الف A

کنکور ۰۰

۲۲۱

A

گروه آموزشی ماز

تطابق آزمون های ماز با کنکور ۱۴۰۰

ریاضی - تجربی

%53

نیاز به هیچ گونه سوادی نیست؛ سوال ماز که دقیقا با ادرس ذکر شده در ازمون های ماز بوده رو بخون
بعدش سوال کنکور رو خودت حل کن :)

آزمون ۶ دوپینگ سوال ۲۷، آزمون ۱۹ طول سال سوال ۱۵۳ و آزمون ۱۱ طول سال سوال ۱۰۳

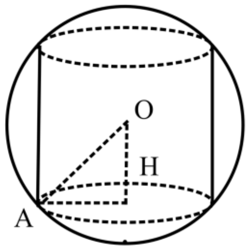
استوانه‌ای با بیش‌ترین حجم ممکن در یک کره به شعاع $\sqrt{۶}$ واحد محاط شده است. ارتفاع آن کدام است؟

۱) ۲ ۲) $۲\sqrt{۲}$ ۳) ۴ ۴) $۴\sqrt{۲}$

پاسخ: گزینه ۲

شعاع قاعده r و ارتفاع استوانه را h می‌نامیم. در مثلث OAH داریم:

$$r^۲+\left(\frac{h}{۲}\right)^۲=۶ \Rightarrow r^۲=۶-\frac{h^۲}{۴}$$



حجم استوانه $V=\pi r^۲h$ پس $V=\pi\left(۶h-\frac{h^۳}{۴}\right)$

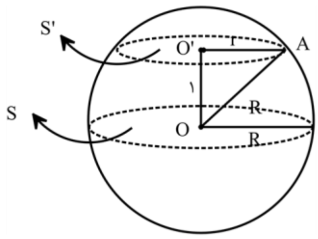
شرط ماکزیمم حجم، مشتق V نسبت به h صفر است، $۶-\frac{۳h^۲}{۴}=۰ \Rightarrow h^۲=۸$

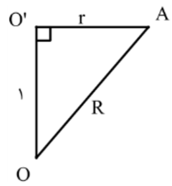
پس $h=۲\sqrt{۲}$.

صفحه‌ی P در تقاطع با کره‌ای به شعاع R، بیشترین سطح مقطع ممکن را ایجاد می‌کند، اگر P را یک واحد به موازات خود جابه‌جا کنیم، سطح مقطع ۲۵ درصد کاهش می‌یابد. R کدام است؟

۱) ۱/۵ ۲) ۲ ۳) ۳/۵ ۴) ۳

پاسخ: گزینه ۲





$$S=\pi R^۲ \quad , \quad S'=\frac{۳}{۴}S=\frac{۳}{۴}\pi R^۲ \qquad (۱)$$

$$R^۲=r^۲+۱^۲ \Rightarrow r^۲=R^۲-۱$$

$$S'=\pi r^۲ \Rightarrow S'=\pi(R^۲-۱) \qquad (۲)$$

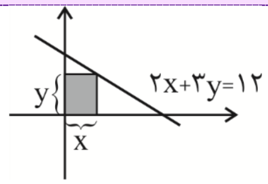
از مقایسه (۱) و (۲) داریم:

$$\pi(R^۲-۱)=\frac{۳}{۴}\pi R^۲ \Rightarrow \frac{۱}{۴}R^۲=۱ \Rightarrow R=۲$$

بیشترین مساحت مستطیلی که دو ضلع آن روی محورهای مختصات و یک رأس آن روی خط $۲x+۳y=۱۲$ است کدام است؟

۱) ۱۲ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۸

پاسخ: گزینه ۳



روش اوّل:

$$۲x+۳y=۱۲ \Rightarrow y=\frac{۱۲-۲x}{۳}$$

$$S=xy \Rightarrow S=x(\frac{۱۲-۲x}{۳})=\frac{۱۲x-۲x^۲}{۳}$$

$$S'=\frac{۱۲-۴x}{۳}=۰ \Rightarrow x=۳\ ,\ S(۳)=۶$$

روش دوم: اگر $ax+by=L$ و بخواهیم $S=kxy$ اکسترمم شود، باید $ax=by=\frac{L}{۲}$ باشد.

بنابراین $۲x=۳y=۶$ پس $x=۳\ ,\ y=۲$ و $\max(S)=۲\times۳=۶$

در دو تست اول مساله بهینه‌سازی کاملا شبیه کنکور ارزیابی شده است و در تست سوم، این مساله با روش دوم نیز بیان شده که بیانگر برابری متغیرها زمانی که در رابطه با تغییر نام متغیرها تغییری در رابطه ایجاد نشود... که احتمالا بسیار سرجلسه به بچه‌های مازی کمک کرده و زمان ذخیره کردن!

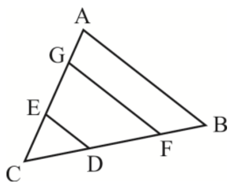
حداکثر مساحت جانبی استوانه‌ای که درون یک کره به شعاع $۴\sqrt{۲}$ محاط می شود، کدام است؟

(سوال ۱۴۶ کنکور سراسری ۱۴۰۰)

۱) ۳۲π ۲) ۶۴π ۳) $\frac{۲۵۶\pi}{۳}$ ۴) $\frac{۵۱۲\pi}{۳}$

آزمون ۱۱ دوپینگ سوال ۲۶ و آزمون ۱۹ دوپینگ سوال ۱۲

در مثلث زیر، FG و DE موازی AB هستند و $AG=CE$ و $AB=۱۲$ و $DE=۳$ طول FG کدام است؟



۱) ۹ ۲) ۸

۳) ۱۰ ۴) ۸/۵

پاسخ: گزینه ۱

روش اوّل: چون $CE=AG$ و $DE=۳$ باید FG هم به اندازهٔ سه واحد کمتر از AB باشد، یعنی $FG=۱۲-۳=۹$ درست مثل این که یک خط با شیب ۳ داشته باشیم، یعنی با اضافه شدن یک واحد به x، سه واحد به y اضافه بشه حالا یک نقطه روی خط با عرض ۱۲ هست به‌ازای یک واحد x کمتر بخواهیم y را حساب کنیم.

در واقع اگر طول CE یک واحد باشد، به‌ازای هر ۱ واحد حرکت روی خط CA از طرف C به A ۳ واحد افزایش طول روی خطوط موازی AB داریم.

روش دوم: با استفاده از قضیه تالس داریم:

$$\frac{CE}{CA}=\frac{ED}{AB}\xrightarrow[EG=y]{CE=AG=x}\frac{x}{۲x+y}=\frac{۳}{۱۲}$$

$$\frac{CE}{CG}=\frac{ED}{FG}\rightarrow\frac{x}{x+y}=\frac{۳}{FG}$$

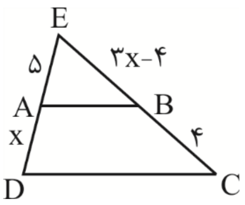
و از طرفی:

$$\frac{x}{۲x+y}=\frac{۳}{۱۲}\Rightarrow \frac{x}{۲x+y-x}=\frac{x}{x+y}=\frac{۳}{۱۲-۳}=\frac{۳}{۹}$$

پس:

$$\frac{۳}{FG}=\frac{۳}{۹}\Rightarrow FG=۹$$

در شکل روبه‌رو، مساحت ذوزنقه ABCD چند برابر مساحت مثلث EAB است؟



۱) $\frac{۲۵}{۹}$ ۲) $\frac{۱۶}{۹}$

۳) $\frac{۹}{۴}$ ۴) $\frac{۲۵}{۱۶}$

پاسخ: گزینه ۲

با توجّه به آن که AB موازی DC است، پس:

$$\frac{AE}{AD}=\frac{EB}{BC}$$

$$\Rightarrow \frac{۵}{x}=\frac{۳x-۴}{۴}\Rightarrow ۳x^{۲}-۴x-۲۰=۰\Rightarrow \begin{cases} x=-۲ & \text{غ‌ق‌ق} \\ x=\frac{۱۰}{۳} \end{cases}$$

از طرفی دو مثلث EAB و EDC متشابه هستند به‌طوریکه $\frac{۵}{۳}=\frac{۱۰}{۶}=\frac{EC}{EB}=$ نسبت تشابه، پس نسبت مساحت‌ها $\frac{۲۵}{۹}$ است.

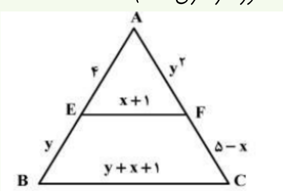
مساحت ذوزنقه را $S_۱$ و مساحت مثلث EAB را $S_۲$ فرض کنیم، آنگاه:

$$\frac{S_{EDC}}{S_{EAB}}=\frac{۲۵}{۹}\Rightarrow \frac{S_۱+S_۲}{S_۲}=\frac{۲۵}{۹}\Rightarrow \frac{S_۱}{S_۲}=\frac{۲۵}{۹}-۱=\frac{۱۶}{۹}$$

دو تست با ساختار مشابه، به این شکل که هر دو در مورد نحوه حرکت روی یک ضلع بحث می‌کنند.

