221

A

%۸۰

REJECTED
پیشگویی
REJECTED

گروه آموزشی ماز

APPROVED
پیش بینی
APPROVED

# تطابق سوالات ریاضی ماز باکنکور ۱۴۰۱

## رشته تجربی

نیاز به هیچ گونه سوادی نیست؛سوال ماز که دقیقا با آدرس ذکر شده در آزمون های ماز بوده رو بخون
بعدش سوال کنکور رو خودت حل کن :)

## آزمون جامع دوپینگ تجربی ۱۲ اردیبهشت

۴- اگر $-\frac{\pi}{۶}<\theta<\frac{\pi}{۱۲}$ و $\sin(\frac{\pi}{۳}-۲\theta)=\frac{۲-۳m}{۴}$ ، حدود m کدام است؟

۱) $-\frac{۲}{۳}\le m\le \frac{۴}{۳}$ ۲) $۰\le m<\frac{۴}{۳}$

۳) $-\frac{۲}{۳}\le m<۰$ ۴) $-\frac{۴}{۳}\le m<\frac{۲}{۳}$

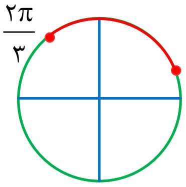
پاسخ: گزینه ۳

توابع $y=\sin x$ یا $y=\cos x$ یکنوای اکید نیستند، به همین جهت دامنه را روی دایره مثلثاتی مشخص می‌کنیم و به کمک آن برد تابع را بدست می‌آوریم.

در ابتدا با توجه به محدوده $\theta$، حدود $\frac{\pi}{۳}-۲\theta$ را بدست می‌آوریم:

$$-\frac{\pi}{۶}<\theta<\frac{\pi}{۱۲}\Rightarrow -\frac{\pi}{۶}<-۲\theta<\frac{\pi}{۳}\Rightarrow \frac{\pi}{۶}<\frac{\pi}{۳}-۲\theta<\frac{۲\pi}{۳}$$

اگر محدوده $\frac{\pi}{۳}-۲\theta$ را روی دایره مثلثاتی نمایش دهیم، داریم:




$$\frac{\pi}{۶}<\frac{\pi}{۳}-۲\theta<\frac{۲\pi}{۳}\Rightarrow \frac{۱}{۲}<\sin(\frac{\pi}{۳}-۲\theta)\le ۱$$

یعنی:

$$\frac{۱}{۲}<\frac{۲-۳m}{۴}\le ۱\Rightarrow ۲<۲-۳m\le ۴\Rightarrow -۴\le ۳m-۲<-۲\Rightarrow -\frac{۲}{۳}\le m<۰$$

### تحلیل:

**در سوال فوق، با استفاده از محدوده داده شده، ابتدا کمان تحت سینوس را می‌سازیم و سپس عبارت هم‌ارز آن را در این محدوده قرار داده و با حل یک نامعادله، حدود m را به دست می‌آوریم، در واقع سوالی که تقریباً یک ماه قبل از کنکور آن را در آزمون جامع دوپینگ دیده بودیم به عنوان سوال ۱۱۲ کنکور آورده شده است.**

## سوال ۱۱۲ کنکور تجربی ۱۴۰۱

۱۱۲- اگر $-\frac{\pi}{۴}<x<\frac{\pi}{۴}$ و $\tan(\frac{\pi}{۴}-x)=\frac{۱-m}{۲+m}$ باشد، مجموعه مقادیر m کدام است؟

۱) $(-۲,۱)$ ۲) $(-۲,۱]$ ۳) $(-۱,۲]$ ۴) $(-۱,۲)$

گروه آموزشی ماز

آزمون همه دروس مرحله ۱ ماز

۹۸- اگر $\log_{50}^{20}=k$ باشد، حاصل $\log_{8}^{25}$ کدام است؟

۱) $\frac{2k}{6k-3}$   ۲) $\frac{2k-4}{3-6k}$   ۳) $\frac{2-k}{2k-1}$   ۴) $\frac{k-2}{2k-1}$

پاسخ: گزینه ۲

با توجّه به این که $\log_{b^m}^{a^n}=\frac{n}{m}\log_b^a$؛ داریم:

$$\log_8^{25}=\frac{2}{3}\log_2^5$$

بنابراین باید از رابطهٔ $\log_{50}^{20}=k$ حاصل $\log_2^5$ را به‌دست آوریم.

حال با توجّه به روابط زیر، داریم:

$$\log_b^a=\frac{\log_c^a}{\log_c^b}$$

$$\log_c^{ab}=\log_c^a+\log_c^b$$

$$\log_a^a=1$$

$$\log_{50}^{20}=\frac{\log_2^{20}}{\log_2^{50}}=\frac{\log_2^4+\log_2^5}{\log_2^2+\log_2^{25}}=\frac{2\log_2^2+\log_2^5}{\log_2^2+2\log_2^5}=\frac{2+\log_2^5}{1+2\log_2^5}=k\Rightarrow 2+\log_2^5=k+2k\log_2^5\Rightarrow$$

$$(1-2k)\log_2^5=k-2\Rightarrow \log_2^5=\frac{k-2}{1-2k}$$

بنابراین:

$$\log_8^{25}=\frac{2}{3}\log_2^5=\frac{2}{3}\left(\frac{k-2}{1-2k}\right)=\frac{2k-4}{3-6k}$$

## تحلیل:

**مشابه این سوال را قبلاً در کنکور سال ۹۹ دیده بودیم. در این سوال ابتدا باید فرض را تا جای ممکن ساده کرده و از آن در به‌دست آمدن حاصل خواسته شده استفاده کنیم، موردی که بارها در آزمون‌های طی سال و دوپینگ به آن اشاره شده بود.**

## سوال ۱۱٦ کنکور تجربی ۱٤۰۱

۱۱۶- اگر $\log_8 18=m$ باشد، حاصل $\log_4 12$ کدام است؟

۱) $\frac{3}{4}(m+1)$   ۲) $\frac{3m+1}{4}$   ۳) $\frac{3}{4}(m-1)$   ۴) $\frac{3m-1}{4}$

گروه آموزشی ماز

آزمون جامع دوپینگ تجربی ۱۰ خرداد

۱- خطوط به معادلات $۳x+۴y-۷=۰$، $x+y=۷$ و $۴x-۳y=۱$ به ترتیب بر اضلاع $AB$، $AC$ و $BC$ از مثلث $ABC$ منطبق هستند. فاصلهٔ نقطه همرسی ارتفاع‌های مثلث از ضلع $AC$، چند برابر $\sqrt{۲}$ است؟

۱) ۲/۵ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۳/۵

پاسخ: گزینه ۱ (ریاضی ۲ ـ صفحات ۲، ۳، ۴، ۸ ـ دشوار)

نکته ۱) شیب خط به معادله $ax+by+c=۰$ برابر $-\frac{a}{b}$ است.

نکته ۲) محل همرسی ارتفاع‌های مثلث قائم‌الزاویه، رأس زاویهٔ قائم است.

نکته ۳) دو خط بر هم عمودند اگر و فقط اگر شیب آن‌ها عکس و قرینهٔ یکدیگر باشند. به عبارت دیگر در دو خط عمود بر هم با شیب‌های $m$ و $m'$ داریم: $mm'=-۱$

نکته ٤) فاصله نقطهٔ $(x_۰,y_۰)$ از خط به معادله $ax+by+c=۰$ برابر است با: $\frac{|ax_۰+by_۰+c|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}$

با دقت در معادلات اضلاع متوجه می‌شوید که اضلاع $AB$ و $BC$ بر هم عمود هستند، زیرا:

$$\left.\begin{array}{ll} AB: ۳x+۴y-۷=۰ & m=-\frac{۳}{۴} \\ BC: ۴x-۳y=۱ & m'=\frac{۴}{۳} \end{array}\right\} \Rightarrow mm'=-\frac{۳}{۴}\times\frac{۴}{۳}=-۱ \checkmark$$

بنابراین مثلث $ABC$ در رأس $B$ قائمه است و از آنجایی که در مثلث قائم‌الزاویه محل همرسی ارتفاع‌ها، رأس زاویه قائمه است پس کافیست دستگاه معادلات خطوط منطبق بر $AB$ و $BC$ را حل کنیم تا مختصات نقطهٔ $B$ بدست آید:

$$\begin{cases} ۳x+۴y=۷ \\ ۴x-۳y=۱ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۹x+۱۲y=۲۱ \\ ۱۶x-۱۲y=۴ \end{cases} \xrightarrow{+} ۲۵x=۲۵ \Rightarrow x=۱, y=۱$$

