \log_2(3x - 2) = 1 \Rightarrow 3x - 2 = 10 \Rightarrow x = 4$$

۳- حاصل عبارت $(\log_{21}(3))^2 + \log_{21}(147) \log_{21}(1323)$ ، کدام است؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

۳- گزینه «۴»

$$\begin{aligned} & (\log_{21} 3)^2 + (\log_{21} 147)(\log_{21} 3^2 \times 147) \\ &= (\log_{21} 3)^2 + 2(\log_{21} 3)(\log_{21} 147) + (\log_{21} 147)^2 \\ &= (\log_{21} 3 + \log_{21} 147)^2 = (\log_{21} 441)^2 = 4 \end{aligned}$$

۴- فرض کنید مجموعه جواب نامعادله $\frac{((m^2-1)x^2 - 4mx + 4)(x - 3\sqrt{x} + 2)}{2x - 3} > 0$ ، به ازای $x > \frac{3}{2}$ ، بازه $[2, 4]$ باشد،

مقدار m ، کدام است؟

- ۱ (۱) -۲ (۲) صفر (۳) ۱ (۴) ۲

۴- گزینه «۲»

اگر $x > \frac{3}{2}$ باشد، $2x - 3 > 0$ است.

$$x - 3\sqrt{x} + 2 = (\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} - 2) \quad (*)$$

در عبارت (*) با فرض $x > \frac{3}{2}$ مقدار $\sqrt{x} - 1$ مثبت است. پس باید نامعادله زیر را حل کنیم.

$$((m^2 - 1)x^2 - 4mx + 4)(\sqrt{x} - 2) > 0 \quad (**)$$

باید جدول تعیین علامت به صورت زیر باشد.

x	$-\infty$	۲	۴	$+\infty$		
p(x)		-	۰	+	۰	-

با توجه به گزینه ها $m = 0$ جواب است.

$$m = 0 \Rightarrow p(x) = (-x^2 + 4)(\sqrt{x} - 2) = (2 - x)(2 + x)(\sqrt{x} - 2)$$

به ازای $x > \frac{3}{2}$ عبارت $x + 2 > 0$ است. پس:

$$(2 - x)(\sqrt{x} - 2) > 0 \Rightarrow 2 < x < 4$$

این سوال ایراد دارد و باید بازه باز باشد.

۵- اگر $\tan(\frac{\alpha}{2}) = \frac{1}{4}$ باشد، حاصل $\frac{\tan(\alpha) - \sin(\alpha)}{\sin(\alpha) - \cos(\alpha)}$ کدام است؟

۹۱ (۴) ۱۰۵

۱۶ (۳) ۱۰۵

-۱۶ (۲) ۱۰۵

-۹۱ (۱) ۱۰۵

۵- گزینه «۲»

$$\tan \alpha = \frac{2 \tan \frac{\alpha}{2}}{1 - \tan^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{2 \times \frac{1}{4}}{1 - (\frac{1}{4})^2} = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{16}} = \frac{8}{15}$$

$$\sin \alpha = \frac{2 \tan \frac{\alpha}{2}}{1 + \tan^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{2 \times \frac{1}{4}}{1 + (\frac{1}{4})^2} = \frac{\frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{16}} = \frac{8}{17}$$

$$\cos \alpha = \frac{1 - \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \tan^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{1 - (\frac{1}{4})^2}{1 + (\frac{1}{4})^2} = \frac{15}{17}$$

$$\frac{\tan \alpha - \sin \alpha}{\sin \alpha - \cos \alpha} = \frac{\frac{8}{15} - \frac{8}{17}}{\frac{8}{17} - \frac{15}{17}} = \frac{\frac{8(17-15)}{15 \times 17}}{\frac{-7}{17}}$$

$$= \frac{8 \times 2}{-7 \times 15} = -\frac{16}{105}$$

۶- اگر $f(\alpha) = 4 \sin(\alpha) \cos(2\alpha) + 2 \sin(\alpha)$ باشد، مقدار $f(\frac{41\pi}{9})$ کدام است؟

-۱ (۴)

۱ (۳)

$\sqrt{3}$ (۲)

$-\sqrt{3}$ (۱)