در شکل زیر EF موازی BC است. مقدار $y-۲x$، کدام است؟

(سوال ۱۵۴ کنکور سراسری ۱۴۰۰)



۱) -۴ ۲) -۲

۳) ۲ ۴) ۴

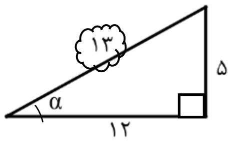
آزمون ۴ طی سال سوال ۱۰۵، آزمون تعیین سطح دوپینگ سوال ۱۵ و آزمون ۱۰ دوپینگ سوال ۱۲

اگر $\tan\alpha=-\frac{۵}{۱۲}$ و α در ربع دوم مثلثاتی باشد، حاصل عبارت زیر کدام است؟

$$\sin(\alpha-\frac{۳\pi}{۲})\cot(\frac{۱۱\pi}{۲}-\alpha)-\cos(\frac{۷\pi}{۲}+\alpha)$$

۱) -۱ ۲) ۱ ۳) ۰ ۴) ۲

پاسخ: گزینه ۳



$$\longrightarrow \sin\alpha = \frac{۵}{۱۳}$$
$$\longrightarrow \cos\alpha = -\frac{۱۲}{۱۳}$$
$$\longrightarrow \cot\alpha = -\frac{۱۲}{۵}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin(\alpha - \frac{۳\pi}{۲}) = -\sin(\frac{۳\pi}{۲} - \alpha) = \cos\alpha \\ \cot(\frac{۱۱\pi}{۲} - \alpha) = \cot(\frac{۱۲\pi}{۲} - \frac{\pi}{۲} - \alpha) \\ = \cot(-\frac{\pi}{۲} - \alpha) = -\cot(\frac{\pi}{۲} + \alpha) = \tan\alpha \\ \cos(\frac{۷\pi}{۲} + \alpha) = \cos(\frac{۸\pi}{۲} - \frac{\pi}{۲} + \alpha) = \\ \cos(-\frac{\pi}{۲} + \alpha) = \cos(\frac{\pi}{۲} - \alpha) = \sin\alpha \end{cases}$$

$$(\cos\alpha)(\tan\alpha) - \sin\alpha = (\frac{-۱۲}{۱۳})(\frac{-۵}{۱۲}) - \frac{۵}{۱۳} = ۰$$

اگر $\tan(\frac{۳\pi}{۲} - x) = ۲$ باشد، مقدار $\sin(۲x - \frac{\pi}{۲})$ کدام است؟

۱) $-\frac{۳}{۵}$ ۲) $-\frac{۴}{۵}$ ۳) $\frac{۳}{۵}$ ۴) $\frac{۴}{۵}$

پاسخ: گزینه ۱

نکته:

$$\cos ۲\alpha = \cos^۲\alpha - \sin^۲\alpha$$

$$\tan(\frac{۳\pi}{۲} - x) = \cot x = ۲ \Rightarrow \begin{cases} \sin x = \frac{۱}{\sqrt{۵}} , \cos x = \frac{۲}{\sqrt{۵}} \\ \sin x = -\frac{۱}{\sqrt{۵}} , \cos x = -\frac{۲}{\sqrt{۵}} \end{cases}$$

$$\sin(۲x - \frac{\pi}{۲}) = -\cos ۲x = -(\cos^۲ x - \sin^۲ x) = -(\frac{۴}{۵} - \frac{۱}{۵}) = -\frac{۳}{۵}$$

اگر $\tan\frac{۱۴\pi}{۵} = k$ باشد، $\sin\frac{۲\pi}{۵}$ برابر کدام است؟

۱) $\frac{۲k}{۱+k^۲}$ ۲) $\frac{-k}{۱+k^۲}$ ۳) $\frac{k}{۱+k^۲}$ ۴) $\frac{-۲k}{۱+k^۲}$

پاسخ: گزینه ۴

$$\frac{۱۴\pi}{۵} = ۳\pi - \frac{\pi}{۵} \Rightarrow \tan\frac{۱۴\pi}{۵} = -\tan\frac{\pi}{۵} = k$$

بنابراین: $\tan\frac{\pi}{۵} = -k$

(راستی حتماً $k < ۰$ چون $۰ < \tan\frac{\pi}{۵}$)

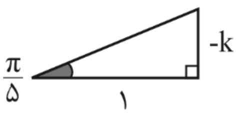
از طرفی:

$$\sin ۲x = ۲\sin x \cos x$$

پس:

$$\sin\frac{۲\pi}{۵} = ۲\sin\frac{\pi}{۵}\cos\frac{\pi}{۵}$$

برای به‌دســـت آوردن $\sin\frac{\pi}{۵}$ و $\cos\frac{\pi}{۵}$ از روی $\tan\frac{\pi}{۵}$ دو راه داری یا بری ســـراغ فرمول‌ها یا از تعریف نســـبت‌های مثلثاتی اســـتفاده کنی. ببین این خیلی راحت‌تره:



$$\xrightarrow{\text{فیثاغورث}} \text{وتر} = \sqrt{۱+k^۲}$$

خلاصه با توجّه به تعریف سینوس و کسینوس داریم:

$$\cos\frac{\pi}{۵} = \frac{۱}{\sqrt{۱+k^۲}} \ , \ \sin\frac{\pi}{۵} = \frac{-k}{\sqrt{۱+k^۲}} \Rightarrow \sin\frac{۲\pi}{۵} = \frac{-۲k}{۱+k^۲}$$

اگر هم دوست داری از فرمول‌ها بری اینجوریه:

$$۱+\tan^۲\alpha = \frac{۱}{\cos^۲\alpha} \Rightarrow ۱+k^۲ = \frac{۱}{\cos^۲\frac{\pi}{۵}} \Rightarrow \cos\frac{\pi}{۵} = \frac{۱}{\sqrt{۱+k^۲}}$$

$$\sin^۲ x+\cos^۲ x = ۱ \Rightarrow \sin^۲\frac{\pi}{۵} = ۱-\frac{۱}{۱+k^۲} = \frac{k^۲}{۱+k^۲}$$

$$\Rightarrow \sin\frac{\pi}{۵} = \frac{|k|}{\sqrt{۱+k^۲}} \xrightarrow{(k<۰ \qquad)} \sin\frac{\pi}{۵} = \frac{-k}{\sqrt{۱+k^۲}}$$

درست فوق رابطه بین تانژانت آلفا با سینوس و کسینوس دوآلفا بیان گردیده و همچنین می‌توان به کمک تعریف نسبت‌های مثلثاتی، سایر نسبت‌های مورد نیاز را به دست آورد و در انتها فرمول خواسته شده را محاسبه کرد... اونهایی که ماز امتحان دادن، در حل این سوال کنکور خیلی بهشون کمک شده..

اگر زاویه α در ناحیه سوم مثلثاتی و $\tan(\alpha) = \frac{۳}{۴}$ باشد، مقدار $\frac{\cos(۲\alpha-\frac{\pi}{۲})+\cos(\alpha+\pi)}{\cot(۲\alpha)}$ ، کدام است؟ *(سوال ۱۳۰ کنکور سراسری ۱۴۰۰)*

۱) $-\frac{۹۶}{۱۷۵}$ ۲) $\frac{۱۰۵۶}{۱۷۵}$ ۳) $\frac{۹۶}{۱۷۵}$ ۴) $-\frac{۱۰۵۶}{۱۷۵}$

آزمون ۱۶ دوپینگ سوال ۳

مجموعه جواب نامعادلهٔ $۱ < \frac{۲x-۱}{x-۱} < ۳$ کدام است؟

۱) $R-[۰,۱]$ ۲) $(۰,۱)$ ۳) $R-[۰,۲]$ ۴) $(۰,۲)$

پاسخ: گزینه ۳

روش حل: استفاده از اختلاف گزینه‌ها.

عددی را انتخاب می‌کنیم که در دو گزینه باشد و در دو گزینه نباشد، مثل $x = ۴$ (در گزینه‌های ۱ و ۳ هست و در گزینه‌های ۲ و ۴ نیست) به‌ازای $x = ۴$ نامعادله به‌صورت زیر درمی‌آید که درست است.

$$۱ < \frac{۲x-۱}{x-۱} < ۳ \xrightarrow{x=۴} ۱ < \frac{۷}{۳} < ۳$$

بنابراین یکی از گزینه‌های شامل ۴، یعنی گزینه‌های ۱ یا ۳ درست هستند، حال عدد دیگری انتخاب می‌کنیم که در یکی از گزینه‌های ۱ یا ۳ باشد و در دیگری نباشد، مثل $x=\frac{۳}{۲}$ که در گزینه ۱ هست و در گزینه ۳ نیست به‌ازای $x=\frac{۳}{۲}$ داریم:

$$۱<\frac{۲x-۱}{x-۱}<۳ \xrightarrow{x=\frac{۳}{۲}} ۱<\frac{۲}{\frac{۱}{۲}}<۳ \Rightarrow ۱<۴<۳$$

که غلط است، پس گزینه ۱ غلط است و جواب گزینه ۳ می‌باشد.

ایده اختلاف گزینه‌ها، یعنی از اختلاف گزینه‌ها عددی را انتخاب کنید که در دو گزینه باشد و در دو گزینه نباشد، در بسیاری از سوالات ماز تکرار شده و اونایی که به روش‌های دوم ما توجه کرده بودن، حتما سر کنکور کلی کیف کردن!