$\Rightarrow B(۱,۱)$ محل همرسی ارتفاع‌ها

و در نهایت فاصلهٔ نقطهٔ $B$ از ضلع $AC$، برابر است با:

$$AC: x+y-۷=۰,\quad BH=\frac{|۱+۱-۷|}{\sqrt{۱+۱}}=\frac{۵}{\sqrt{۲}}=\frac{۵\sqrt{۲}}{۲}=\frac{۵}{۲}\sqrt{۲}=۲/۵\sqrt{۲}$$

**تحلیل:**

**خواسته طراح در هر دو سوال، یکی است. برای رسیدن به این خواسته، در هر دو سوال ابتدا باید مختصات نقطه تلاقی دو ضلع از اضلاع مثلث را به‌دست آورده و سپس فاصله این نقطه را از ضلع سوم مثلث به دست آوریم. البته در سوال آزمون ماز که به مراتب بهتر از سوال کنکور است، در ابتدا باید تشخیص دهیم که مثلث موردنظر قائم‌الزاویه بوده و محل همرسی ارتفاع‌ها در این مثلث، راس زاویه قائمه است.**

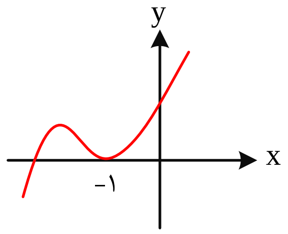
سوال ۱۲۸ کنکور تجربی ۱٤۰۱

۱۲۸- سه ضلع یک مثلث به معادلات $AB: y+۲x=۷$، $AC: ۴y-۳x=۱۷$ و $BC: ۲y-۷x=-۱۹$ هستند. طول ارتفاع $BH$ کدام است؟

۱) ۴/۴ ۲) ۳ ۳) ۲/۵ ۴) ۱

**دوپینگ تجربی ۲۲ اردیبهشت**

۲۵- شکل روبه‌رو بخشی از نمودار تابع $f(x)=\frac{۱}{۳}x^۳+ax^۲+bx+\frac{۴}{۳}$ است. کدام خط افقی نمودار تابع را در ۲ نقطه قطع می‌کند؟




۱) $y=\frac{۵}{۳}$

۲) $y=\frac{۴}{۳}$

۳) $y=۲$

۴) $y=۱$

پاسخ: گزینه ۲ (متوسط)

$A(-۱,۰)$ اکسترمم نسبی تابع است، پس:

$$f(-۱)=۰\Rightarrow -\frac{۱}{۳}+a-b+\frac{۴}{۳}=۰\Rightarrow a-b=-۱$$

$$f'(-۱)=۰\Rightarrow f'(x)=x^۲+۲ax+b\Rightarrow ۱-۲a+b=۰\Rightarrow ۲a-b=۱$$

$$-\begin{cases}a-b=-۱\\ ۲a-b=۱\end{cases}\Rightarrow a=۲,b=۳$$

$$f(x)=\frac{۱}{۳}x^۳+۲x^۲+۳x+\frac{۴}{۳}$$

$$f'(x)=x^۲+۴x+۳=۰\quad\Rightarrow\begin{cases}x=-۱\\ x=-۳\end{cases}$$

$$\begin{cases}f(-۱)=۰\\ f(-۳)=-۹+۱۸-۹+\frac{۴}{۳}=\frac{۴}{۳}\end{cases}$$

خطوط افقی $y=\frac{۴}{۳}$ و $y=۰$ که از اکسترمم‌ها عبور می‌کند، نمودار تابع را در دو نقطه قطع می‌کند.

**آزمون همه دروس مرحله ۱۴ ماز**

۸۸- اگر $A(۲,-۴)$ اکسترمم نسبی تابع $f(x)=(x-\alpha)^۲(x-\beta)$ باشد، مقدار $f(\alpha-\beta)$ کدام است؟

۱) $-۵۴$ ۲) $-۸۱$ ۳) $-۴۸$ ۴) $-۷۲$

پاسخ: گزینه ۱ (ریاضی ۳ ـ دشوار)

نکته) در تابع $y=(x-\alpha)^n$، هرگاه $n$ زوج باشد، $\alpha$ طول اکسترمم نسبی تابع است.

اولاً بدیهی است که $M\left|\begin{matrix}\alpha\\ ۰\end{matrix}\right.$ یکی از اکسترمم‌های تابع است که با توجه به عرض نقطه M، اکسترمم دیگری غیر از نقطه A است.

ثانیاً چون $A(۲,-۴)$ اکسترمم نسبی f است، پس:

$$\begin{cases}f(۲)=-۴\\ f'(۲)=۰\end{cases}$$

$$f'(x)=۲(x-\alpha)(x-\beta)+(x-\alpha)^۲=(x-\alpha)(۲x-۲\beta+x-\alpha)$$

$$f'(x)=(x-\alpha)(۳x-\alpha-۲\beta)\Rightarrow f'(۲)=۰$$

$x=۲$ باید ریشه پرانتز دوم باشد، پس:

$$\Rightarrow ۶=\alpha+۲\beta\Rightarrow \alpha=۶-۲\beta$$

از طرفی:

$$f(۲)=-۴\Rightarrow(۲-\alpha)^۲(۲-\beta)=-۴\Rightarrow(\alpha-۲)^۲(\beta-۲)=۴$$

$$\Rightarrow(۶-۲\beta-۲)^۲(\beta-۲)=۴\Rightarrow۴(\beta-۲)^۲(\beta-۲)=۴\Rightarrow(\beta-۲)^۳=۱$$

$$\beta=۳\ ,\ \alpha=۰\Rightarrow f(\alpha-\beta)=f(-۳)=(-۳)^۲(-۳-۳)=-۵۴$$

نکته: اگر $A(\alpha,\beta)$ اکسترمم نسبی تابع مشتق‌پذیر $f$ باشد، $f(\alpha)=\beta$ و $f'(\alpha)=۰$

## دوپینگ تجربی ۲۲ اردیبهشت

۲۲- اگر $A(۲,۱)$ اکسترمم نسبی تابع $f(x)=x^۳+ax^۲+b$ باشد، کدام نقطه اکسترمم نسبی $g(x)=x^۳+ax+b$ می‌باشد؟

۱) $M(-۱,۳)$ ۲) $M(-۱,۵)$ ۳) $M(۱,۵)$ ۴) $M(۱,۳)$

پاسخ: گزینه ۴ (متوسط)

نکته: اگر $A(\alpha,\beta)$ اکسترمم نسبی تابع مشتق‌پذیر f باشد، آن‌گاه $f(\alpha)=\beta$ و $f'(\alpha)=۰$

با توجه به آن‌که $A(۲,۱)$ اکسترمم نسبی تابع چندجمله‌ای $f(x)$ است، پس:

$$f(۲)=۱\Rightarrow ۸+۴a+b=۱\Rightarrow ۴a+b=-۷$$

$$f'(x)=۳x^۲+۲ax\xrightarrow{f'(۲)=۰}f'(۲)=۱۲+۴a=۰\Rightarrow a=-۳\Rightarrow b=۵$$

$$g(x)=x^۳-۳x+۵\qquad g'(x)=۳x^۲-۳=۰\Rightarrow\begin{cases}x=۱ & M_۱\left|\begin{matrix}۱\\۳\end{matrix}\right.\\ x=-۱ & M_۲\left|\begin{matrix}-۱\\۷\end{matrix}\right.\end{cases}$$

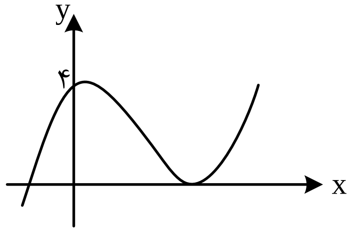
$M_۱$ و $M_۲$ اکسترمم‌های g هستند.