۶- گزینه «۱»

$$f(\alpha) = 4 \sin \alpha (1 - 2 \sin^2 \alpha) + 2 \sin \alpha$$

$$= 6 \sin \alpha - 8 \sin^3 \alpha = 2 \sin 3\alpha$$

$$= 2 \sin \frac{41\pi}{3} = 2 \sin(14\pi - \frac{\pi}{3})$$

$$= 2 \sin(-\frac{\pi}{3}) = -\sqrt{3}$$

۷- فرض کنید A مجموعه جواب‌های معادله مثلثاتی $(1 + \cos(\lambda\alpha))(1 + \cos(4\alpha))(1 + \cos(9\alpha)) = \frac{1}{\lambda}$ در بازه $[0, \pi]$ باشد، ماکزیمم عضو مجموعه A ، کدام است؟

$\frac{5}{9}\pi$ (۱) $\frac{6}{9}\pi$ (۲) $\frac{7}{9}\pi$ (۳) $\frac{8}{9}\pi$ (۴)

۷- گزینه «۴»

به کمک رابطه $1 + \cos x = 2\cos^2 \frac{x}{2}$ معادله به صورت زیر تبدیل می‌شود.

$$64 \cos^2 \alpha \cos^2 2\alpha \cos^2 4\alpha = 1$$

حال طرفین رابطه را در $\sin^2 \alpha \sin^2 2\alpha \sin^2 4\alpha$ ضرب می‌کنیم.

$$(4 \cos^2 \alpha \sin^2 \alpha)(4 \sin^2 2\alpha \cos^2 2\alpha)(4 \sin^2 4\alpha \cos^2 4\alpha)$$

$$= \sin^2 \alpha \sin^2 2\alpha \sin^2 4\alpha$$

$$\Rightarrow \sin^2 2\alpha \sin^2 4\alpha \sin^2 \lambda\alpha = \sin^2 \alpha \sin^2 2\alpha \sin^2 4\alpha$$

$$\Rightarrow \sin^2 \lambda\alpha = \sin^2 \alpha \Rightarrow \lambda\alpha = k\pi \pm \alpha \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{k\pi}{\lambda} \\ \alpha = \frac{k\pi}{9} \end{cases}$$

فقط توجه داشته باشید که $k\pi$ ها قابل قبول نیستند بزرگترین جواب در بازه $[0, \pi]$ برابر $\frac{8\pi}{9}$ است.

۸- تابع چند جمله‌ای درجه دوم با ضرایب طبیعی $P(x)$ مفروض است. اگر باقیمانده و خارج قسمت تقسیم $P(x)$ بر $P'(x)$

(مشتق تابع $P(x)$) به ترتیب ۲- و $\frac{1}{3}x + 1$ باشند، کمترین مقدار مجموع ضرایب $P(x)$ ، کدام است؟

4 (۱) 6 (۲) 7 (۳) 9 (۴)

۸- گزینه «۳»

$P(x) = ax^2 + bx + c$ را، $p(x)$ در نظر می‌گیریم، در نتیجه $P'(x) = 2ax + b$ خواهد بود.

$$P(x) = P'(x) = \left(\frac{1}{3}x + 1\right) - 2$$

$$\Rightarrow ax^2 + bx + c = (2ax + b)\left(\frac{1}{3}x + 1\right) - 2$$

عبارت بالا یک اتحاد است و به ازای هر x برقرار است.

$$x = 0 \Rightarrow c = b - 2$$

$$x = 1 \Rightarrow a + b + c = (2a + b)\left(\frac{1}{3}\right) - 2$$

$$x = -2 \Rightarrow 4a - 2b + c = -2$$

از حل دستگاه بالا متوجه می‌شویم که هر سه عبارت بالا به ازای هر α برقرار است و جواب آن به صورت زیر است

$$a \in \mathbb{R}, \quad b = 4a, \quad c = 4a - 2$$

کمترین مقدار $a + b + c$ برای $a = 1$ رخ می‌دهد.

$$a = 1 \Rightarrow a + b + c = 1 + 4 + (4 - 2) = 7$$

۹- فرض کنید جمله صدم دنباله بازگشتی $a_{n+1} = \frac{1}{a_n} + 1$ ، برابر $\frac{k}{m}$ باشد، جمله نود و هشتم دنباله، کدام است؟

$$\frac{2m-k}{k-m} \quad (۴) \quad \frac{k-m}{k-2m} \quad (۳) \quad \frac{k-2m}{k-m} \quad (۲) \quad \frac{k-m}{2m-k} \quad (۱)$$

۹- گزینه «۱»

راه اول:

$$a_1 = 1$$

$$a_2 = \frac{1}{1} + 1 = 2$$

$$a_3 = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$$

$$a_4 = \frac{1}{\frac{3}{2}} + 1 = \frac{5}{3}$$

روند جملات را با دنباله فیبوناتچی مقایسه کنید.