دامنهٔ تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{\log_۴(x^۲-x-۲)}{\sqrt{x^۲-۱}+۱}$ **، کدام است؟**

(سوال ۱۳۲ کنکور سراسری ۱۴۰۰)

۱) $(-\infty,-۱)\cup(۲,+\infty)$　　۲) $(-۱,۲)$　　۳) $(-\infty,-۲)\cup(۱,+\infty)$　　۴) $(-۲,۱)$

آزمون تعیین سطح دوپینگ سوال ۶

اگر دامنهٔ $y=۳f(۲x-۱)+۱$ **برابر** $[-۲,۱]$ **باشد، دامنهٔ تابع** $g(x)=۲f(۳x+۱)-۱$ **کدام است؟**

۱) $[-۲,۰]$　　۲) $[-۱۴,۴]$　　۳) $\left[-\frac{۷}{۲},۴\right]$　　۴) $\left[-\frac{۵}{۶},۰\right]$

پاسخ: گزینه ۱

روش حل: از اختلاف گزینه‌ها استفاده می‌کنیم:

$x=۴$ در گزینه‌های ۲ و ۳ هست و در ۱ و ۴ نیست و به‌ازای آن داریم:

$$g(۴)=۲f(۱۳)+۱$$

از طرفی اگر قرار باشد عبارت داخل پرانتز اوّل برابر ۱۳ شود باید: $(۱۳=۲x-۱ \Leftarrow x=۷)$ که در دامنه نیست، پس گزینه‌های ۲ و ۳ غلط هستند.

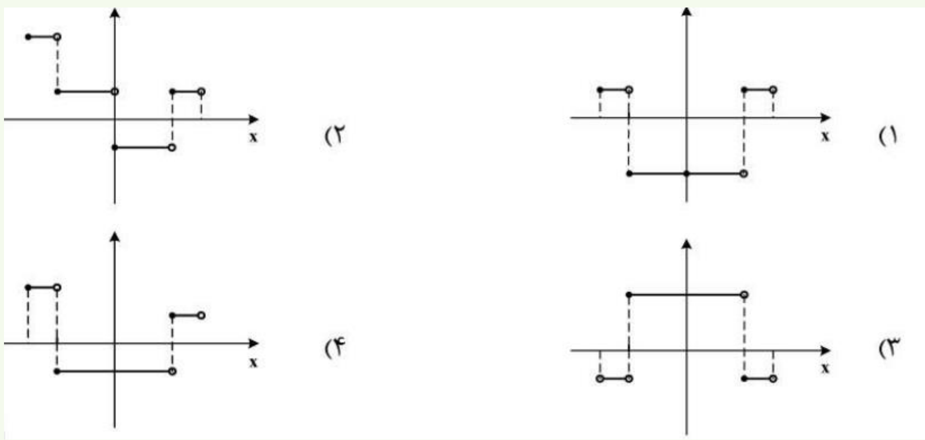
حال عدد دیگری را انتخاب می‌کنیم که در یکی از گزینه‌های ۱ و ۴ باشد و در دیگری نباشد، مثلاً $x=-۲$ که در گزینه ۱ هست و در ۴ نیست.

به‌ازای $x=-۲$ داریم: $g(-۲)=۲f(-۵)+۱$

اگر عبارت داخل پرانتز تابع اوّل را برابر ۵- قرار دهیم، داریم: $۲x-۱=-۵ \Rightarrow x=-۲$ که در دامنه هست، پس گزینه ۱ که شامل ۲- بود، درست است.

همان طور که گفته شد ایده اختلاف گزینه‌ها را ما خیلی درماز به اون تاکید کردیم؛ که به راحتی سوال کنکورم ازش اومد!

نمودار تابع $y=۲[\![۳x]\!]-۱$ به ازای $-\frac{۱}{۲}\le x<\frac{۱}{۲}$ کدام است؟　*(سوال ۱۳۳ کنکور سراسری ۱۴۰۰)*



آزمون ۲ دوپینگ سوال ۸ و آزمون ۳ دوپینگ سوال ۸

اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $۶x^۲-۹x+m=۰$ و $\frac{۲}{\alpha}-۱$ و $\frac{۲}{\beta}-۱$ ریشه‌های معادلهٔ $x^۲-۷x+۴=۰$ باشند، مقدار m کدام است؟

۱) -۲ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) $\frac{۱}{۳}$

پاسخ: گزینه ۲

نکته: اگر α و β ریشه‌ها (صفرهای) معادلهٔ درجه دوم $ax^۲+bx+c=۰$ باشند، اوّلاً α و β در معادله صدق می‌کنند، ثانیاً:

$$\begin{cases}\alpha+\beta=-\frac{b}{a}\\ \alpha\beta=\frac{c}{a}\end{cases}$$

با توجّه به آنکه α و β ریشه‌های معادلهٔ $۶x^۲-۹x+m=۰$ هستند، پس:

$$\begin{cases}\alpha+\beta=\frac{۳}{۲}\\ \alpha\beta=\frac{m}{۶}\end{cases}$$

از طرفی $\frac{۲}{\alpha}-۱$ و $\frac{۲}{\beta}-۱$ ریشه‌های $x^۲-۷x+۴=۰$ هستند، پس:

$$\begin{cases}\frac{۲}{\alpha}-۱+\frac{۲}{\beta}-۱=۷\Rightarrow\frac{۲}{\alpha}+\frac{۲}{\beta}=۹\Rightarrow\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=\frac{۹}{۲}\\ (\frac{۲}{\alpha}-۱)(\frac{۲}{\beta}-۱)=۴\Rightarrow\frac{۴}{\alpha\beta}-۲\underbrace{(\frac{۱}{\alpha}+\frac{۱}{\beta})}_{\frac{۹}{۲}}+۱=۴\Rightarrow\frac{۴}{\alpha\beta}-۹+۱=۴\end{cases}$$

$$\Rightarrow\frac{۴}{\alpha\beta}=۱۲\Rightarrow\alpha\beta=\frac{۱}{۳}\Rightarrow\frac{m}{۶}=\frac{۱}{۳}\Rightarrow m=۲$$

هرگاه α , β ریشه‌های $۲x(x-۲)=۳$ باشند، معادلهٔ درجه دوم با ریشه‌های $\frac{۲}{۱-\beta}$, $\frac{۲}{۱-\alpha}$ کدام است؟

۱) $x^۲-۵=۰$ ۲) $x^۲-۸=۰$ ۳) $۸x^۲-۵=۰$ ۴) $۵x^۲-۸=۰$

پاسخ: گزینه ۴

نکته ۱: مجموع و حاصل‌ضرب ریشه‌های $ax^۲+bx+c=۰$ به‌ترتیب برابر $\frac{-b}{a}$, $\frac{c}{a}$ است.

نکته ۲: اگر $S=\alpha+\beta$ و $P=\alpha\beta$ باشند، معادلهٔ درجه دومی که ریشه‌های آن α و β باشد به‌صورت $x^۲-sx+P=۰$ می‌باشد.

ابتدا دقّت کنید α و β ریشه‌های معادلهٔ $۲x^۲-۴x-۳=۰$ هستند پس $\alpha+\beta=۲$ و $\alpha\beta=\frac{-۳}{۲}$.

حال باید $S=\frac{۲}{۱-\beta}+\frac{۲}{۱-\alpha}$ و $P=\frac{۲}{۱-\beta}\cdot\frac{۲}{۱-\alpha}$ را محاسبه کنیم.

$$S=\frac{۲}{۱-\alpha}+\frac{۲}{۱-\beta}=\frac{۲-۲\beta+۲-۲\alpha}{(۱-\alpha)(۱-\beta)}=\frac{۴-۲(\alpha+\beta)}{۱-(\alpha+\beta)+\alpha\beta}=\frac{۴-۲(۲)}{۱-۲+(-\frac{۳}{۲})}=۰$$

$$P=\frac{۲}{۱-\alpha}\,\frac{۲}{۱-\beta}=\frac{۴}{۱-(\alpha+\beta)+\alpha\beta}=\frac{۴}{۱-۲-\frac{۳}{۲}}=\frac{-۸}{۵}$$

جواب: $x^{2}-Sx+P=0 \Rightarrow x^{2}-\frac{8}{5}=0 \Rightarrow 5x^{2}-8=0$

ساختن معادله درجه۲ جدید بر حسب ریشه‌های معادلهٔ درجه۲ داده شده، بر اساس اهمیتش در تست‌های ماز زیاد تکرار شد که نتیجه‌اش هم اونایی که ماز امتحان دادن قطعا سر جلسه دیدن!

فرض کنید x_1 و x_2 ریشه‌های معادله $x=5-x^{2}$ باشند. $\frac{1}{(x_2+1)^{3}}$ و $\frac{1}{(x_1+1)^{3}}$، ریشه‌های کدام معادله هستند؟

(سوال ۱۲۸ کنکور سراسری ۱۴۰۰)

۱) $125x^{2}+16x=1$ ۲) $125x^{2}=16x+1$ ۳) $125x^{2}=12x+1$ ۴) $125x^{2}+12x=1$

آزمون ۱۲ طول سال سوال ۱۳۰

اگر $\alpha=\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}$ و $\beta=\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7}$ باشند، حاصل عبارت $(\alpha^{2}\beta-\alpha\beta^{2})(\alpha^{2}+\beta^{2}+\alpha\beta)$، کدام است؟

۱) ۷ ۲) ۷- ۳) ۱۴ ۴) ۱۴-

پاسخ: گزینه ۴

عبارت خواسته شده ی سوال را تجزیه می‌کنیم:

$$(\alpha\beta)(\alpha-\beta)(\alpha^{2}+\beta^{2}+\alpha\beta)=(\alpha\beta)(\alpha^{3}-\beta^{3})=(50-49)(-14)=-14$$

مازیا از قبل شبیه این تست را در آزمون‌های طول سال دیدن که ایده های شبیه داشتند با اتحادهای مختلف!