**تحلیل:**

**با توجه به شکل داده شده در سوال کنکور می‌توان به این نتیجه رسید که مشتق تابع در دو نقطه برابر صفر بوده و $f(۰)=۴$ است که با استفاده از همین دو داده می‌توان به جواب مسئله دست یافت از همین موضوع در سوال ۲۵ آزمون ۲۲ اردیبهشت (حدود دو هفته قبل از کنکور) و همچنین مدل‌های دیگر این سوال با ایده بسیار مشابه در سوال‌های متعددی از آزمون ماز مورد سوال قرار گرفته بود که چند نمونه از آن را نیز برایتان آورده‌ایم.**

## سوال ۱۲۴ کنکور تجربی ۱۴۰۱

۱۲۴- نمودار تابع $f(x)=x^۳+ax^۲+bx+c$ به صورت زیر است. طول نقطه مینیمم نسبی تابع، کدام است؟




۱) $\frac{۱}{۲}$

۲) ۲

۳) $\frac{۳}{۲}$

۴) ۳

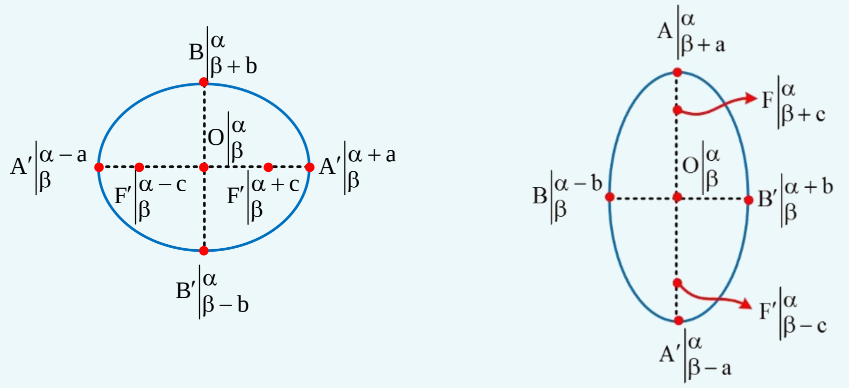
## تعیین سطح دوپینگ تجربی

۱۲۱- اگر $O(۳,-۲)$ مرکز و $A(۳,۳)$ و $B(۰,-۲)$ انتهای قطرهای بزرگ و کوچک یک بیضی باشند، عرض از مبدأ خطی که از یک کانون در ناحیهٔ چهارم مختصات عبور کرده و شیب آن برابر خروج از مرکز بیضی می‌باشد، کدام است؟

۱) $-۰/۴$ ۲) $-۱/۲$ ۳) $-۷/۶$ ۴) $-۸/۴$

پاسخ: گزینه ۴ (ریاضی ۳ ـ متوسط)

نکته) مختصات نقاط مهم بیضی




$OA=۵$ و $OB=۳$ می‌باشد. در نتیجه $a=۵$ و $b=۳$ است. همچنین طول نقطهٔ A که یک سر قطر اصلی است، با طول مرکز بیضی برابر است. بنابراین بیضی قائم است.

$$a^۲=b^۲+c^۲ \to ۵^۲=۳^۲+c^۲ \to c^۲=۱۶ \to c=۴ \to \begin{cases} F(۳,۲) \\ F'(۳,-۶) \checkmark \end{cases}$$

خروج از مرکز بیضی: $e=\frac{c}{a}=\frac{۴}{۵}$

معادلهٔ خط: $y+۶=\frac{۴}{۵}(x-۳) \xrightarrow{x=۰} y+۶=-\frac{۱۲}{۵} \to y=-\frac{۴۲}{۵} \to y=-۸/۴$

## دوپینگ تجربی ۱۰ خرداد

۲۶- در یک بیضی، **خروج از مرکز $\frac{۱}{۴}$** و **طول قطر کوچک ۸** است. فاصله کانونی بیضی چند برابر $\sqrt{۱۵}$ است؟

۱) $\frac{۴}{۱۵}$ ۲) $\frac{۸}{۱۵}$ ۳) $\frac{۲}{۱۵}$ ۴) $\frac{۷}{۱۵}$

پاسخ: گزینه ۲ (ریاضی ۳ ـ صفحات ۱۳۰ و ۱۳۱ ـ دشوار)

نکته ۱) خروج از مرکز بیضی را با e نمایش داده و برابر است با: $\frac{c}{a}$.

نکته ۲) در بیضی با طول قطر بزرگ $۲a$ و قطر کوچک $۲b$ و فاصله کانونی $۲c$، رابطهٔ $a^۲=b^۲+c^۲$ برقرار است.

اولاً می‌دانیم طول قطر کوچک بیضی برابر $۲b$ است، پس داریم:

$$۲b=۸\to b=۴$$

ثانیاً به کمک فرمول خروج از مرکز بیضی، داریم:

$$e=\frac{۱}{۴}\to\frac{c}{a}=\frac{۱}{۴}\xrightarrow{\text{توان ۲}}\frac{c^۲}{a^۲}=\frac{۱}{۱۶}\to\frac{a^۲-b^۲}{a^۲}=\frac{۱}{۱۶}\to\frac{a^۲}{a^۲}-\frac{b^۲}{a^۲}=\frac{۱}{۱۶}$$

$$\to ۱-\frac{۱۶}{a^۲}=\frac{۱}{۱۶}\to\frac{۱۶}{a^۲}=۱-\frac{۱}{۱۶}=\frac{۱۵}{۱۶}\to a^۲=\frac{۲۵۶}{۱۵}$$

ثالثاً به کمک رابطهٔ $a^۲=b^۲+c^۲$، داریم:

$$c^۲=\frac{۲۵۶}{۱۵}-۱۶=\frac{۱۶^۲-۱۵\times۱۶}{۱۵}=۱۶(\frac{۱}{۱۵})$$

$$\to c=\frac{۴}{\sqrt{۱۵}}\to \text{فاصله کانونی}=۲c=\frac{۸}{\sqrt{۱۵}}=\frac{۸\sqrt{۱۵}}{۱۵}$$

### تحلیل:

**استفاده از نقاط مهم بیضی برای به دست آوردن خروج از مرکز بیضی به کمک رابطه $e=\frac{c}{a}$، موضوعی است که در سوال کنکور مورد سوال قرار گرفته بود که دقیقاً همین مسئله با فرم مشابه و البته خواسته‌های بیشتر در سوالات آزمون ماز مطرح شده بود.**

## سوال ۱۳۰ کنکور تجربی ۱۴۰۱

۱۳۰- نقطه $(-۱۲,۰)$ یکی از کانون‌های یک بیضی است که طول قطر کوچک آن برابر ۱۸ است. اگر مبدأ مختصات مرکز بیضی باشد، خروج از مرکز بیضی، چقدر است؟

۱) $۰/۶$ ۲) $۰/۸$ ۳) $۱/۴$ ۴) $۱/۸$

### آزمون همه دروس مرحله۲۲ ماز

**۱۲۴–در مخروطی، جمع ارتفاع و قطر قاعده مخروط برابر ۶ است. بیشترین حجم مخروط چه عددی است؟**

۱) $۴\pi$ ۲) $\frac{۴\pi}{۳}$ ۳) $\frac{۸\pi}{۳}$ ۴) $۶\pi$

پاسخ: گزینه ۳ (ریاضی ۳ ـ متوسط)

اگر h و R به ترتیب ارتفاع و شعاع قاعده مخروط باشند، آن‌گاه:

$$h+۲R=۶ \Rightarrow V=\frac{\pi}{۳}R^{۲}h=\frac{\pi}{۳}R^{۲}(۶-۲R)$$

$$V=\frac{\pi}{۳}(۶R^{۲}-۲R^{۳}) \Rightarrow V'=\frac{\pi}{۳}(۱۲R-۶R^{۲})$$

$$V'=۰ \quad ۱۲R-۶R^{۲}=۰ \Rightarrow \begin{cases} R=۰ & \text{غ ق ق} \\ R=۲ \end{cases}$$

$$R=۲ \Rightarrow h=۲ \Rightarrow V_{mx}=\frac{\pi}{۳}(۲)^{۲}\times ۲=\frac{۸\pi}{۳}$$

### آزمون همه دروس مرحله ۱٤ ماز

**۸۹– اگر مخروطی قائم با حجم بیشینه را درون یک کره به شعاع ۶ واحد محاط کنیم، بیشترین حجم مخروط کدام است؟**

۱) $۶۴\pi$ ۲) $\frac{۳۲\pi}{۳}$

۳) $\frac{۲۵۶\pi}{۳}$ ۴) $\frac{۱۲۸\pi}{۳}$

پاسخ: گزینه ۳ (ریاضی ۳ ـ متوسط)

**هر تست ماز یک کلاس درس!**

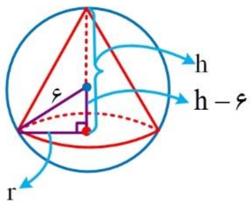
حجم مخروط $V=\frac{\pi}{۳}r^{۲}h$ است.