دنباله فیبوناتچی: ۱, ۱, ۲, ۳, ۵,

معلوم می شود که :

$$a_n = \frac{F_{n+1}}{F_n}$$

که در آن F_n جمله عمومی دنباله فیبوناتچی است.

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n, \quad F_1 = F_2 = 1$$

فرض سوال $a_{100} = \frac{k}{m}$ است.

$$a_{100} = \frac{k}{m} \Rightarrow \frac{F_{101}}{F_{100}} = \frac{k}{m} \Rightarrow \frac{F_{100} + F_{99}}{F_{100}} = \frac{k}{m}$$

$$\Rightarrow \frac{F_{99}}{F_{100}} = \frac{k}{m} - 1 = \frac{k-m}{m} \Rightarrow \frac{F_{100}}{F_{99}} = \frac{m}{k-m}$$

$$\Rightarrow \frac{F_{99} + F_{98}}{F_{99}} = \frac{m}{k-m} \Rightarrow 1 + \frac{F_{98}}{F_{99}} = \frac{m}{k-m}$$

$$\Rightarrow \frac{F_{98}}{F_{99}} = \frac{m}{k-m} - 1 = \frac{2m-k}{k-m} \Rightarrow \frac{F_{99}}{F_{98}} = \frac{k-m}{2m-k}$$

راه دوم:

$$a_{100} = \frac{1+a_{99}}{a_{99}} = \frac{1+\frac{1+a_{98}}{a_{98}}}{\frac{1+a_{98}}{a_{98}}} = \frac{1+2a_{98}}{1+a_{98}} = \frac{k}{m} \Rightarrow a_{98} = \frac{m-k}{k-2m}$$

$$10- \text{ دنباله } a_n \text{ به ازای اعداد حسابی } n, \text{ مفروض است. اگر مجموع } 10 \text{ جمله اول این}$$

$$a_n = \begin{cases} 2^k & ; n = 3k \\ -2k + 4 & ; n = 3k + 1 \\ \left[\frac{n}{k+2} \right] + a & ; n = 3k + 2 \end{cases}$$

دنباله ۱۹ باشد، حاصل عبارت $a_7 + a_8 + a_9 + \dots + a_{19}$ ، کدام است؟

(۱) -۲ (۲) صفر (۳) ۲ (۴) ۱

۱۰- گزینه «۱»

مجموع ده جمله را برابر ۱۹ قرار می دهیم.

$$1 + 4 + (1 + a) + 2 + 2 + 1 + a + 4 + 0 + 2 + a + 8 = 19$$

$$\Rightarrow a = -2$$

$$a_7 + a_8 + a_9 + \dots + a_{19} = -1 - 1 + 0 + \dots + 0 = -2$$

۱۱- فرض کنید برد تابع $f(x) = 2\sqrt{9\cos^2(x) - 1} - 2\sqrt{1 - 9\cos^2(x)}$ به صورت $[a, b]$ باشد. مقدار $b - a$ ، کدام است؟

(۱) $\frac{9}{4}$ (۲) $\frac{15}{4}$ (۳) $\frac{9}{2}$ (۴) $\frac{21}{4}$

۱۱- گزینه «۴»

فرض می کنیم $\sqrt{9\cos^2 x - 1} = A$ باشد

$$-1 \leq \cos^2 x \leq 1 \Rightarrow -1 \leq 9\cos^2 x - 1 \leq 8 \Rightarrow -1 \leq A \leq 2$$

تابع مورد نظر به صورت $g(A) = 2^A - 2^{-A}$ ، هر دو تابع 2^A و 2^{-A} صعودی اکیداند. پس مجموع آن ها صعودی اکید خواهد بود.

$$b = g(2) = 2^2 - 2^{-2} = 4 - \frac{1}{4} = \frac{15}{4}$$

$$a = g(-1) = 2^{-1} - 2^1 = \frac{1}{2} - 2 = -\frac{3}{2} \Rightarrow b - a = \frac{15}{4} + \frac{3}{2} = \frac{21}{4}$$

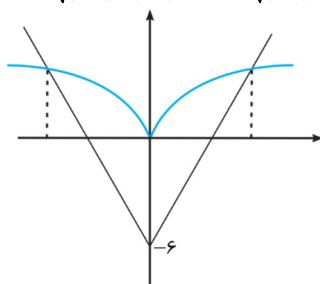
۱۲- دامنه تغییرات تابع $f(x) = \log_6 \frac{1}{6 + \sqrt{|x|} - |x|}$ ، کدام است؟