فرض کنید $a=\sqrt[4]{\sqrt{6}-2}$ و $b=\sqrt[4]{\sqrt{6}+2}$. مقدار $(a^{2}+b^{2}-2ab)^{2}(a^{2}+b^{2}+2ab)^{2}$، کدام است؟

(سوال ۱۲۶ کنکور سراسری ۱۴۰۰)

۱) $4(2+\sqrt{3})$ ۲) $4(2-\sqrt{3})$ ۳) $16(2+\sqrt{3})$ ۴) $16(2-\sqrt{3})$

آزمون ۱۷ دوپینگ سوال ۱۸، آزمون ۵ دوپینگ سوال ۲ و آزمون ۱۶ دوپینگ سوال ۱۶

تابع $f(x)=[\frac{4-x}{3}]+a[\frac{x-1}{3}]$ در $x=-2$ پیوسته است، مقدار a کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) صفر ۴) a یافت نمی‌شود

پاسخ: گزینه ۴

نکته: f در $x=-2$ پیوسته است، هرگاه $\lim\limits_{x\to -2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -2^+} f(x)=f(-2)$

حدود یک طرفه را در $x=-2$ پیدا می‌کنیم:

$$\text{حد چپ}=\lim_{x\to -2^-} f(x)=\lim_{x\to -2^-}[\frac{4-x}{3}]+a[\frac{x-1}{3}]=2+a(-2)=2-2a$$

$$\text{حد راست}=\lim_{x\to -2^+} f(x)=1-a$$

شرط آن که حد داشته باشد آن است که:

$2-2a=1-a \Rightarrow \underline{a=1}$

امّا $f(-2)=2+a(-1)=2-a$

در این صورت نمی‌توان عددی برای a پیدا کرد که همزمان سه عبارت $۲a-۲$ و $a-۱$ و $a-۲$ با هم برابر باشند. پس a یافت نمی‌شود.

هرگاه $f(x)=۲[-x]+۳[۲x]$ در کدام نقطه با طول صحیح، مجموع حد چپ و راست تابع برابر ۲۷ است؟

۱) ۵ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینه ۴

فرض کنیم $n\in\mathbb{Z}$ و جواب سؤال باشد، ابتدا حد چپ و حد راست تابع را در نقطه‌ای به طول n به‌دست می‌آوریم.

$$\lim_{x\to n^+} f(x)=\lim_{x\to n^+} ۲[-(n^+)]+۳[۲(n^+)]=۲(-n-۱)+۳\times۲n=۴n-۲$$

$$\lim_{x\to n^-} f(x)=\lim_{x\to n^-} ۲[-(n^-)]+۳[۲(n^-)]=-۲n+۳(۲n-۱)=۴n-۳$$

جمع حد چپ و راست برابر ۲۷ است، پس:

$$۴n-۲+۴n-۳=۲۷ \Rightarrow ۸n=۳۲ \Rightarrow \underline{n=۴}$$

حاصل $\lim_{x\to\left(\frac{۵\pi}{۶}\right)^+}\frac{\cos x}{۲\sin x-۱}$ ، $\lim_{x\to\left(\frac{\pi}{۶}\right)^+}\frac{\cos x}{۲\sin x-۱}$ به ترتیب از راست به چپ کدام است؟

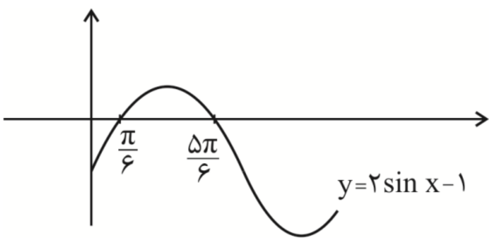
۱) $-\infty, +\infty$ ۲) $+\infty, +\infty$ ۳) $-\infty, -\infty$ ۴) $+\infty, -\infty$

پاسخ: گزینه ۲

$$\lim_{x\to\left(\frac{۵\pi}{۶}\right)^+}\frac{\cos x}{۲\sin x-۱}=\frac{\cos\frac{۵\pi}{۶}}{۲\sin\left(\frac{۵\pi}{۶}\right)^+-۱}=\frac{-\frac{\sqrt{۳}}{۲}}{۰^-}=+\infty$$

توجّه کنید، $y=۲\sin x-۱$ در $\frac{۵\pi}{۶}$ نزولی است، بنابراین حاصل آن به‌ازای $\left(\frac{۵\pi}{۶}\right)^+$ از صفر کمتر می‌شود.

این مطلب از روی نمودار هم مشخّص است.



همین‌طور زمانی‌که $x\to\frac{\pi}{۶}^+$ ، آنگاه $(۲\sin x-۱)\to ۰^+$ چون $۲\sin x-۱$ در $x=\frac{\pi}{۶}$ صعودی است.

بنابراین:

$$\lim_{x\to\left(\frac{\pi}{۶}\right)^+}\frac{\cos x}{۲\sin x-۱}=\frac{\cos\frac{\pi}{۶}}{۲\sin\left(\frac{\pi}{۶}\right)^+-۱}=\frac{\frac{\sqrt{۳}}{۲}}{۰^+}=+\infty$$

توجّه کنید، اگر $\lim_{x\to a} f(x)=L$ و f در $x=a$ پیوسته باشد $\left(L=f(a)\right)$، در این صورت:

اگر تابع f در $x=a$ صعودی باشد، داریم:

$$(x\to a^+)\Rightarrow\left(f(x)\to L^+\right)$$

$$(x\to a^-)\Rightarrow\left(f(x)\to L^-\right)$$

و اگر تابع f در $x=a$ نزولی باشد داریم:

$$(x \to a^+) \Rightarrow \left(f(x) \to L^-\right)$$
$$(x \to a^-) \Rightarrow \left(f(x) \to L^+\right)$$

درتست‌های فوق محاسبه حد توابع براکتی ارزیابی شده است. از طرفی در واقع در پاسخ به سوال زیر یک ایده‌ی بسیار پر تکراری که در آزمون های ماز بوده است، مطرح شده و آن هم رفتار تابع g در همسایگی $x=\alpha$ است که به خوبی اونایی که مازی بودن، حالشو بردن!

مقدار $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{6}^-} [2\sin x - 1]$ **، کدام است؟** *(سوال ۱۳۹ کنکور سراسری ۱۴۰۰)*

۱) -1 ۲) صفر
۳) ۱ ۴) وجود ندارد.

آزمون ۱ طول سال سوال ۹۴، آزمون ۱۶ دوپینگ سوال ۴ و آزمون ۱۸ طول سال سوال ۱۳۰

قرینه نمودار تابع $y=\sqrt{x}$ را نسبت به محور y ها رسم کرده، سپس k واحد به طرف x های مثبت انتقال می‌دهیم. اگر طول نقطه تلاقی منحنی حاصل با $f(x)=x$ برابر ۲ باشد، $f(k-1)$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

نمودار تابع $f(x)=|x|$ را چهار واحد به سمت راست انتقال می‌دهیم، سپس نسبت به محور x ها قرینه می‌کنیم و در نهایت، پنج واحد به بالا انتقال می‌دهیم، مجموع طول نقاط برخورد نمودار جدید با نمودار تابع f کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۶ ۳) ۴ ۴) ۵

پاسخ: گزینه ۳

$$\xrightarrow[\text{راست}]{\text{۴ واحد به سمت}} 5-|x-4| \quad |x| \xrightarrow[\text{محور } x]{\text{قرینه نسبت به}} |x-4| \xrightarrow{\text{۵ واحد به سمت}} -|x-4|$$

در نهایت، معادلهٔ $|x| = 5 - |x-4|$ را حل می‌کنیم و مجموع ریشه‌ها را مشخّص می‌کنیم.

$$|x|+|x-4|=5 \Rightarrow \begin{cases} \xrightarrow{x>4} 2x-4=5 \Rightarrow x=\frac{9}{2} \\ \xrightarrow{x<0} -2x+4=5 \Rightarrow x=-\frac{1}{2} \end{cases}$$

و مجموع ریشه‌ها برابر $4=\frac{9}{2}+\left(-\frac{1}{2}\right)$ است.

نکته: معادلهٔ $|x-\alpha|+|x-\beta|=k$ به شرطی که $k>|\alpha-\beta|$ باشد، دارای دو ریشه است و مجموع دو ریشه، دو برابر محور تقارن تابع $y=|x-\alpha|+|x-\beta|$ (یعنی $x_0=\frac{\alpha+\beta}{2}$) است، بنابراین مجموع ریشه‌ها برابر $\alpha+\beta$ است.