نکته) برای یافتن مقادیر Min و Max مطلق یک تابع بعد از یافتن نقاط بحرانی، مقدار تابع را درنقاط بحرانی با هم مقایسه می‌کنیم.

ارتفاع مخروط را h و شعاع قاعده را r فرض می‌کنیم و داریم:

$$۶^{۲}=r^{۲}+(h-۶)^{۲} \Rightarrow ۳۶=r^{۲}+h^{۲}-۱۲h+۳۶ \Rightarrow r^{۲}=۱۲h-h^{۲}$$

$$\text{مخروط} \quad V=\frac{\pi}{۳}r^{۲}h=\frac{\pi}{۳}(۱۲h-h^{۲})h=\frac{\pi}{۳}(۱۲h^{۲}-h^{۳})$$




$$V'(h)=۰ \Rightarrow \frac{\pi}{۳}(۲۴h-۳h^{۲})=۰ \Rightarrow ۳h^{۲}=۲۴h \xrightarrow{h\neq ۰} h=۸$$

$$V_{max}=\frac{\pi}{۳}(۹۶-۶۴)\times ۸=\frac{۲۵۶\pi}{۳}$$

آزمون همه دروس مرحله ۱۵ ماز

۹۹- در یک مخروط قائم، جمع قطر قاعده و ارتفاع آن برابر ۶ است. بیشترین حجم مخروط کدام است؟

۱) $\frac{۸\pi}{۳}$ ۲) $۴\pi$ ۳) $۲\pi$ ۴) $\frac{۴\pi}{۳}$

پاسخ: گزینه ۱ (ریاضی ۳ ـ متوسط)

نکته۱) حجم مخروط $V=\frac{\pi}{۳}r^۲h$ است.

نکته۲) برای یافتن Max یا Min مطلق تابع، پس از یافتن نقاط بحرانی، مقدار تابع را در نقاط بحرانی محاسبه کرده و آن‌ها را با هم مقایسه می‌کنیم.

حجم مخروط $V=\frac{\pi}{۳}r^۲h$ است، اما $۲r+h=۶$ است:

$$V=\frac{\pi}{۳}r^۲(۶-۲r)=\frac{\pi}{۳}(۶r^۲-۲r^۳)$$

$$V'=\frac{\pi}{۳}(۱۲r-۶r^۲)=۰\Rightarrow\begin{cases}r=۰ & \text{غ ق ق}\\ r=۲\rightarrow h=۲\end{cases}$$

به ازای $h=r=۲$ حجم مخروط بیشترین مقدار ممکن خواهد شد و داریم:

$$V_{max}=\frac{\pi}{۳}\times۸=\frac{۸\pi}{۳}$$

**تحلیل:**

**در این سوال، می‌دانیم که اگر پاره‌خط AB را حول خط L دوران بدهیم، یک مخروط به دست می‌آید که ما به دنبال ارتفاع این مخروط هستیم. در سوال‌های مطرح شده در آزمون ماز، برای به دست آوردن بیشترین حجم مخروط در روند حل سوال ارتفاع مخروط را محاسبه کرده و با استفاده از آن بیشترین حجم مخروط را به دست می‌آوریم. به عبارت دیگر خواسته سوال کنکور تنها بخشی از مساله مطرح شده در سوال‌های آزمون ماز است و برای رسیدن به خواسته سوال باید یک مرحله دیگر نیز به حل سوال ادامه بدهیم.**

سوال ۱۲۵ کنکور تجربی ۱۴۰۱

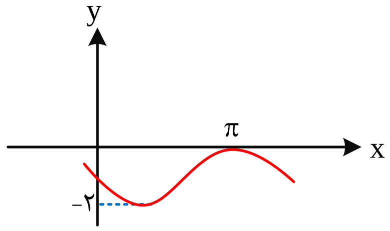
۱۲۵- از بین مخروط‌های حاصل که از دوران کامل پاره‌خط AB با اندازه $۳\sqrt{۳}$ حول خط L به دست می‌آیند. ارتفاع مخروطی با بیشترین حجم، کدام است (فقط نقطه A روی خط L واقع است.)

۱) ۶ ۲) ۳ ۳) $۲\sqrt{۳}$ ۴) $\sqrt{۳}$

گروه آموزشی ماز

آزمون همه دروس مرحله ۲۱ ماز

۱۱۳-نمودار تابع $f(x)=a\cos(\frac{\pi}{۲}-bx)+c$ به صورت زیر است. مقدار $ab-c$ برابر کدام است؟

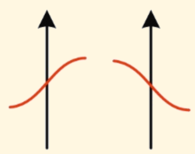
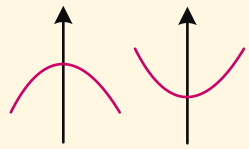



۱) $-\frac{۵}{۲}$  ۲) $-\frac{۱}{۲}$

۳) $\frac{۱}{۲}$  ۴) $\frac{۵}{۲}$

پاسخ: گزینه ۲ (ریاضی ۳ ـ صفحات ۳۲ تا ۴۱ ـ ساده)

در توابع $y=a\sin bx+c$ و $y=a\cos bx+c$ ، $\max=|a|+c$ و $\min=-|a|+c$ و دورهٔ تناوب $T=\frac{۲\pi}{|b|}$ و در نمودار طول هر کدام از اشکال روبه‌رو $\frac{T}{۴}$ است.

| $y=a\sin bx+c$ | $y=a\cos bx+c$ | تابع |
|---|---|---|
|  $ab>۰$ $ab<۰$ |  $a>۰$ $a<۰$ | نمودار برخورد با محور yها |

چون $\cos(-x)=\cos(x)$ است علامت b را در توابع کسینوسی نمی‌توان مشخص کرد، در توابع سینوسی هم‌علامت a و b را نمی‌توانیم جداگانه مشخص کنیم، چون $-\sin(-x)=\sin x$ یا $-\sin x=\sin(-x)$ است.

می‌دونیم $\cos(\frac{\pi}{۲}-\alpha)=\sin\alpha$ است و با توجه به درسنامه:

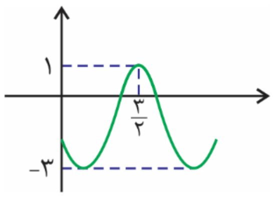
$\max-\min=۲|a|=۲\Rightarrow|a|=۱$ و $\max+\min=۲c=-۲\Rightarrow c=-۱$

از طرفی چون طول سه تا $\frac{T}{۴}$ برابر $\pi$ بوده پس: $\frac{۳T}{۴}=\pi$ و $T=\frac{۴\pi}{۳}$ یعنی: $\frac{۲\pi}{|b|}=\frac{۴\pi}{۳}\Rightarrow|b|=\frac{۳}{۲}$.

و با توجه به نحوهٔ برخورد نمودار با محور yها، $ab<۰$ است یعنی ضابطه به صورت $y=\sin(-\frac{۳}{۲}x)-۱$ یا $y=-\sin(\frac{۳}{۲}x)-۱$ بوده، در هر دو حالت داریم:

$ab-c=-\frac{۳}{۲}+۱=-\frac{۱}{۲}$.