(۱) $(-9, 9)$ (۲) $(-4, 9)$ (۳) $(4, 9)$ (۴) $(-4, 4)$

۱۲- گزینه «۱»

$\sqrt{|x|}$ برای تابع مشکلی ایجاد نمی کند.

$$6 + \sqrt{|x|} - |x| \geq 0 \Rightarrow \sqrt{|x|} \geq |x| - 6$$



$$\sqrt{|x|} = |x| - 6 \xrightarrow{|x|=t} \sqrt{t} = t - 6 \Rightarrow t = 9$$

$$\Rightarrow |x| = 9 \Rightarrow x = \pm 9$$

پس جواب $(-9, 9)$ خواهد بود.

۱۳- نمودار منحنی $y = \sqrt{4-x}$ را k واحد در راستای قائم و $k-2$ واحد در جهت افقی چنان انتقال می‌دهیم که منحنی جدید وارون تابع خود را در نقطه‌ای با عرض ۱ قطع کند. سپس منحنی حاصل را ۱ واحد در راستای قائم به سمت پایین انتقال می‌دهیم. طول نقطه برخورد منحنی به دست آمده با محور x ها، کدام است؟

- (۱) -۴ (۲) -۳ (۳) ۱ (۴) ۲

۱۳- گزینه «۳»

$$y = \sqrt{4-(x-k+2)} + k = \sqrt{-x+k+2} + k$$

$$A(1,1) \in y \Rightarrow \sqrt{1+k} + k = 1 \Rightarrow k = 0$$

$$g(x) = y-1 \Rightarrow \sqrt{-x+2}-1=0 \Rightarrow x=1$$

(بهتر بود که جهت حرکت را اعلام می‌کردند)

۱۴- فرض کنید $f(x) = \begin{cases} -1 & x < -1 \\ x & -1 \leq x \leq 1 \\ 1 & x > 1 \end{cases}$ و $g(x) = 1-x^2$. تعداد عناصر مجموعه نقاطی که gof یا fog در آن‌ها مشتق‌پذیر نیست، کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵

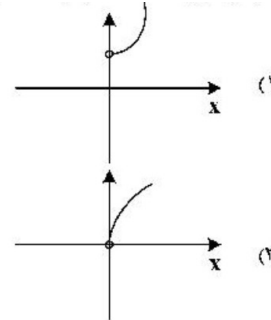
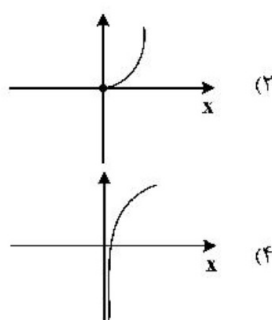
۱۴- گزینه «۳»

$$(\text{fog})(x) = \begin{cases} -1 & |x| > \sqrt{2} \\ 1-x^2 & |x| \leq \sqrt{2} \end{cases}$$

$$(\text{gof})(x) = \begin{cases} 1-x & |x| \leq 1 \\ 0 & |x| > 1 \end{cases}$$

هر دو تابع در دو نقطه شکستگی دارند که مجموعاً ۴ نقطه خواهد بود

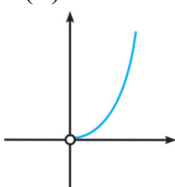
۱۵- نمودار تابع $f(x) = 9^{\log_3 x}$ ، کدام است؟



۱۵- گزینه «۲»؟؟؟

دامنه تابع $x > 0$ است.

$$f(x) = 9^{\log_3 x} = x^{\log_3 9} = x^2$$



جواب در گزینه‌ها نیست احتمالاً منظورشان گزینه ۲ بوده است.

۱۶- فرض کنید $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\tan^r(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - 1)}{(1 - \cos(\sqrt{2x}))^n} = a$. مقدار $a + n$ ، کدام است؟

$\frac{17}{4}$ (۴)

$\frac{15}{4}$ (۳)

$\frac{9}{4}$ (۲)

$\frac{7}{4}$ (۱)

۱۶- گزینه «۴»

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\tan^r(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - 1)}{(1 - \cos(\sqrt{2x}))^n} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - 1)^r}{(\frac{1}{2}(\sqrt{2x})^r)^n} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(1 - \sqrt{1-x^2})^r}{(1-x^r)x^{rn}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(1 - (1 - \frac{1}{2}x^r))^r}{x^n} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{2}x^r}{x^n} = a \Rightarrow \begin{cases} n = r \\ a = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow a + n = \frac{17}{4} \end{aligned}$$

۱۷- مقدار $\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}^-} \frac{10x - 5 + [\frac{3}{x^2}]}{16x - [-\frac{2}{x^2}]}$ ، کدام است؟ ([] نماد جزء صحیح است.)