نمودار تابع $y=\sqrt{1-2x}$ را در امتداد محور xها، ۱ واحد در جهت مثبت و سپس در امتداد محور yها، ۱ واحد در جهت منفی انتقال می‌دهیم. اگر نقطه برخورد نمودار جدید و نمودار اولیه را A بنامیم. مجموع طول و عرض نقطه A کدام است؟

۱) $\frac{5}{8}$ ۲) $\frac{7}{8}$ ۳) $\frac{9}{8}$ ۴) $\frac{11}{8}$

پاسخ: گزینه ۲

اول ضابطه تابع جدید را بدست می‌آوریم:

$$y=\sqrt{۱-۲x}\xrightarrow[(x\to x-۱)]{\text{۱ واحدراست}}y=\sqrt{۱-۲(x-۱)}=\sqrt{-۲x+۳}\xrightarrow{\text{۱ واحد پایین}}y=\sqrt{-۲x+۳}-۱$$

ضابطه تابع جدید و تابع اولیه را برابر قرار می‌دهیم:

$$\sqrt{-۲x+۳}-۱=\sqrt{-۲x+۱}\xrightarrow{\text{توان ۲}}\cancel{-۲x}+۳+۱-۲\sqrt{-۲x+۳}=\cancel{-۲x}+\cancel{۱}\Rightarrow$$

$$\sqrt{-۲x+۳}=\frac{۳}{۲}\xrightarrow{\text{توان ۲}}-۲x+۳=\frac{۹}{۴}\Rightarrow ۲x=\frac{۳}{۴}\Rightarrow x=\frac{۳}{۸}$$

با جای‌گذاری $x=\frac{۳}{۸}$ ، در ضابطه تابع اولیه (یا جدید)، عرض نقطه برخورد را حساب می‌کنیم:

$$y_A=\sqrt{۱-۲(\frac{۳}{۸})}=\frac{۱}{۲}$$

پس نقطه برخورد دو تابع، $A(\frac{۳}{۸},\frac{۱}{۲})$ است و داریم:

$$x_A+y_A=\frac{۳}{۸}+\frac{۱}{۲}=\frac{۷}{۸}$$

و باز هم وجه اشتراک کنکور با ماز... در هر دو سوال روش انتقال تابع مورد بررسی قرار گرفته است.

قرینه نمودار تابع $y=۲+\sqrt{x-۱}$ را نسبت به خط $y=x$ رسم کرده و سپس نمودار حاصل را ۲ واحد درجهت مثبت محور x ها و ۳ واحد در جهت منفی محور y ها انتقال می‌دهیم و آن را $y=g(x)$ می‌نامیم. مقدار $g(۴)$ کدام است؟

(سوال ۱۴۰ کنکور سراسری ۱۴۰۰)

۱) ۳ ۲) -۳ ۳) -۲ ۴) -۴

آزمون ۱۹ طول سال سوال ۱۴۵ و آزمون ۱۳ طول سال سوال ۱۱۸

اختلاف بزرگترین و کوچکترین زاویهٔ حاده‌ای که در رابطهٔ $\cos^۴ ۴x-\sin^۴ ۴x=\sin\frac{۵\pi}{۶}$ صدق می‌کند، چند رادیان است؟

۱) $\frac{۳\pi}{۸}$ ۲) $\frac{۱۱\pi}{۲۴}$ ۳) $\frac{\pi}{۳}$ ۴) $\frac{۵\pi}{۱۲}$

پاسخ: گزینه ۴

معادله را ساده می‌کنیم:

$$\cos^۴ ۴x-\sin^۴ ۴x=\sin\frac{۵\pi}{۶}\to\underbrace{(\cos^۲ ۴x-\sin^۲ ۴x)}_{\cos ۸x}\underbrace{(\cos^۲ ۴x+\sin^۲ ۴x)}_{۱}=\frac{۱}{۲}\to$$

$$\cos ۸x=\frac{۱}{۲}\to\cos ۸x=\cos\frac{\pi}{۳}\to ۸x=۲k\pi\pm\frac{\pi}{۳}\to x=\frac{k\pi}{۴}\pm\frac{\pi}{۲۴}$$

تمام جواب‌های بین ۰ تا $\frac{\pi}{۲}$ را می‌نویسیم:

$$\begin{cases} x = \dfrac{k\pi}{4} + \dfrac{\pi}{24} \xrightarrow{k=0,1} \dfrac{\pi}{24}, \dfrac{7\pi}{24} \\ x = \dfrac{k\pi}{4} - \dfrac{\pi}{24} \xrightarrow{k=1,2} \dfrac{5\pi}{24}, \dfrac{11\pi}{24} \end{cases}$$

اختلاف بزرگترین وکوچکترین جواب برابر است با:

$$\frac{11\pi}{24} - \frac{\pi}{24} = \frac{5\pi}{12}$$

جواب کلی معادله‌ی $\text{Cos}^2 3x - \text{Cos}^4 3x = \text{Sin}^4 (\frac{5\pi}{4})$ کدام است؟

۱) $\frac{k\pi}{2} \pm \frac{\pi}{12}$ ۲) $\frac{k\pi}{2} \pm \frac{\pi}{24}$ ۳) $\frac{k\pi}{6} \pm \frac{\pi}{12}$ ۴) $\frac{k\pi}{4} \pm \frac{\pi}{24}$

پاسخ: گزینه ۳

ابتدا معادله را ساده‌تر می‌کنیم:

$$\text{Cos}^2 3x(1 - \text{Cos}^2 3x) = \text{Cos}^2 3x \,\text{Sin}^2 3x = (\frac{1}{2}\text{Sin}\, 6x)^2 = (-\frac{\sqrt{2}}{2})^4$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4}\text{Sin}^2 6x = \frac{1}{4} \Rightarrow \text{Sin}^2 6x = 1$$

$$\Rightarrow \text{Sin}\, 6x = \pm 1$$

$$\Rightarrow 6x = k\pi \pm \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{k\pi}{6} \pm \frac{\pi}{12}$$

حل معادلات مثلثاتی بسیار در تست‌های ماز تاکید شده و نتیجه‌اش هم می‌بینید که کنکور ازش تست اومده!

تعداد جواب‌های معادلهٔ مثلثاتی $\cos^2(x) - \sin^2(x)\cos(3x) = 1$ در فاصله $[0, 2\pi]$، کدام است؟

(سوال ۱۳۱ کنکور سراسری ۱۴۰۰)

۱) ۱ ۲) ۳ ۳) ۵ ۴) ۶

آزمون ۱۹ دوپینگ سوال ۱۶

اگر $x = \sqrt{2}$ یک جواب معادلهٔ $8\log_4^x + m\log_x^2 = 6$ باشد، جواب دیگر آن کدام است؟

۱) $2\sqrt{2}$ ۲) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۳) ۲ ۴) $\sqrt{2}$

پاسخ: گزینه ۳

چون $x = \sqrt{2}$ جواب معادله است، پس در معادله صدق می‌کند:

$$8\log_4^{\sqrt{2}} + m\log_{\sqrt{2}}^2 = 6$$

امّا با توجّه به نکته $\log_{b^n}^{a^m} = \frac{m}{n}\log_b^a$ داریم:

$$۸\log_{۲^۲}^{۲^{\frac{۱}{۲}}}+m\log_{۲^{\frac{۱}{۲}}}^{۲}=۶\Rightarrow ۸\times\frac{۱}{۴}\log_۲^۲+۲m\log_۲^۲=۶\Rightarrow ۲m+۲=۶\Rightarrow m=۲$$

$$\Rightarrow ۸\log_۴^x+۲\log_x^۲=۶\Rightarrow ۴\log_۲^x+۲\log_x^۲=۶$$

اگر $\log_۲^x=A$ آنگاه:

$$۲A+\frac{۱}{A}=۳\Rightarrow ۲A^۲-۳A+۱=۰\Rightarrow\begin{cases}A=۱ & x=۲\\ A=\frac{۱}{۲} & x=\sqrt{۲}\end{cases}$$

استفاده از یکی از ویژگی‌های لگاریتمی($\log_b^a=\frac{۱}{\log_a^b}$) در حل معادله لگاریتیمی... که در کنکور هم ازش سوال اومد...

اگر تساوی $\log_x^y-۲\log_y^x=۱$ به ازای $x,y>۱$ برقرار باشد، کدام تساوی درست است؟

(سوال ۱۳۷ کنکور سراسری ۱۴۰۰)

۱) $y=x^۲$ ۲) $y=x^۳$ ۳) $y=\sqrt{x}$ ۴) $xy=۲$

آزمون ۱۸ دوپینگ سوال ۳ و آزمون ۳ دوپینگ سوال ۷

اگر $A=\frac{\sqrt[۳]{۳}+\sqrt[۳]{۲}}{\sqrt[۳]{۹}+\sqrt[۳]{۶}+\sqrt[۳]{۴}}$ مقدار $\left(A-\sqrt[۳]{۹}\right)^۳$ چه عددی است؟

۱) -۴ ۲) ۴ ۳) -۲ ۴) ۲

پاسخ: گزینه ۱

در ابتدا مخرج کسر را گویا می‌کنیم:

$$\left(\sqrt[۳]{\alpha}-\sqrt[۳]{\beta}\right)\times\left(\sqrt[۳]{\alpha^۲}+\sqrt[۳]{\alpha\beta}+\sqrt[۳]{\beta^۲}\right)=\alpha-\beta$$

$$A=\frac{\sqrt[۳]{۳}+\sqrt[۳]{۲}}{\sqrt[۳]{۹}+\sqrt[۳]{۶}+\sqrt[۳]{۴}}\times\frac{\sqrt[۳]{۳}-\sqrt[۳]{۲}}{\sqrt[۳]{۳}-\sqrt[۳]{۲}}=\frac{\sqrt[۳]{۹}-\sqrt[۳]{۴}}{۳-۲}$$

$$\Rightarrow A=\sqrt[۳]{۹}-\sqrt[۳]{۴}\Rightarrow A-\sqrt[۳]{۹}=-\sqrt[۳]{۴}\Rightarrow\left(A-\sqrt[۳]{۹}\right)^۳=\left(-\sqrt[۳]{۴}\right)^۳=-۴$$

اگر $A=\frac{۱}{۱+\sqrt[۳]{۲}+\sqrt[۳]{۴}}$ باشد، حاصل $(A+۱)^۳$ کدام است؟

۱) $\sqrt[۳]{۴}$ ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) $\sqrt[۳]{۲}$

پاسخ: گزینه ۲

نکته: اتحاد چاق و لاغر:

$$(a-b)(a^۲+ab+b^۲)=a^۳-b^۳$$

صورت و مخرج کسر را در $\sqrt[۳]{۲}-۱$ ضرب می‌کنیم.

$$A=\frac{\sqrt[۳]{۲}-۱}{\left(\sqrt[۳]{۲}-۱\right)\left(۱+\sqrt[۳]{۲}+\sqrt[۳]{۴}\right)}=\frac{\sqrt[۳]{۲}-۱}{\left(\sqrt[۳]{۲}\right)^۳-۱^۳}=\frac{\sqrt[۳]{۲}-۱}{۱}=\sqrt[۳]{۲}-۱$$

پس $A+۱=\sqrt[۳]{۲}$ و درنتیجه $(A+۱)^۳=۲$.