## آزمون همه دروس مرحله ۸ ماز




۱۰۱- بخشی از نمودار تابع $f(x)=a-b\cos\pi(\frac{3}{2}+cx)$ مطابق شکل مقابل است. مقدار $a+|bc|$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲

۳) صفر ۴) ۱-

| | |
|---|---|
| پاسخ: گزینه ۱ | (ریاضی ۳ ـ صفحه ۳۵ و ۳۶ ـ متوسط) |

با توجه به آن که $f(0)<0$ داریم:

$$f(0)=a-b\underbrace{\cos\frac{3\pi}{2}}_{0}=a\Rightarrow a<0$$

از طرفی:

$$\begin{cases}\max=1\\ \min=-3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a+|b|=1\\ a-|b|=-3\end{cases}\Rightarrow a=-1\ ,\ |b|=2$$

از طرفی با توجه به نمودار داریم:

$$\frac{3}{4}T=\frac{3}{2}\Rightarrow T=2\rightarrow\frac{2\pi}{|c|\pi}=2\Rightarrow|c|=1$$

در نتیجه حاصل خواسته شده برابر است با:

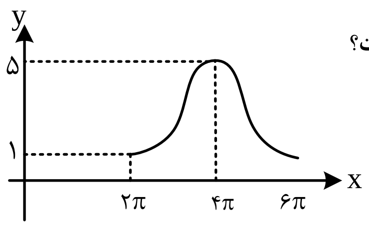
$$a+|bc|=-1+(2\times1)=-1+2=1$$

**تحلیل:**

**می‌دانیم که در توابع به فرم $y=a\cos bx+c$، میانگین مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع با مقدار $c$ برابر است بنابراین با همین یک نکته می‌توان به خواسته سوال کنکور رسید (ای کاش پارامترهای $a$ و $b$ رو هم توی خواسته سوال وارد می‌کرد!)**

**همانطور که می‌دانید، سوالات متعددی در آزمون‌های ماز از بحث نمودار توابع مثلثاتی مطرح شده بود که در آنها تنها یکی از خواسته‌های سوال، به دست آوردن مقدار ثابت موجود در ضابطه تابع است و در سوال‌های آزمون به دست آوردن پارامترهای مجهول دیگر نیز مورد توجه طراح قرار گرفته بود.**

## سوال ۱۱۴ کنکور تجربی ۱۴۰۱




۱۱۴- شکل زیر، نمودار تابع $y=c+a\cos bx$ را در یک دوره تناوب، نشان می‌دهد. مقدار $c$ کدام است؟

۱) ۵

۲) ۴

۳) ۳

۴) ۱

آزمون همه دروس مرحله ۸ ماز

۱۰۸- در معادله درجه دوم $f(x)=ax^{2}+bx-2=0$ یکی از ریشه‌ها، سه برابر ریشهٔ دیگر است. عرض رأس سهمی f کدام است؟

۱) $-\frac{2}{3}$ ۲) $\frac{2}{3}$ ۳) $\frac{4}{3}$ ۴) $-\frac{4}{3}$

پاسخ: گزینه ۲ (ریاضی ۲ ـ صفحه ۱۳ تا ۱۸ ـ سخت)

**روش اول:** ریشه‌ها را ۱ و ۳ فرض می‌کنیم.

$$\begin{cases} f(x)=k(x-3)(x-1) \\ f(0)=-2 \Rightarrow k=-\frac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow f(x)=-\frac{2}{3}(x-3)(x-1)$$

چون ریشه‌ها ۱ و ۳ هستند با توجه به تقارن سهمی، طول راس سهمی برابر ۲ است، پس:

$$\text{رأس سهمی}: x=2 \Rightarrow y_S=f(2)=-\frac{2}{3}(-1)(1)=\frac{2}{3}$$

**روش دوم:**

ریشه‌ها را $\alpha$ و $\beta$ فرض کنید و $\alpha=3\beta$ پس:

$$\left.\begin{aligned} &1)\ \alpha\beta=-\frac{2}{a} \Rightarrow 3\beta^{2}=-\frac{2}{a} \\ &2)\ \alpha+\beta=-\frac{b}{a} \Rightarrow 4\beta=-\frac{b}{a} \end{aligned}\right\} \Rightarrow 3\left(\frac{b^{2}}{16a^{2}}\right)=-\frac{2}{a} \Rightarrow b^{2}=-\frac{32a}{3}$$

$$y_S=-\frac{\Delta}{4a}=-\frac{b^{2}+8a}{4a}=-\frac{-\frac{32a}{3}+8a}{4a}=+\frac{8a}{12a}=+\frac{2}{3}$$

**تحلیل:**

**در این سوال یک رابطه ساده بین ریشه‌های معادله در نظرگرفته شده که بدون هیچ پیچیدگی خاصی به راحتی می‌تونیم مساله رو به جواب برسونیم البته که تعداد زیادی از این تیپ سوال‌ها توی آزمون‌هامون وجود داره که اگر می‌خواستیم همه اونارو به این مجموعه اضافه کنیم عملاً تعداد صفحه‌ها جوابگو نبود، پس به یه نمونه بسنده کردیم.**

**سوال ۱۰۷ کنکور تجربی ۱۴۰۱**

۱۰۷- به ازای دو مقدار a، یک ریشهٔ معادلهٔ $3x^{2}-ax+4=0$، سه برابر ریشهٔ دیگر است. اختلاف این دو مقدار a، کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۹ ۳) ۱۶ ۴) ۱۸

آزمون جامع دوپینگ تجربی ۲۲ اردیبهشت

۵- خط مماس بر منحنی تابع $f(x)=\frac{۳x-۲}{\sqrt[۳]{x}}$ در نقطه‌ای با طول $x=-۱$ واقع بر آن، محور طول‌ها را با کدام طول قطع می‌کند؟

۱) $\frac{۱۹}{۴}$ ۲) $\frac{۱۱}{۳}$ ۳) $\frac{۱۵}{۴}$ ۴) $\frac{۱۱}{۴}$

پاسخ: گزینه ۴ (متوسط)

نکته) شیب خط مماس بر نمودار f در نقطه‌ای به طول $\alpha$ برابر است با: $f'(\alpha)$

ابتدا با محاسبه مشتق، شیب خط مماس را بدست می‌آوریم:

$$f'(x)=\frac{۳\sqrt[۳]{x}-\frac{۱}{۳\sqrt[۳]{x^۲}}(۳x-۲)}{\sqrt[۳]{x^۲}}$$

$$f'(-۱)=\frac{-۳-\frac{۱}{۳}(-۵)}{۱}=-۳+\frac{۵}{۳}=-\frac{۴}{۳}$$

حال با داشتن شیب مماس و نقطه تماس، معادله خط مماس را می‌نویسیم: $A\left|\begin{matrix}-۱\\ ۵\end{matrix}\right.$

معادله خط مماس : $y-۵=-\frac{۴}{۳}(x+۱)$

برای تلاقی با محور طول‌ها کافی است در خط مماس قرار دهیم: $y=۰$

$$y=۰\rightarrow x=\frac{۱۱}{۴}$$

آزمون جامع دوپینگ تجربی ۲۲ اردیبهشت

۶- خط $y=۳x-۱$ در نقطه‌ای به طول $x=۱$ بر نمودار $f(x)=ax^۳+b$ مماس است، مقدار $|b-۲|$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینه ۱ (ساده)

نکته) یک خط به شرطی در $x=\alpha$ بر تابع مشتق‌پذیر f مماس است که $\alpha$ ریشه مضاعف تلاقی خط با تابع باشد.

نکته) دو تابع مشتق‌پذیر f و g به شرطی در $\alpha$ بر هم مماس هستند که شرایط $f(\alpha)=g(\alpha)$ و $f'(\alpha)=g'(\alpha)$ همزمان برقرار باشد.