$+\infty$ (۴)

$\frac{5}{8}$ (۳)

صفر (۲)

$-\infty$ (۱)

۱۷- گزینه «۱»

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow (-\frac{1}{2})^-} \left[\frac{3}{x^2} \right] &= \left[\frac{3}{((- \frac{1}{2})^-)^2} \right] = \left[\frac{3}{(\frac{1}{4})^+} \right] = [12^-] = 11 \\ \lim_{x \rightarrow (-\frac{1}{2})^-} \left[-\frac{2}{x^2} \right] &= \left[\frac{-2}{((- \frac{1}{2})^-)^2} \right] = \left[\frac{-2}{(\frac{1}{4})^+} \right] = [-8^-] = -8 \\ \lim_{x \rightarrow (-\frac{1}{2})^-} \frac{10x - 5 + [\frac{3}{x^2}]}{16x - [-\frac{2}{x^2}]} &= \lim_{x \rightarrow (-\frac{1}{2})^-} \frac{10x - 5 + 11}{16x - (-8)} \\ &= \frac{-5 - 5 + 11}{(-8)^- + 8} = \frac{1}{0^-} = -\infty \end{aligned}$$

۱۸- تابع $f(x) = \frac{ax^3 - bx^2 + 2}{ax^3 - bx + 2}$ در دو نقطه ناپیوسته و فقط دو مجانب موازی با محورهای مختصات دارد. مقدار a و b ، کدامند؟

(۱) $a = c, b = 2$ (۲) $a = 8, b = 10$ (۳) $a = -2, b = 0$ (۴) $a = -8, b = -6$

۱۸- گزینه «۴»

توضیحات سوال نشان می‌دهد که مخرج باید دو ریشه بدهد و یکی از ریشه‌های آن، ریشه صورت هم باشد، با فرض $a \neq 0$ مجانب افقی را حساب می‌کنیم.

(مجانب افقی) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 1 \Rightarrow y = 1$

واضح است که a و b صفر نیستند زیرا اگر صفر شوند تابع در یک نقطه ناپیوسته خواهد شد. پس گزینه‌های (۱) و (۳) حذف می‌شوند. گزینه دوم را امتحان می‌کنیم.

$$a = 8, b = 10 \Rightarrow f(x) = \frac{8x^3 - 10x^2 + 2}{8x^3 - 10x + 2}$$

$$= \frac{2(x-1)(4x^2 - x - 1)}{2(x-1)(4x^2 + 4x - 2)}$$

در این حالت دو مجانب قائم و یک مجانب افقی خواهیم داشت.

$$a = -8, b = -6 \Rightarrow f(x) = \frac{-8x^3 + 6x^2 + 2}{-8x^3 + 6x + 2}$$

$$= \frac{-2(x-1)(4x^2 - x + 1)}{2(x-1)(2x+1)^2} \xrightarrow{x \neq 1} f(x) = \frac{4x^2 - x + 1}{(2x+1)^2}$$

۱۹- اگر $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt[5]{(a^2x^2 - 1)(a^4x^4 - 1) \dots (a^{100}x^{100} - 1)}}{a^{49}x^k - 1} = -1$ ، آنگاه مقادیر a و k ، کدامند؟

(۱) $k = 51, a = -1$ (۲) $k = 51, a = 1$ (۳) $k = 49, a = -1$ (۴) $k = 49, a = 1$

۱۹- گزینه «۲»

پرتوان‌ها را انتخاب می‌کنیم

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt[5]{(a^2x^2)(a^4x^4) \dots (a^{100}x^{100})}}{a^{49}x^k} = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt[5]{(ax)^{2+4+\dots+100}}}{a^{49}x^k} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|ax|^{\frac{51}{2}}}{a^{49}x^k} = -1$$

$$\xrightarrow{a > 0} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-a^{\frac{51}{2}}x^{\frac{51}{2}}}{a^{49}x^k} = -1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a^2 = 1 \xrightarrow{a > 0} a = 1 \\ k = 51 \end{cases}$$

برای $a < 0$ مسئله جواب ندارد.