استفاده از اتحاد چاق و لاغر در عبارت‌های رادیکالی در تست‌های ماز بررسی شده بود که می‌بینید در کنکور هم ازش سوال اومده!

فرض کنید x_1 و x_2 جواب‌های معادلهٔ $(\sqrt[3]{x^2}-1)(\sqrt[3]{x^2}+\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}+1)=2\sqrt[3]{x}$ باشند. مقدار x_1+x_2 ، کدام است؟

(سوال ۱۲۷ کنکور سراسری ۱۴۰۰)

۱) -1 ۲) صفر ۳) ۱ ۴) ۲

آزمون ۱۶ طی سال سوال ۱۱۳، آزمون دوپینگ ترکیب سوال‌های ۲۴ و۲۵

تابع $f(x)=|2x-4|-x+3$ دارای چند اکسترمم نسبی است؟

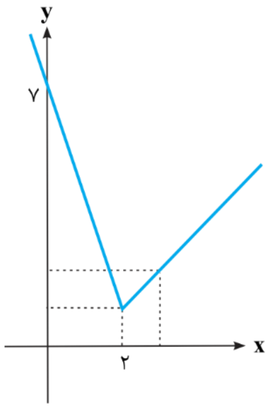
۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

پاسخ: گزینه ۲

نمودار تابع داده شده را رسم می‌کنیم (این تابع در $x=2$ شکستگی دارد.)

$y=|2x-4|-x+3$

x	۰	۲	۳
y	۷	۱	۲



با توجه به نمودار فقط $x=2$ طول اکسترمم نسبی تابع است.

چه تعداد از گزینه‌های زیر صحیح است؟

الف) هر اکسترمم نسبی حتماً بحرانی هم هست.
ب) اگر $x=c$ طول اکسترمم نسبی تابع f باشد آنگاه $f'(c)=0$ است.
پ) اگر $x=c$ طول اکسترمم نسبی تابع باشد آنگاه تابع در یک همسایگی $x=c$ تعریف شده است.
ت) اگر تابع در یک نقطه خط مماس داشته باشد، آنگاه تابع در آن نقطه مشتق دارد.
ث) اگر تابع در دو طرف اکسترمم مطلق خود تعریف شود، آن اکسترمم مطلق، نسبی هم هست.

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینه ۳

الف) درست است، زیرا در هر اکسترمم نسبی یا مشتق صفر است یا مشتق وجود ندارد، درست مثل یک نقطهٔ بحرانی.

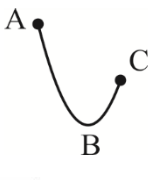
ب) غلط است، مثلاً در تابع $y=|x|$ در واقع اگر تابع مشتق‌پذیر باشد و $x=c$ طول اکسترمم نسبی آن باشد $f'(c)=0$ است.

پ) درست است، زیرا تابع باید دو طرف اکسترمم نسبی خود تعریف شود.

ت) غلط است، مثلاً $y=\sqrt[3]{x}$ در $x=0$ خط مماس دارد ولی مشتق ندارد.

ث) درست است، به عنوان مثال در شکل زیر A ماکزیمم مطلق است ولی نسبی نیست، زیرا تابع سمت چپ A تعریف نشده است ولی B هم مینیمم مطلق است و هم مینیمم نسبی چون هم پایین‌ترین نقطهٔ تابع است هم نسبت به دو طرف خود پایین‌تر است.

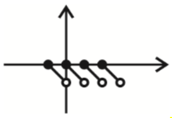
راستی نقطهٔ C هم فقط بحرانیه و اکسترمم نسبی و مطلق نیست.



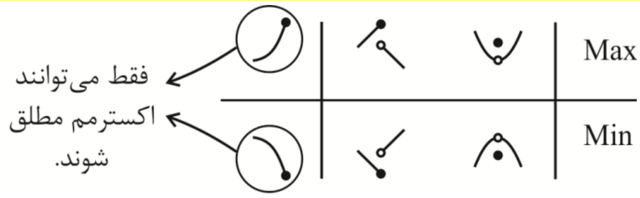
کدام گزینه در مورد تابع $f(x)=[x]-x$ درست است؟

۱) ماکزیمم و مینیمم دارد.
۲) ماکزیمم دارد و مینیمم ندارد.
۳) ماکزیمم و مینیمم ندارد.
۴) ماکزیمم ندارد و مینیمم دارد.

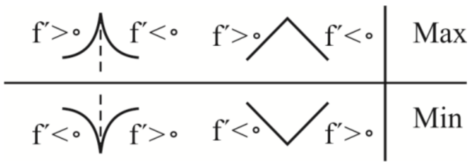
پاسخ: گزینه ۲



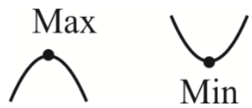
با توجّه به نمودار تابع ماکزیمم دارد و مینیمم ندارد.
دقّت کنید با توجّه به شرایط تابع سه نوع اکسترمم داریم:
۱) نقاط بحرانی ناپیوسته که یا از روی نمودار و یا با مقایسهٔ مقدار تابع در آن نقطه و اطرافش می‌توان نوع اکسترمم را تشخیص داد.



۲) نقاط بحرانی پیوسته مشتق‌ناپذیر



۳) توابع مشتق‌پذیر



در این توابع مختصات اکسترمم در تابع صدق می‌کند و طول نقطه، مشتق را صفر می‌کند.
در تمامی اکسترمم‌ها اگر تابع دو طرف اکسترمم تعریف شود آن اکسترمم نسبی هم هست و اگر هیچ نقطهٔ تابع از آن بالاتر نباشد max مطلق است.
و اگر هیچ نقطهٔ تابع از آن پایین‌تر نباشد min مطلق است.
در سؤال فوق ماکزیمم هم مطلق است و هم نسبی است.
در ضمن تمامی نقاط تابع ثابت هم بحرانی هستند و هم ماکزیمم نسبی و مطلق هستند و هم مینیمم نسبی و مطلق هستند.

تمام نکات لازم برای حل سوال زیر، در تست‌های فوق آمده است.

تعداد نقاط اکسترمم نسبی تابع $f(x)=\frac{x^۲}{x^۲-۱}|x^۲-۴|$، کدام است؟ *(سوال ۱۴۲ کنکور سراسری ۱۴۰۰)*

۱) ۲
۲) ۳
۳) ۴
۴) ۵

آزمون ۶ دوپینگ سوال ۱۲

اگر $f(x)=\sqrt[3]{\left(\frac{3x-1}{x-2}\right)^2}$، حاصل $f'(3)$ برابر کدام است؟

۱) $-\frac{20}{3}$ ۲) $-\frac{5}{3}$ ۳) $-\frac{7}{3}$ ۴) $\frac{1}{3}$

پاسخ: گزینه ۲

$$f(x)=\left(\frac{3x-1}{x-2}\right)^{\frac{2}{3}} \Rightarrow f'(x)=\frac{2}{3}\left(\frac{3x-1}{x-2}\right)^{-\frac{1}{3}}\left(\frac{-5}{(x-2)^2}\right)$$

دقت کنید مشتق (u^n) برابر $(nu^{n-1}u')$ است، بنابراین:

$$f'(3)=\frac{2}{3}(8)^{-\frac{1}{3}}(-5)=-\frac{5}{3}$$

هر دو سوال هم از فرمول مشتق ترکیب و همین‌طور از مشتق گرفتن از تابع رادیکالی با فرجه ۳ استفاده شده است.

فرض کنید $f(x)=(x\left[x^2+\frac{1}{2}\right])^2+1$ **و** $g(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{x^2-1}}$. **مقدار مشتق تابع fog در** $x=\frac{3}{\sqrt{8}}$، **چند برابر** $(-128\sqrt{2})$ **است؟**

(سوال ۱۴۴ کنکور سراسری ۱۴۰۰)

۱) -4 ۲) 1 ۳) 2 ۴) 4

آزمون ۶ دوپینگ سوال ۲

تابع $f(x)=\begin{cases}\frac{2x+1}{x-1} & x\geq 2\\ ax^2+bx+1 & x<2\end{cases}$ در $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر است، a کدام است؟

۱) $-2/5$ ۲) $2/5$ ۳) $0/5$ ۴) $-0/5$

پاسخ: گزینه ۱

این تابع تنها در $x=2$ ممکن است، مشتق‌پذیر نباشد، بنابراین ترتیبی می‌دهیم که تابع در $x=2$ مشتق‌پذیر باشد. به این منظور اوّلاً باید تابع در این نقطه پیوسته باشد، ثانیاً مشتق‌های چپ و راست تابع در این نقطه باید با هم برابر باشند.