برای آن‌که خط در $x=۱$ بر نمودار f مماس باشد، باید:

$۱) f(۱)=y(۱) \Rightarrow a+b=۲$

$۲) f'(۱)=y'(۱) \Rightarrow ۳a=۳ \Rightarrow a=۱ \rightarrow b=۱$

پس $b=۱$ و در نتیجه $|b-۲|=۱$

**تحلیل:**

**می‌دانیم که اگر توابع f و g در نقطه‌ای به طول $x=a$ بر هم مماس باشند، اولا مقدار هر دو تابع در $x=a$ باهم برابر است و ثانیاً شیب خط مماس بر نمودار هر دو تابع در نقطه تماس باهم برابر است یعنی $f'(a)=g'(a)$. همین یک نکته برای پاسخگویی به سوال کنکور کفایت می‌کند ایده‌ای که در تست‌های نمونه آزمون نیز به وضوح مورد استفاده قرار گرفته بود.**

سوال ۱۲۳ کنکور تجربی ۱۴۰۱

۱۲۳- معادله خط مماس بر نمودار $y=\frac{x^۲+mx+۱}{x+۳}$ در نقطه‌ای به طول واحد بر روی نمودار، به صورت $۴y-۳x=n$ است. مقدار $m+n$ چقدر است؟

۱) $-۳$ ۲) $-۲$ ۳) ۲ ۴) ۳

## آزمون همه دروس مرحله ٤ ماز

۹۵- اگر $f(x)=\dfrac{x^{۲}[x]-۸}{x-۲}\ ,\ g(x)=\dfrac{\sin ۲x}{\tan x}$ باشد، آنگاه حاصل $\lim\limits_{x\to ۲^{+}} f(x)-\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{۴}} g(x)$ کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۷ ۳) ۶ ۴) ۵

پاسخ: گزینه ۲

$$۱)\ \lim_{x\to ۲^{+}} f(x)=\lim_{x\to ۲^{+}}\frac{x^{۲}[۲^{+}]-۸}{x-۲}=\lim_{x\to ۲^{+}}\frac{۲x^{۲}-۸}{x-۲}=\lim_{x\to ۲^{+}}\frac{۲(x^{۲}-۴)}{x-۲}$$

حالت $\frac{۰}{۰}$ است صورت را تجزیه می‌کنیم تا عامل مبهم کننده $(x-۲)$ ساده‌گردد:

$$\lim_{x\to ۲^{+}}\frac{۲(x-۲)(x+۲)}{x-۲}=\lim_{x\to ۲^{+}} ۲(x+۲)=۲(۲+۲)=۸$$

$$۲)\ \lim_{x\to \frac{\pi}{۴}} g(x)=\lim_{x\to \frac{\pi}{۴}}\frac{\sin ۲x}{\tan x}=\frac{\sin ۲(\frac{\pi}{۴})}{\tan(\frac{\pi}{۴})}=\frac{\sin\frac{\pi}{۲}}{\tan\frac{\pi}{۴}}=\frac{۱}{۱}=۱$$

$$\lim_{x\to ۲^{+}} f(x)-\lim_{x\to \frac{\pi}{۴}} g(x)=۸-۱=۷$$

## آزمون همه دروس مرحله ۱۷ ماز

۱۱۶- حاصل $\lim\limits_{x\to ۴}\dfrac{۵-\sqrt{x^{۲}+۲\sqrt{x}+۵}}{x+\left[x^{۲}-۸x+۱۲\right]}$ کدام است؟

۱) $\frac{۱۷}{۱۰}$ ۲) $-\frac{۱۷}{۱۰}$ ۳) $-\frac{۱۷}{۲۰}$ ۴) $\frac{۱۷}{۲۰}$

پاسخ: گزینه ۳ (ریاضی ۲ ـ صفحه ۱۲۰ تا ۱۳۶ ـ دشوار)

**هر تست ماز یک کلاس درس!**

برای محاسبهٔ $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$، اگر پس از جایگذاری $x=a$ به ابهام $\frac{۰}{۰}$ برسیم، برای رفع ابهام می‌توانیم از قاعدهٔ هوپیتال استفاده کنیم. طبق این قاعده به جای $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ می‌توانیم از کسر $\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ وقتی $x\to a$ حد بگیریم، یعنی:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}\xrightarrow{Hop}\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

مثال) حاصل $\lim\limits_{x\to ۱}\dfrac{۱-\sqrt{x}}{۲-\sqrt{۵-x}}$ کدام است؟

$$\lim_{x\to ۱}\frac{۱-\sqrt{x}}{۲-\sqrt{۵-x}}\xrightarrow{Hop}\lim_{x\to ۱}\frac{-\frac{۱}{۲\sqrt{x}}}{\frac{-۱}{۲\sqrt{۵-x}}}=\frac{-\frac{۱}{۲}}{\frac{۱}{۲\sqrt{۴}}}=-۲$$

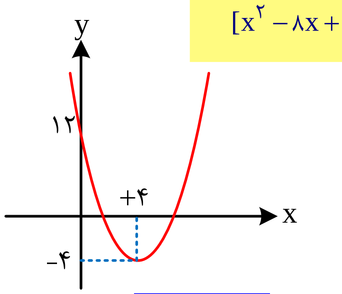
در محاسبهٔ حد کسرهای شامل رادیکال، اگر عبارت زیر رادیکال صفر شود، اکثراً نمی‌توانیم از قاعدهٔ هوپیتال استفاده کنیم، در این حدها باید ابتدا رادیکال را از بین ببریم و سپس حد را محاسبه کنیم.

مثال) حاصل $\lim\limits_{x\to(-۳)^{-}}\dfrac{\sqrt{x^{۲}+۶x+۹}}{۲x^{۲}+۷x+۳}$ کدام است؟

می‌دانیم $\sqrt{x^{۲}+۶x+۹}=|x+۳|$ است، پس:

$$\lim_{x\to(-3)^-}\frac{|x+3|}{2x^2+7x+3}=\lim_{x\to(-3)^-}\frac{-(x+3)}{(x+3)(2x+1)}=\lim_{x\to(-3)^-}\frac{-1}{2x+1}=\frac{-1}{-5}=\frac{1}{5}$$

با توجه به نمودار تابع $y=x^2-8x+12$ وقتی $x\to 4$ برود، نتیجه می‌گیریم $(x^2-8x+12)>-4$، پس: $[x^2-8x+12]=-4$




$$\lim_{x\to 4}\frac{5-\sqrt{x^2+2\sqrt{x}+5}}{x+[x^2-8x+12]}=\lim_{x\to 4}\frac{5-\sqrt{x^2+2\sqrt{x}+5}}{x-4}\xrightarrow{\text{Hop}}\lim_{x\to 4}\frac{-\dfrac{2x+\dfrac{1}{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x^2+2\sqrt{x}+5}}}{1}=-\frac{8+\dfrac{1}{2}}{2\sqrt{25}}=-\frac{\dfrac{17}{2}}{10}=-\frac{17}{20}$$

## تعیین سطح دوپینگ تجربی

۱۱۳- حاصل $\lim\limits_{x\to 4^-}\dfrac{[x]-\sqrt{2x+1}}{\sqrt[3]{2x}-2}$ کدام است؟ ( [ ] علامت جزء صحیح است.)

۱) $2$ ۲) $\frac{2}{3}$ ۳) $-\frac{2}{3}$ ۴) $-2$

پاسخ: گزینه ۴ (ریاضی ۲ ـ متوسط)

نکته ۱) برای محاسبهٔ حد عبارت شامل جزء صحیح و یا قدرمطلق، ابتدا مقدار جزء صحیح را به دست آورده و با مشخص کردن مثبت یا منفی بودن عبارت داخل قدرمطلق، قدرمطلق را نیز حذف می‌کنیم.

نکته ۲) برای ساده کردن عوامل ابهام در عبارات رادیکالی معمولاً از اتحادهای مزدوج و مجموع مکعبات (چاق و لاغر) استفاده می‌شود.

قاعدهٔ هوپیتال: در محاسبهٔ حد کسرهایی به فرم $\frac{f(x)}{g(x)}$ که به صورت مبهم $\frac{0}{0}$ هستند، یک از روش‌های رفع ابهام آن است که به جای حد $\frac{f}{g}$، حد $\frac{f'}{g'}$ را حساب کنیم. یعنی: $\boxed{\lim\frac{f}{g}=\frac{0}{0}\xrightarrow{H}\lim\frac{f'}{g'}}$

$x$ با مقادیر کمتر به ۴ نزدیک می‌شود. بنابراین $[x]=3$ می‌باشد.

$$\lim_{x\to 4^-}\frac{[x]-\sqrt{2x+1}}{\sqrt[3]{2x}-2}=\lim_{x\to 4^-}\frac{3-\sqrt{2x+1}}{\sqrt[3]{2x}-2}\times\frac{3+\sqrt{2x+1}}{3+\sqrt{2x+1}}\times\frac{\sqrt[3]{4x^2}+2\sqrt[3]{2x}+4}{\sqrt[3]{4x^2}+2\sqrt[3]{2x}+4}=\lim_{x\to 4^-}\frac{\cancelto{-1}{(9-2x-1)}(\sqrt[3]{4x^2}+2\sqrt[3]{2x}+4)}{\cancel{(2x-8)}(3+\sqrt{2x+1})}$$

$$=\lim_{x\to 4^-}\frac{-(\sqrt[3]{4x^2}+2\sqrt[3]{2x}+4)}{3+\sqrt{2x+1}}=\frac{-(4+4+4)}{3+3}=-\frac{12}{6}=-2$$

