بسمه تعالی

پاسخ تشریحی پیشنهادی ریاضی تجربی خارج ۱۴۰۱ — آرمین عظیمی - تربیت جام — (درجه A)

۱۰۱- (۱) $B=\left(\frac{\sqrt{۲}+\sqrt{۵}}{\sqrt{۱۰}+۲}\right)\left(\underbrace{\sqrt{۳-\sqrt{۵}}-\sqrt{۳+\sqrt{۵}}}_{A<0}\right)=? \Rightarrow A^۲=۳-\sqrt{۵}+۳+\sqrt{۵}-۲\sqrt{۴}=۲ \to A=-\sqrt{۲}$

$B=\frac{-(\sqrt{۱۰}+۲)}{(\sqrt{۱۰}+۲)}=-۱$

۱۰۲- (۴) $a_n=bn^۲+cn+d \to b=\frac{۱}{۷۰}\times -۱۴=-\frac{۱}{۵} \to a_n=-\frac{۱}{۵}n^۲+cn+d \to \begin{cases} a_۵=۱۴=-۵+۵c+d \\ a_۷=۱۷/۲=-۹/۸+۷c+d \end{cases}$

$\begin{cases} ۵c+d=۱۹ \\ ۷c+d=۲۷ \end{cases} \to \begin{cases} c=۴ \\ d=-۱ \end{cases} \to a_n=-\frac{۱}{۵}n^۲+۴n-۱ \quad \begin{cases} a_۱=۲/۸ \\ a_{۱۵}=۱۴ \end{cases} \to \frac{a_{۱۵}}{a_۱}=\frac{۱۴}{۲/۸}=۵$

۱۰۳- (۲) $y=-ax^۲+ax+۲ \to s\left(\frac{۱}{۲},۲+\frac{a}{۴}\right) \xrightarrow[\text{سهمی دیگر}]{\text{صدق در}} \frac{b}{۲}-\frac{b}{۲}-۱=۲+\frac{a}{۴} \to a=-۱۲ \Rightarrow b-a=۹$

$y=۲bx^۲-bx-۱ \to s\left(\frac{۱}{۴},-۱-\frac{b}{۸}\right) \xrightarrow{//} -\frac{a}{۱۶}+\frac{a}{۴}+۲=-\frac{۱}{۴}=-۱-\frac{b}{۸} \to b=-۹$

۱۰۴- (۲) (I) $\frac{۱-۳x}{x+۱}<۰ \to x\in(-\infty,-۱)\cup(\frac{۱}{۳},+\infty)$ ($۱-۳x$: $\frac{۱}{۳}$، $x+۱$: -۱)

(II) $\frac{۱-۳x}{x+۱}>-۲ \to \frac{-x+۳}{x+۱}>۰ \to x\in(-۱,۳)$ ($-x+۳$: ۳، $x+۱$: -۱)

$\Rightarrow$ (I) $\cap$ (II) $=(\frac{۱}{۳},۳) \to \boxed{\frac{۱}{۹}<\frac{x}{۲}<\frac{۳}{۲}}$

$\begin{cases} \frac{۱}{۹}<\frac{x}{۲}<۱ \to [\frac{x}{۲}]=۰ \\ ۱\le\frac{x}{۲}<\frac{۳}{۲} \to [\frac{x}{۲}]=۱ \end{cases} \Rightarrow$ ۲ عضو

۱۰۵- (۳) $f(x)=(ax+۲)(b-x)-۷x^۲=-ax^۲+(ab-۲)x+۲b-۷x^۲$

$=-(a+۷)x^۲+(ab-۲)x+۲b$ — ضریب $x^۲$ و x باید صفر باشد $\begin{cases} a+۷=۰ \to a=-۷ \\ ab=۲ \to b=-\frac{۲}{۷} \end{cases}$

$f(x)=۲b=-\frac{۴}{۷} \to$ بر تابع f

۱۰۶- (۴) $g(x)=\frac{-۱}{(x-۱)}-۲=\frac{-۲x+۱}{x-۱} \to g(x)=f^{-۱}(x) \to \frac{-۲x+۱}{x-۱}=\frac{۱}{x} \to ۲x^۲=۱ \to x=\pm\frac{۱}{\sqrt{۲}}$