حد راست: $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}\left(\frac{2x+1}{x-1}\right)=5$

حد چپ: $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}(ax^2+bx+1)=4a+2b+1$

مقدار:
$f(2)=5$

پیوستگی $\Leftarrow$ $(4a+2b+1=5 \Rightarrow 4a+2b=4)$

ازطرفی:

$$\begin{cases}f'_-(x)=2ax+b \Rightarrow f'_-(2)=4a+b\\ f'_+(x)=\frac{-3}{(x-1)^2}\Rightarrow f'_+(2)=-3\end{cases}$$

برابری مشتق چپ و راست $\Leftarrow$ $(4a+b=-3)$

از حل دستگاه زیر a را می‌یابیم.

$$-\begin{cases}۴a+۲b=۴\\ ۴a+b=-۳\end{cases}\Rightarrow b=۷\Rightarrow a=-\frac{۵}{۲}$$

دقّت کنید، برای مشتق گرفتن از تابع هموگرافیک از فرمول زیر استفاده کنید:

$$\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)'=\frac{ad-bc}{(cx+d)^۲}$$

در تابع $f(x)=\begin{cases}g(x) & x>a\\ k & x=a\\ h(x) & x<a\end{cases}$ برای مشتق‌پذیری در $x=a$ دو شرط زیر را داریم:

اولاً: $\lim\limits_{x\to a^+}g(x)=\lim\limits_{x\to a^-}h(x)=k$

ثانیاً: $g'_+(a)=h'_-(a)$

هر دو سوال با در نظر گرفتن شروط مشتق پزیری به محاسبه‌ی مجهول‌ها پرداخته‌اند.

فرض کنید $g(x)=ax^۲+bx+c$، $(a\neq ۰)$ و $f(x)=\begin{cases}g(x) & x\geq k\\ g'(x) & x<k\end{cases}$ باشد. اگر f یک تابع مشتق‌پذیر باشد، حداکثر مقدار k به شرط $b+c=a$، کدام است؟

(سوال ۱۴۵ کنکور سراسری ۱۴۰۰)

۱) $\frac{۳}{۴}$ ۲) ۱ ۳) ۳ ۴) ۴

آزمون ۱۱ دوپینگ سوال ۱، ۹، ۱۵، ۱۱

خطوط $۳x+۴y+۱۰=۰$ و $ax+by=۰$ دو ضلع مجاور یک مستطیل هستند و نقطهٔ $(-۱,۲)$ یک رأس مستطیل، مساحت مستطیل کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۶ ۳) ۱۲ ۴) ۹

پاسخ: گزینه ۲

اولاً دو ضلع مجاور مستطیل بر هم عمودند، پس شیب خط $ax+by=۰$ برابر $(-\frac{a}{b})$ معکوس و قرینهٔ شیب خط $۳x+۴y-۱=۰$ برابر $(-\frac{۳}{۴})$ است.

یعنی: $-\frac{a}{b}=\frac{۴}{۳}$

پس معادلهٔ آن به‌صورت $y=\frac{۴}{۳}x$ یا $۳y-۴x=۰$ است. حال، کافیست فاصلهٔ $(-۱,۲)$ را از دو ضلع به‌دست بیاریم:

$$\frac{|۳\times ۲-۴(-۱)|}{\sqrt{۱۶+۹}}=۲\ ,\ \frac{|۳(-۱)+۴(۲)+۱۰|}{\sqrt{۹+۱۶}}=۳$$

یعنی اندازه دو ضلع برابر ۳ و ۲ واحد است، پس مساحت مستطیل برابر ۶ می‌باشد.

اگر $A(۲,-۳)$ مختصات یکی از رئوس یک مربع باشد و خط $۳x-۴y+۲=۰$ معادلهٔ یکی از اضلاع مربع باشد، مساحت مربع کدام است؟

۱) ۱۶ ۲) ۹ ۳) ۲۵ ۴) ۴

پاسخ: گزینه ۱

کافیست فاصلهٔ A تا ضلع مربع را به کمک فرمول فاصلهٔ نقطه از خط به‌دست آوریم تا طول ضلع مربع را داشته باشیم و در نهایت طول ضلع را به توان دو برسانیم تا برابر مساحت شود.

$$\text{طول ضلع مربع} = \frac{|۳\times۲-۴\times(-۳)+۲|}{\sqrt{۹+۱۶}} = \frac{۲۰}{۵} = ۴$$

$$\text{مساحت مربع} = ۴^۲ = ۱۶$$

اگر $A(-۲,۱)$, $B(۳,۲)$, $C(۰,-۲)$ سه رأس یک مثلث باشند، مساحت مثلث کدام است؟

۱) ۸/۵ ۲) ۷/۵ ۳) ۸ ۴) ۷

پاسخ: گزینه ۱

می‌تونیم معادلهٔ خط BC را به‌دست بیاریم، بعد فاصلهٔ A تا خط BC (طول ارتفاع AH) و طول ضلع BC رو از فرمول فاصلهٔ دو نقطه به‌دست بیاریم و در آخر مساحت رو از فرمول $S=\frac{۱}{۲}AH\times BC$ به‌دست بیاریم. ولی خیلی برای یک تست راه خوبی نیست.

ولی برای مرور فرمول‌ها بد نیست.

$$m_{BC} = \frac{y_C-y_B}{x_C-x_B} = \frac{-۲-۲}{۰-۳} = \frac{۴}{۳}, C(۰,-۲)$$

و با جایگذاری مختصات C و شیب خط در معادلهٔ زیر داریم:

$$y-y_۰ = m(x-x_۰) \to y+۲ = \frac{۴}{۳}(x-۰)$$

معادلهٔ BC:

$$\Rightarrow ۴x-۳y-۶=۰$$

حال، از فرمول فاصلهٔ نقطه از خط فاصلهٔ نقطهٔ $A(-۲,۱)$ رو از خط BC به‌دست می‌یاریم:

$$d = \frac{|ax_۰+by_۰+c|}{\sqrt{a^۲+b^۲}} \Rightarrow AH = \frac{|۴\times(-۲)-۳\times۱-۶|}{\sqrt{۱۶+۹}} = \frac{۱۷}{۵}$$

همین‌طور طول BC را از فرمول فاصلهٔ دو نقطه به‌دست می‌یاریم:

$$|BC| = \sqrt{(x_C-x_B)^۲+(y_C-y_B)^۲} = \sqrt{(۰-۳)^۲+(-۲-۲)^۲} = ۵$$

خلاصه:

$$S = \frac{۱}{۲}\times|AH|\times|BC| = \frac{۱}{۲}\times\frac{۱۷}{۵}\times۵ = \frac{۱۷}{۲} = ۸/۵$$

عرض از مبدأ خط گذرنده از محل برخورد خط $۲y+۳x=۵$ با نیمساز ربع اوّل و عمود بر خط $۲y+x=۴$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) -۱ ۳) ۰ ۴) $-\frac{۱}{۲}$

پاسخ: گزینه ۲

ابتدا محل برخورد $۲y+۳x=۵$ و $y=x$ را با حل دستگاه زیر به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} y=x \\ ۲y+۳x=۵ \Rightarrow ۲x+۳x=۵ \Rightarrow x=۱, y=۱ \end{cases}$$

از طرفی با توجّه به شرط عمود بودن، باید شیب خط مورد نظر معکوس و قرینهٔ شیب خط $۲y+x=۴$ (یعنی $-\frac{۱}{۲}$) باشد، پس شیب خط مورد نظر ۲ است.

برای به‌دست آوردن شیب خط، y را در یک طرف معادله خط تنها کنید و ضریب x در طرف دیگر شیب خط است، یعنی:

$$۲y + x = ۴ \Rightarrow y = \underbrace{-\frac{۱}{۲}}_{\text{شیب خط}}x + ۲$$

حال، کافی است که شیب خط (یعنی عدد ۲) و مختصات نقطه (۱,۱) را در معادلهٔ کلی خط (یعنی: $y - y_۰ = m(x - x_۰)$) قرار دهیم:

$$y - ۱ = ۲(x - ۱) \Rightarrow y = ۲x - ۱$$

(دقّت کنید اگر معادلهٔ خط به‌صورت $y = mx + h$ باشد، h عرض از مبدأ است.)

بنابراین، عرض از مبدأ خط مورد نظر، ۱- است.

در آزمون‌های ماز سوالات زیادی با رویکرد این تست کنکور شبیه‌سازی شده بودند، که یه تستم ازش دیدین!

شیب نیم‌خطی با نقطهٔ شروع $A(۲,۴)$ برابر ۳ است. مستطیل $ABCD$ را چنان می‌سازیم، که نقطه B روی نیم‌خط فوق و راس سو م آن $C(-۳,-۱)$ باشد. محیط مستطیل، کدام است؟ *(سوال ۱۵۱ کنکور سراسری ۱۴۰۰)*

۱) ۲۴
۲) ۱۸
۳) $۶\sqrt{۱۰}$
۴) $۳\sqrt{۱۰}$

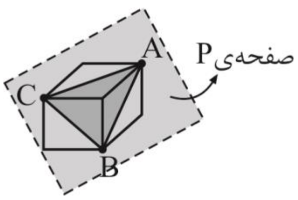
آزمون ۱۲ دوپینگ سوال ۱۱ و آزمون ۱۱ دوپینگ سوال ۱

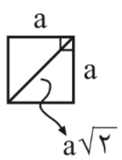
سطح مقطع حاصل از برخورد یک صفحه با مکعبی به طول یال ۲ زمانی که صفحه از انتهای سه یالی که در یک رأس مشترک هستند عبور کند، برابر کدام است؟

۱) $۲\sqrt{۳}$
۲) $۲\sqrt{۲}$
۳) $۴\sqrt{۳}$
۴) $۴\sqrt{۲}$

پاسخ: گزینه ۱

مطابق شکل سطح مقطع، مثلث متساوی‌الاضلاع ABC است و طول هر ضلع آن برابر قطر مربعی به ضلع ۲ یعنی $۲\sqrt{۲}$ است.