روش دوم: هوپیتال :

$$\lim_{x\to 4^-}\frac{3-\sqrt{2x+1}}{\sqrt[3]{2x}-2}\xrightarrow{\text{HOP}}\lim_{x\to 4^-}\frac{\dfrac{-2}{2\sqrt{2x+1}}}{\dfrac{2}{3\sqrt[3]{4x^2}}}=\frac{\dfrac{-1}{3}}{\dfrac{2}{12}}=-2$$

**دوپینگ تجربی ۲۲ اردیبهشت**

۱- اگر $f(x)=\frac{x|x-2|}{x+2[-x]}$، مقدار $\lim\limits_{x\to 2^-}\frac{f(x)}{x^2-4}$ کدام است؟

۱) $-\frac{1}{2}$ ۲) $-\frac{1}{4}$ ۳) $\frac{1}{4}$ ۴) $\frac{1}{2}$

پاسخ: گزینه ۳ (متوسط)

نکته) اگر f در $\alpha$ پیوستگی چپ داشته باشد:

$\lim\limits_{x\to 2^-}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$ یا $\lim\limits_{h\to 0^-}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}$ را در صورت وجود، مشتق چپ f در $x=2$ می‌نامیم. به طریق مشابه مشتق راست در $x=2$ تعریف می‌شود.

ابتدا با فرض $x<2$، ضابطه تابع f را ساده می‌کنیم:

$$x<2: f(x)=\frac{-x(x-2)}{x+2(-2)}\Rightarrow f(x)=\frac{-x(x-2)}{x-4}$$

تابع f در $x=2$ پیوسته است، لذا هم پیوستگی چپ دارد هم پیوستگی راست.

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{f(x)}{x^2-4}=\lim_{x\to 2^-}\frac{f(x)}{(x-2)(x+2)}=\frac{1}{4}f'_-(2)$$

$$f(x)=(\underbrace{x-2}_{\text{عامل صفرکننده}}).\frac{-x}{x-4}\Rightarrow f'_-(2)=\frac{-2}{-2}=+1$$

$$\text{حاصل حد}=+\frac{1}{4}$$

**تحلیل:**

**در سوال کنکور با حدی که شامل جز صحیح است مواجه هستیم و می‌دانیم که در این مواقع باید تکلیف جزء صحیح را مشخص کنیم، که در این سوال، بعد از اینکه تکلیف جزء صحیح را مشخص کردیم به حالت مبهم $\frac{0}{0}$ بر می‌خوریم که به حالت‌های مختلف از جمله دستور هوپیتال می‌توانیم از این حد رفع ابهام کنیم. همانطور که می‌بینید این پروسه در تمامی نمونه تست‌های ارائه شده از آزمون ماز، قدم به قدم پیشبینی و بررسی شده است.**

**سوال ۱۲۰ کنکور تجربی ۱۴۰۱**

۱۲۰- حاصل $\lim\limits_{x\to 2^+}\frac{x^2-4}{x^3-[x^3]}$ کدام است؟

۱) صفر ۲) $\frac{1}{3}$ ۳) ۱ ۴) $+\infty$

دوپینگ تجربی ۱۲ اردیبهشت

۲۴- جمع جواب‌های معادله مثلثاتی $۲\sin x-\tan x+۲\cos x=۱$ در بازهٔ $(۰,۲\pi)$ چه عددی است؟

۱) $۵\pi$　۲) $\frac{۷\pi}{۲}$　۳) $\frac{۹\pi}{۲}$　۴) $۴\pi$

پاسخ: گزینه ۳

نکته)

$\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$

$\tan x=\tan\beta\Rightarrow x=k\pi+\beta$　　$\cos x=\cos\alpha\Rightarrow x=۲k\pi\pm\alpha$

اگر به جای $\tan x$ قرار دهیم $\frac{\sin x}{\cos x}$، آن‌گاه:

$$۲\sin x-\frac{\sin x}{\cos x}+۲\cos x=۱$$

طرفین را در $\cos x$ ضرب می‌کنیم:

$$۲\sin x\cos x-\sin x+۲\cos^۲ x-\cos x=۰$$

$$\sin x(۲\cos x-۱)+\cos x(۲\cos x-۱)=۰$$

$$(۲\cos x-۱)(\sin x+\cos x)=۰\Rightarrow\begin{cases}\cos x=\frac{۱}{۲}\\ \sin x=-\cos x\end{cases}$$

$$\cos x=\frac{۱}{۲}\Rightarrow x=\frac{\pi}{۳},\frac{۵\pi}{۳}$$

$$\sin x=-\cos x\Rightarrow\tan x=-۱\Rightarrow x=\frac{۳\pi}{۴},\frac{۷\pi}{۴}$$

جمع جواب‌ها: $S=\frac{\pi}{۳}+\frac{۵\pi}{۳}+\frac{۳\pi}{۴}+\frac{۷\pi}{۴}=۲\pi+\frac{۵\pi}{۲}=\frac{۹\pi}{۲}$

**تحلیل:**

**در سوال کنکور می‌توان با تبدیل $\tan^۲ x$ به فرم $\frac{\sin^۲ x}{\cos^۲ x}$ و به کمک ساده‌سازی به معادله $\cos x=\frac{۱}{۲}$ رسید که چون تعداد جواب‌ها در بازه $[۰,۲\pi]$ مد نظر است، نهایتاً به کمک رسم هندسی و یا به کمک دایره مثلثاتی به جواب سوال رسید که همین ایده (البته با پروسه دشوارتر) در آزمون ماز مورد سوال قرار گرفته بود.**

**توجه: در روند ساده‌سازی معادله صورت سوال کنکور از اتحاد $۱+\tan^۲ x=\frac{۱}{\cos^۲ x}$ نیز می‌توان استفاده کرد.**

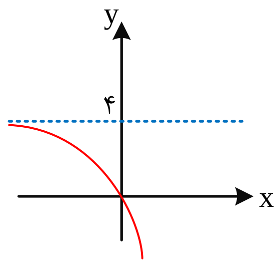
سوال ۱۱۵ کنکور تجربی ۱۴۰۱

۱۱۵- تعداد جواب‌های معادله مثلثاتی $۸\cos x-\tan^۲ x=۱$ در بازه $[۰,۲\pi]$ کدام است؟

۱) ۵　۲) ۴　۳) ۳　۴) ۲

## آزمون همه دروس مرحله ۲۳ ماز

۱۱۵–نمودار تابع $f(x)=a-۲^{b+\frac{x}{۲}}$ به صورت مقابل است. مقدار $f^{-۱}(۳)$ کدام است؟




۱) $-۴$
۲) $-۳$
۳) $-\frac{۱}{۴}$
۴) $-\frac{۱}{۲}$

پاسخ: گزینه ۱ (ریاضی ۲ ـ متوسط)

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=۴ \Rightarrow \lim_{x\to-\infty} ۲^{b+\frac{x}{۲}}=۰ \Rightarrow \lim_{x\to-\infty}(a-۲^{b+\frac{x}{۲}})=a \Rightarrow a=۴$$

$$f(x)=۴-۲^{b+\frac{x}{۲}} \Rightarrow f(۰)=۰ \Rightarrow ۴-۲^{b}=۰ \Rightarrow b=۲$$

$$f(x)=۴-۲^{۲+\frac{x}{۲}}$$

فرض می‌کنیم $f^{-۱}(۳)=\alpha$، پس $f(\alpha)=۳$

$$۴-۲^{۲+\frac{\alpha}{۲}}=۳ \Rightarrow ۲^{۲+\frac{\alpha}{۲}}=۱ \Rightarrow ۲+\frac{\alpha}{۲}=۰ \Rightarrow \alpha=-۴ \Rightarrow f^{-۱}(۳)=-۴$$

## آزمون همه دروس مرحله ۱ ماز

۹۵– نمودار توابع $f(x)=a+۲^{b-x}$ و $g(x)=۴-x^{۲}$ در دو نقطه به طول $x=۰$ و $x=۱$ متقاطع‌اند، مقدار $f(-۳)$ کدام است؟