$\begin{cases} (\frac{۱}{\sqrt{۲}},\sqrt{۲}) \\ (-\frac{۱}{\sqrt{۲}},-\sqrt{۲}) \end{cases} \Rightarrow d=\sqrt{(\frac{۱}{\sqrt{۲}})^۲+(\sqrt{۲})^۲}=\frac{\sqrt{۵}}{\sqrt{۲}}=\frac{\sqrt{۱۰}}{۲}$

۱۰۷- (۲) $S=a+b=a^۲+b^۲-۱۲=(a+b)^۲-۲ab-۱۲=(a+b)^۲-۲(a+b)-۱۰ \to (a+b)^۲-۲(a+b)-۱۰=۰$

$P=ab=a+b-۱$

$\Rightarrow (a+b-۵)(a+b+۲)=۰ \begin{cases} a+b=۵ \text{ ق} \\ a+b=-۲ \text{ غ ق} \end{cases}$

۱۰۸- (۱) $\sqrt{۲-x}=t \to \frac{۱}{t+۲}-\frac{۱}{۲-t}=\frac{t^۲}{۵t} \to \frac{۲}{t^۲-۴}=\frac{۱}{۵} \to t^۲=۱۴ \begin{cases} t=\sqrt{۱۴} \text{ ق} \\ t=-\sqrt{۱۴} \text{ غ ق} \end{cases}$

$\sqrt{۲-x}=\sqrt{۱۴} \to ۲-x=۱۴ \to x=-۱۲$ غ ق $\to$ ریشه حقیقی ندارد

۱۰۹- (۱) در هر نقطه داده شده جای x و y را جابجا کرده و در تابع صدق می‌دهیم اگر برقرار بود همان نقطه جواب است:

۱) $(-۲,۹) \to ۲۴-۴-۱۱=۹$ ✓ — ۲) $(-۳۱,۲) \to$ واضح است که به ازای $x=-۳۱$ جواب ۲ نمی‌شود

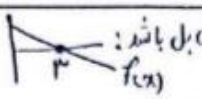
۳) $(۱۰,-۱) \to -۲۹۹۱\neq-۱$ — ۴) $(-۱,-۱۲) \to -۱۰\neq-۱۲$

۱۱۰- (۲)

$f(x)=\frac{3}{2}x-3$, $g(x)=\begin{cases}2x-1 & , x\geq 1\\ -x+2 & , x\leq 1\end{cases} \longrightarrow \begin{cases}\frac{3}{2}x-3=-2 \to x=\frac{2}{3} \to f^{-1}(-2)=\frac{2}{3}\\ g(\frac{2}{3})=-\frac{2}{3}+\frac{4}{3}=\boxed{\frac{2}{3}}\end{cases}$

$\begin{cases}g(0)=2\\ g(2)=\boxed{3}\end{cases} \Rightarrow g\circ f^{-1}(-2)\times g\circ g(0)=\frac{2}{3}\times 3=2$

۱۱۱- (۴) تابع $f(x)$ به عنوان مثال می‌تواند به صورت مقابل باشد:



برای دامنه $g(x)$ باید $x^2 f(x)\geq 0$ باشد و چون x^2 همواره نامنفی است، پس $f(x)$ نیز باید نامنفی باشد ←

$f(x)\geq 0$, $x\leq 3 \longrightarrow x\in[0,3] \to \begin{cases}0\\1\\2\\3\end{cases}$

۱۱۲- (۲)

$-\frac{\pi}{4}<2x<\frac{5\pi}{4} \longrightarrow \begin{cases}\sin(-\frac{\pi}{4})=-\frac{1}{2}\\ \sin(\frac{\pi}{2})=1\end{cases} \Rightarrow -\frac{1}{2}<\sin 2x\leq 1 \to -\frac{1}{2}<\frac{m-1}{2}\leq 1$

$\to -1<m\leq 5 \to m\in(-1,5]$

۱۱۳- (۳)

$\sin x+\cos x=\frac{4\sqrt{5}}{10} \to \sin^2 x+\cos^2 x=1=(\sin x+\cos x)^2-2\sin x\cos x \to 1=1/8-2\sin x\cos x$

$\to \sin x\cos x=0/4 \to \cot x=\frac{0/4}{\sin x} \to \tan x=\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{5}{2}\sin^2 x \to 0\leq\sin^2 x\leq 1 \to 0\leq\tan x\leq 2/5$

تنها $\frac{1}{2}$ در این بازه قرار می‌گیرد.