۲۰- فرض کنید $f(x) = x \cos^3(2x) + ax^2 + b$ ، $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} = 0$ و $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f'(x)}{x} = 2$ ، مقدار $a + b$ ، کدام است؟

- (۱) ۸ (۲) ۶ (۳) ۴ (۴) -۸

۲۰- گزینه «۲»

از اطلاعات مسئله مشخص می‌شود که $f(0) = 0$ ، $f'_+(0) = 0$ ، $f''_-(0) = 2$ چون تابع مشتق‌پذیر است پس نیازی به محاسبه چپ و راست نیست.

$$f(x) = x \cos^3 2x + ax^2 + b$$

$$f'(x) = -6 \cos^2 2x \sin 2x + 2ax$$

$$f''(x) = -6(-4 \cos 2x \sin 2x \sin 2x + 2 \cos 2x \cos^2 2x) + 2a$$

$$f''(0) = -12 + 2a = 2 \Rightarrow 2a = 14 \Rightarrow a = 7$$

$$f(0) = 0 \Rightarrow 1 + 0 + b = 0 \Rightarrow b = -1$$

$$a + b = 6$$

۲۱- ؟

- (۱) (۲) (۳) (۴)

۲۱- گزینه «۳»

در همسایگی راست $x = 0$ داریم:

$$f(x) = \sin 2x + 1 \Rightarrow f'(x) = 2 \cos 2x \Rightarrow f'_+(0) = 2$$

در همسایگی چپ $x = 0$ به طور مشابه $f'_-(0) = -2$ بدست می‌آید.

نیم مماس راست و چپ را می‌نویسیم.

$$\begin{cases} y - 1 = 2(x - 0) \Rightarrow y = 2x + 1 \\ y - 1 = -2(x - 0) \Rightarrow y = -2x + 1 \end{cases}$$

این خطوط را با $y = -x$ قطع می‌دهیم:

$$2x + 1 = -x \Rightarrow x = -\frac{1}{3} \Rightarrow A(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$$

$$-2x + 1 = -x \Rightarrow x = 1 \Rightarrow B(1, -1)$$

$$|AB| = \sqrt{(1 + \frac{1}{3})^2 + (\frac{1}{3} + 1)^2} \Rightarrow \frac{4}{3} \sqrt{2}$$

۲۲- ؟

- (۱) (۲) (۳) (۴)

۲۲- گزینه «۲»

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{x}{\sqrt[3]{(x^2 - 1)^4}}$$

f' برای $x > 0$ و $x \neq 1$ مثبت است، پس در بازه‌های $(0, 1)$ و $(1, +\infty)$ صعودی اکید است.

۲۳- ۴

(۱)

۲۳- گزینه «۴»

(۲)

(۳)

(۴)

$$f(x) = \frac{x^4}{x^3 - 8} \Rightarrow f'(x) = \frac{4x^3(x^3 - 8) - 3x^4 \cdot x^3}{(x^3 - 8)^2}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{x^3(4x^3 - 32 - 3x^3)}{(x^3 - 8)^2} = \frac{x^3(x^3 - 32)}{(x^3 - 8)^2}$$

x	$-\infty$	۰	۲	$\sqrt[3]{32}$	$+\infty$
$f'(x)$		+	۰	-	+

تابع در بازه‌های $[0, 2]$ و $[2, \sqrt[3]{32}]$ نزولی اکیداند. طول بازه‌ها را حساب می‌کنیم.

$$2 - 0 = 2$$

$$\sqrt[3]{32} - 2 = \sqrt[3]{8 \times 4} - 2 = 2(\sqrt[3]{4} - 1) \approx 1/17$$

۲۴- ۴

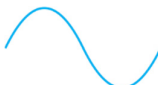
(۱)

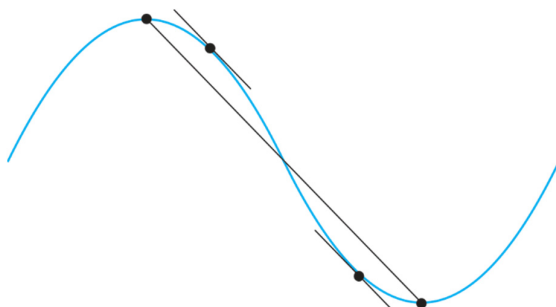
۲۴- گزینه «۳»

(۲)

(۳)

(۴)

نمودار تابع به صورت  است، زیرا f' دو ریشه ساده دارد



با توجه به نمودار این تابع دو نقطه با شرایط موجود وجود دارد.