(**نکته:** در هر مربع به ضلع a، طول قطر $a\sqrt{۲}$ است.)

(**نکته:** مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع a برابر $\frac{\sqrt{۳}}{۴}a^۲$ است و طول ارتفاع آن $\frac{\sqrt{۳}}{۲}a$ است.)

بنابراین مساحت مثلث ABC برابر:

$$\frac{\sqrt{۳}}{۴} \times (۲\sqrt{۲})^۲ = \frac{\sqrt{۳} \times ۸}{۴} = ۲\sqrt{۳}$$

عرض از مبدأ خط گذرنده از محل برخورد خط $۲y + ۳x = ۵$ با نیم‌ساز ربع اوّل و عمود بر خط $۲y + x = ۴$ کدام است؟

۱) ۱
۲) ۱-
۳) ۰
۴) $-\frac{۱}{۲}$

پاسخ: گزینه ۲

ابتدا محل برخورد $۲y+۳x=۵$ و $y=x$ را با حل دستگاه زیر به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} y=x \\ ۲y+۳x=۵ \Rightarrow ۲x+۳x=۵ \Rightarrow x=۱, y=۱ \end{cases}$$

از طرفی با توجّه به شرط عمود بودن، باید شیب خط مورد نظر معکوس و قرینهٔ شیب خط $۲y+x=۴$ (یعنی $-\frac{۱}{۲}$) باشد، پس شیب خط مورد نظر ۲ است.

برای به‌دست آوردن شیب خط، y را در یک طرف معادله خط تنها کنید و ضریب x در طرف دیگر شیب خط است، یعنی:

$$۲y+x=۴ \Rightarrow y=\underbrace{-\frac{۱}{۲}}_{\text{شیب خط}}x+۲$$

حال، کافی است که شیب خط (یعنی عدد ۲) و مختصات نقطه (۱,۱) را در معادلهٔ کلی خط (یعنی: $y-y_۰=m(x-x_۰)$) قرار دهیم:

$$y-۱=۲(x-۱) \Rightarrow y=۲x-۱$$

(دقّت کنید اگر معادلهٔ خط به‌صورت $y=mx+h$ باشد، h عرض از مبدأ است).

بنابراین، عرض از مبدأ خط مورد نظر، ۱- است.

در درسنامه‌ی تست اول، در مورد طول ضلع و طول ارتفاع مثلث متساوی‌الاضلاع و ارتباط اون با مساحت مثلث بحث شده است که کاملا برای محاسبه تست زیر کمک کننده بوده است. در تست دوم، ایده به دست آوردن تقاطع دو خط و نوشتن معادله‌ی خط عمود بر یک خط با داشتن یک نقطه ازآن آمده است.

نقطه $H(۲,۱)$ را روی خط $۳x-y=۵$ در نظر بگیرید. مثلث متساوی‌الاضلاع ABC را با ارتفاع AH می‌سازیم، به طوری که محیط مثلث $\sqrt{۲۷۰}$ واحد باشد. مختصات یک راس A، کدام است؟ *(سوال ۱۵۲ کنکور سراسری ۱۴۰۰)*

۱) $(\frac{۷}{۲},\frac{۱}{۲})$

۲) $(\frac{۱۳}{۲},-\frac{۱}{۲})$

۳) $(\frac{۱}{۲},\frac{۳}{۲})$

۴) $(-\frac{۱}{۲},\frac{۱۱}{۶})$

آزمون ۱۲ دوپینگ ترکیب سوال‌های ۲۷ و ۳۰

وضعیت دو دایرهٔ $x^۲+y^۲-۲x+۴y-۴=۰$ و $x^۲+y^۲+۴x+۲y+۴=۰$ نسبت به هم چگونه است؟

۱) متخارج ۲) متقاطع ۳) مماس خارج ۴) متداخل

پاسخ: گزینه ۲

$$\begin{cases} x^۲+y^۲-۲x+۴y-۴=۰ \\ x^۲+y^۲+۴x+۲y+۴=۰ \end{cases}$$

$$(x-۱)^۲-۱+(y+۲)^۲-۴-۴=۰ \Rightarrow$$
$$(x-۱)^۲+(y+۲)^۲=۹ \Rightarrow O(۱,-۲)\ ,\ R=۳$$

$$(x+۲)^۲-۴+(y+۱)^۲-۱+۴=۰$$

$$(x+۲)^۲+(y+۱)^۲=۱ \Rightarrow O'(-۲,-۱)\ ,\ R'=۱$$

از طرفی:

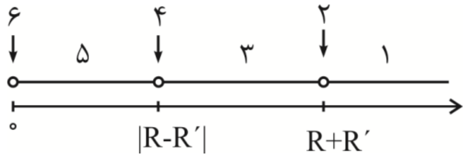
$$OO'=\sqrt{(۱+۲)^۲+(-۲+۱)^۲}=\sqrt{۱۰}$$

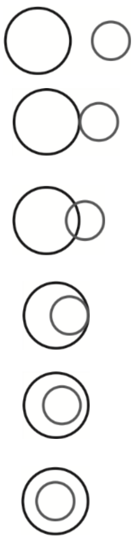
و

$R+R'=۴\ ,\ |R-R'|=۲$

پس $|R-R'|<OO'<R+R'$ و دو دایره متقاطع‌اند.

نکته: اگر روی یک محور $R+R'$ و $R-R'$ را مشخص کنیم بسته به مکان OO' که در کدام قسمت قرار می‌گیرد وضعیت دو دایره را مشخص می‌کنیم.





ناحیه ۱: متخارج

ناحیه ۲: مماس خارج (یا مماس برون)

ناحیه ۳: متقاطع

ناحیه ۴: مماس داخل (یا مماس درون)

ناحیه ۵: متداخل

ناحیه ۶: هم‌مرکز

شعاع دایره گذرنده از سه نقطهٔ $A(۱,۲)$ ، $B(-۳,۲)$ و $C(۱,۴)$ برابر کدام است؟

۱) ۲ ۲) $\sqrt{۵}$ ۳) ۳ ۴) $\sqrt{۳}$

پاسخ: گزینه ۲

مختصات این سه نقطه را در معادله‌ی غیر استاندارد دایره، یعنی: $x^۲+y^۲+ax+by+c=۰$ صدق دهیم و با حل دستگاه سه معادله و سه مجهول a و b و c را به‌دست آوریم و با استاندارد کردن معادله شعاع را محاسبه کنیم. این راه هم نسبتاً طولانی است. (در معادله غیر استاندارد $o(\frac{-a}{۲},\frac{-b}{۲})$ مرکز و $R=\sqrt{\frac{a^۲+b^۲}{۴}-c}$ شعاع است.)

ایدهٔ استاندارد کردن و پیدا کردن فاصلهٔ مرکز تا وتر در آزمون‌های ماز ارایه شده و بینهایت حل این تست را برای مازیا راحت کرده!

دایره‌های $x^۲+y^۲+۲y=۳$ و $x^۲+y^۲+۲x=۳$ متقاطع‌اند. معادله وتر مشترک این دو دایره، کدام است؟

(سوال۱۵۳ کنکور سراسری ۱۴۰۰)

۱) $x=y$ ۲) $x=۱+y$

۳) $x=-y$ ۴) $x=۱-y$

آزمون ۱۷ طول سال سوال ۱۳۷

نمودار تابع $y=۲^{x-۱}$ و $y=\frac{x^۲}{۲}$ در دو نقطه با طول‌های مثبت یکدیگر را قطع می‌کنند. شیب خطی که از این دو نقطه می‌گذرد کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۳ ۴) ۶

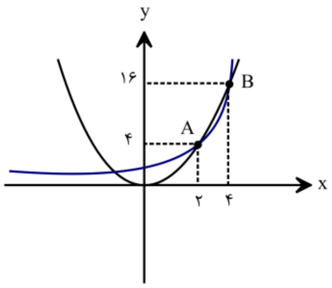
پاسخ: گزینه ۳

یافتن نقاط تلاقی دو نمودار، یعنی حل معادله مقابل:

$$\frac{x^2}{2} = 2^{x-1}$$

طرفین معادله را در ۲ ضرب می‌کنیم:

$$x^2 = 2^x$$



پس کافیست نقاط تلاقی (با طول‌های مثبت) نمودار دو تابع $y = 2^x$ و $y = x^2$ را بیابیم.

دو نمودار را در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم:

با توجه به شکل طول نقطهٔ برخورد دو تابع $y = 2^{x-1}$ و $y = \frac{x^2}{2}$، ۲ و ۴ است، پس:

$$\begin{array}{l} x_1 = 2 \Rightarrow y_1 = 2 \\ x_2 = 4 \Rightarrow y_2 = 8 \end{array} \Rightarrow m = \frac{8-2}{4-2} = \frac{6}{2} = 3$$

دو تست با ایده مشابه جهت یافتن نقاط تلاقی دو تابع...

فاصله نقطه تلاقی منحنی‌های $2y = x^2$ و $x = \sqrt{y+3} - \sqrt{y-3}$ با مبدا مختصات، کدام است؟

(سوال۱۳۴ کنکور سراسری ۱۴۰۰)

۱) $\sqrt{3}$ ۲) $\sqrt{6}$ ۳) $2\sqrt{3}$ ۴) $\sqrt{15}$