۱۱۴- (۴) چون تابع در $x=0$ پیوسته است، پس $a<0$ است و داریم:

$\begin{cases}c+|a|=\frac{5}{2}\\ c-|a|=-\frac{1}{2}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}c=1\\ |a|=\frac{3}{2}\to a=-\frac{3}{2}\end{cases} \Rightarrow ac=-\frac{3}{2}$

۱۱۵- (۲)

$\cos(x-\frac{\pi}{4})=\sin(\frac{\pi}{2}+(x-\frac{\pi}{4}))=\sin(\frac{\pi}{4}+x) \longrightarrow \sin^2(\frac{\pi}{4}+x)=1 \begin{cases}\sin(\frac{\pi}{4}+x)=1\\ \sin(\frac{\pi}{4}+x)=-1\end{cases}$

$\frac{\pi}{4}+x=\frac{\pi}{2}\to x=\frac{\pi}{4}$

$\frac{\pi}{4}+x=\frac{3\pi}{2}\to x=\frac{5\pi}{4}$ $\longrightarrow$ ۲ جواب

۱۱۶- (۳)

$\log_8 b=\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\log_2 3 \Rightarrow \frac{2}{3}+\log_8 9 \to \log_8\frac{b}{9}=\frac{2}{3}\to\frac{b}{9}=4\to b=\boxed{36}$

$3b-8=108-8=100 \longrightarrow \log 100=2$

۱۱۷- (۱)

$f(\frac{1}{2})=1 \to \sqrt[3]{2^{\frac{a}{2}+b}}=1 \to \frac{a}{2}+b=0 \to a=\boxed{-2b}$

$f(5)=8 \to \sqrt[3]{2^{5a+b}}=8 \to 5a+b=9 \to -9b=9 \to \begin{cases}b=-1\\ a=2\end{cases} \to a-b=2+1=3$

۱۱۸- (۴)

$a+b+3-1-1+0=0 \to a+b=\boxed{-1}$, $\sigma=2\to\sigma^2=4=\frac{(x_1-\bar{x})^2+\dots+(x_4-\bar{x})^2}{4}$

$\to a^2+b^2+9+1+1+0=24 \to a^2+b^2=13=(a+b)^2-2ab=13 \to ab=\boxed{-6} \Rightarrow \begin{cases}a=2\\ b=-3\end{cases}$

۱۱۹- (۳)

مجموع $=x$ ، مجموع $=y$

$\underbrace{\dots}_{n-1}, a, b, \underbrace{\dots}_{n-1}$

$\frac{a+b}{2}=3\to a+b=6$, $\frac{x+a}{n}=\frac{y+b}{n}-6 \to x+y+a+b=6n$

مجموع کل داده‌ها $=6n \to \bar{x}=\frac{6n}{2n}=3$

۱۲۰- (۴)

$\lim_{x\to -1^+}\frac{|x+1|+[x]}{x-[-x]}=\lim_{x\to -1^+}\frac{x+1-1}{x}=\lim_{x\to -1^+}\frac{x}{x}=1$

۱۲۱- (۱)

$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{ax^2+x+1}}{x+2}=\frac{1}{2}\to\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{a}\,x}{x}=\frac{1}{2}\to a=\boxed{\frac{1}{4}}$

$\lim_{x\to -1^-}-f(x)=\lim_{x\to -1^-}-\sqrt{\frac{1}{4}x^2+x+1}=-\frac{1}{2}$

۱۲۲- (۲)

$$\lim_{x\to1}\frac{2f(x)-1}{2x-1}=\frac{0}{0}\xrightarrow{H\circ P}\lim_{x\to1}\frac{2f'(x)}{2}=\lim_{x\to1}f'(x)=-\frac{1}{2}$$

$$f'(x)=\frac{\left(\sqrt{x}+\frac{x}{2\sqrt{x}}\right)(2x^2+x-1)-(x\sqrt{x})(4x+1)}{(2x^2+x-1)^2}\xrightarrow{x=1}f'(1)=-\frac{1}{2}$$

۱۲۳- (۳)

نقطه‌ی تماس: $(1, b+2)\longrightarrow f(1)=\frac{1+a}{a+1}=1=b+2\longrightarrow b=-1$

$f'(x)=\frac{1-a^2}{(ax+1)^2}\longrightarrow \underset{\text{شیب خط مماس}}{f'(1)=2}=\frac{1-a^2}{a^2+2a+1}\longrightarrow 3a^2+4a+1=0\begin{cases}a=-1 & \text{غ ق ق}\rightarrow x=1\\ a=-\frac{1}{3} & \text{ق ق ق}\end{cases}\Rightarrow a-b=-\frac{1}{3}+1=\frac{2}{3}$

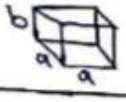
در این صورت ریشه مخرج می‌شود که غیرقابل قبول است

۱۲۴- (۱)

$y'=3x^2+2ax-2b\begin{cases}S=\frac{-2a}{3}=-2\rightarrow a=3\\ P=\frac{-2b}{3}=0\rightarrow b=0\end{cases}\longrightarrow y=x^3+3x^2-4$ ← صفر و ۲- ریشه‌های مشتق y هستند

نقاط اکسترمم $\longrightarrow (0,-4)\ ,\ (-2,0)\longrightarrow d=\sqrt{4+16}=2\sqrt{5}$

۱۲۵- (۲)



$V=a^2b=4\rightarrow b=\frac{4}{a^2}$

$S=a^2+4ab=a^2+\frac{16}{a}\longrightarrow S'=2a-\frac{16}{a^2}=0\longrightarrow a=2\ ,\ b=1$

$S=a^2+4ab=4+8=12$

۱۲۶- (۳)

تنها حالت مطلوب قرارگیری کتاب‌ها به صورت RRAARR است و تعداد کل حالات می‌شود:

$n(S)=4!\times2!=48$

۱۲۷- (۴)

دوتای اول هر دو پشت و دیگری رو بیاید $\rightarrow \frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$

از دوتای اول یکی پشت و از دوتای دوم یکی پشت $\rightarrow \binom{2}{1}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\binom{2}{1}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$

$\Rightarrow P(A)=\frac{1}{8}+\frac{1}{4}=\frac{3}{8}$

۱۲۸- (۳)

$BC: y=2x-3\xrightarrow[A(1,9)\text{ است و } BC]{\text{معادله } AH \text{ که عمود بر}}AH: y=-\frac{1}{2}x+\frac{19}{2}\Rightarrow 2x-3=-\frac{1}{2}x+\frac{19}{2}\rightarrow\begin{cases}x=5\\y=7\end{cases}$

$\longrightarrow A(1,9)\ ,\ H(5,7)\Rightarrow d_{AH}=\sqrt{4^2+2^2}=2\sqrt{5}$

۱۲۹- (۴)

چون DE و BC موازی هستند در نتیجه ارتفاع‌های وارد بر قاعده E برای دو مثلث CDE و BDE برابر است و در نتیجه چون در این دو مثلث ارتفاع و قاعده یکی هستند در نتیجه مساحت این دو مثلث برابر است.
(برابر)

۱۳۰- (۲)

$x^2+y^2+2y-4x=0\rightarrow\begin{cases}O(2,-1)\\r=\sqrt{5}\end{cases}\ ,\ x^2+y^2-2y-2=0\begin{cases}O'(0,1)\\r'=\sqrt{3}\end{cases}$

$OO'=\sqrt{4+4}=2\sqrt{2}=d\longrightarrow\underbrace{\sqrt{5}-\sqrt{3}}_{0/5}<\underbrace{2\sqrt{2}}_{2/8}<\underbrace{\sqrt{5}+\sqrt{3}}_{4/9}\Longrightarrow$ متقاطع