۱) ۹ ۲) ۱۰ ۳) ۱۷ ۴) ۱۸

پاسخ: گزینه ۴

دو معادله را مساوی هم قرار می‌دهیم و $x=۰$ و $x=۱$ را جایگزین می‌کنیم:

$$a+۲^{b-x}=۴-x^{۲}$$

$$\begin{cases} x=۰ \Rightarrow a+۲^{b}=۴ \\ x=۱ \Rightarrow a+۲^{b-۱}=۳ \end{cases}$$

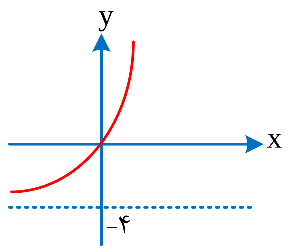
دو معادله را کم می‌کنیم:

$$۲^{b}-۲^{b-۱}=۱ \Rightarrow ۲^{b}-\frac{۱}{۲}۲^{b}=۱ \Rightarrow ۲^{b}=۲ \Rightarrow b=۱$$

$$\Rightarrow a+۲^{۱}=۴ \Rightarrow a=۲$$

$$\Rightarrow f(x)=۲+۲^{۱-x} \Rightarrow f(-۳)=۲+۱۶=۱۸$$

آزمون همه دروس مرحله ۱۵ ماز




۸۲- نمودار تابع $f(x)=-a+2^{ax-b}$ به صورت زیر است. مقدار $f(2)$ کدام است؟

۱) ۱۰۲۸
۲) ۱۰۲۰
۳) ۵۱۶
۴) ۵۰۸

پاسخ: گزینه ۲ (ریاضی ۲ ـ متوسط)

نکته ۱) $0<a<1 \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} a^x = 0 \\ \lim\limits_{x\to-\infty} a^x = +\infty \end{cases}$

نکته ۲) $a>1 \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} a^x = 0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} a^x = +\infty \end{cases}$

نکته ۳) تابع $f(x)=a^x$، برای $a>1$ صعودی اکید و برای $0<a<1$ نزولی اکید است.

تابع f صعودی اکید است، پس $2^{ax-b}$ صعودی اکید است. پس $a>0$ می‌باشد و به همین جهت $\lim\limits_{x\to-\infty} 2^{ax-b}=0$ خواهد شد. لذا:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}(-a+2^{ax-b})=-a$$

از طرفی طبق نمودار، داریم: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-4$ ، پس $a=4$ می‌باشد.

باز هم طبق نمودار داریم: $f(0)=0 \Rightarrow -a+2^{-b}=0 \Rightarrow 2^{-b}=4 \Rightarrow b=-2$

لذا: $f(x)=-4+2^{4x+2} \Rightarrow f(2)=-4+2^{10}=1020$

## تحلیل:

**در سوال کنکور، مختصات دو نقطه از نمودار تابع f داده شده است که با جایگذاری این دو نقطه در ضابطه تابع به راحتی می‌توان پارامترهای مجهول a و b را پیدا کرد، البته باید توجه کرد که چون $f^{-1}(-1)=-1$ است، پس در این تابع $f(-1)=-1$ می‌باشد. همانطور که در سوال‌های نمونه نیز می‌بینید، با جایگذاری نقاط کمکی داده شده روی نمودار و همچنین به کمک مفهوم حد در بینهایت می‌توان مجهول‌های موردنظر سوال را به دست آورد.**

سوال ۱۱۷ کنکور تجربی ۱۴۰۱

۱۱۷- تابع $f(x)=a+b(\frac{1}{2})^x$ از مبدأ مختصات عبور می‌کند. اگر $f^{-1}(-1)=-1$ باشد، حاصل $a-b$ چقدر است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

آزمون همه دروس مرحله ۹ ماز

۹۵- نمودار تابع $f(x)=x^۲+\sqrt{x-۱}$ را نسبت به خط $y=x$ قرینه کرده و نمودار بدست آمده را $k$ واحد به سمت چپ انتقال می‌دهیم اگر نمودار حاصل نمودار تابع $y=f(x)$ را در نقطه‌ای به طول $x=۲$ قطع کند، مقدار $k$ کدام است؟

۱) ۲۷ ۲) ۲۳ ۳) ۲۵ ۴) ۲۹

پاسخ: گزینه ۳ (ریاضی ۳- صفحه ۲۴ تا ۲۹- متوسط)

اولاً دقت کنید $\sqrt{x-۱}$ تابعی اکیداً صعودی است و $y=x^۲$ برای $x>۰$ اکیداً صعودی است پس در کل تابع $y=x^۲+\sqrt{x-۱}$ در بازه $[۱,+\infty)$ اکیداً صعودی و در نتیجه وارون‌پذیر خواهد بود. بعد از آنکه $f$ را نسبت به خط $y=x$ قرینه می‌کنیم نمودار حاصل $f^{-۱}(x)$ است و اگر آن را $k$ واحد به سمت چپ انتقال دهیم، تابع $f^{-۱}(x+k)$ بدست می‌آید.

قرینه یک تابع نسبت به خط $y=x$ یعنی وارون تابع، و بعد از آن که وارون تابع را به‌دست آوردیم باید آن را $k$ واحد به چپ انتقال دهیم یعنی $y=f^{-۱}(x+k)$

پس در واقع:

$$f^{-۱}(x+k)=f(x)\xrightarrow{x=۲}f^{-۱}(۲+k)=f(۲)$$

$$f^{-۱}(۲+k)=۴+۱=۵\Rightarrow f(۵)=۲+k$$

$$\Rightarrow ۲۵+۲=۲+k\Rightarrow k=۲۵$$

## تحلیل:

**در هر دو سوال، بعد از انتقال تابع اصلی، باید معادله تقاطع تابع جدید و تابع اصلی را حل کنیم و مختصات نقطه تقاطع را به دست بیاریم، ایده‌ای تکراری که بارها در کنکورهای گذشته از جمله کنکور ۹۹ و ۹۷ مورد سوال قرار گرفته بود!!**

### سوال ۱۰۶ کنکور تجربی ۱۴۰۱

۱۰۶- نمودار تابع با ضابطه $f(x)=۴x-x^۲$ را در امتداد محور $x$ها، ۲ واحد در جهت منفی انتقال می‌دهیم. فاصله نقطه برخورد منحنی حاصل با نمودار تابع $f$، از مبدأ مختصات کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) $۲\sqrt{۵}$ ۴) $\sqrt{۱۰}$

گروه آموزشی ماز

آزمون دوپینگ تجربی ۳ خرداد

۱- به ازای چند مقدار صحیح m، نمودار سهمی $y=(۳-m)x^{۲}+۴x+۲m-۱$ حداکثر از ۳ ناحیه محورهای مختصات عبور می‌کند؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) بی‌شمار

پاسخ: گزینه ۳ (ریاضی ۲ ـ متوسط)

باید حالاتی را که نمودار سهمی از دو ناحیه یا سه ناحیه عبور می‌کند، بررسی کنیم:

الف) شرط اینکه نمودار سهمی از دو ناحیه عبور کند:

$$\Delta \le ۰ \Rightarrow ۱۶-۴(۳-m)(۲m-۱)\le ۰ \Rightarrow ۴-(-۲m^{۲}+۷m-۳)\le ۰ \Rightarrow ۲m^{۲}-۷m+۷\le ۰ \Rightarrow \text{جواب ندارد}$$

ب) شرط اینکه نمودار سهمی از سه ناحیه عبور کند:

(حالت اول $۲m-۱=۰ \Rightarrow m=\frac{۱}{۲}$

(حالت دوم $\begin{cases} \Delta > ۰ \rightarrow \text{همواره برقرار است} \\ P>۰ \rightarrow \dfrac{۲m-۱}{۳-m}>۰ \rightarrow \dfrac{۱}{۲}<m<۳ \end{cases}$

پس در حالت $\frac{۱}{۲}\le m<۳$، نمودار تابع، حداکثر از سه ناحیه عبور می‌کند که شامل اعداد صحیح ۱ و ۲ است.

آزمون همه دروس مرحله ۱۲ ماز

۱۴۱- به ازای چند مقدار صحیح از m، نمودار تابع $f(x)=-x^{۲}+mx+m-۳$، فقط از ناحیهٔ دوم مختصات عبور نمی‌کند؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) هیچ‌مقدار m

پاسخ: گزینه ۱ (ریاضی ۲- صفحه ۱۱ تا ۱۸- متوسط)

**هر تست ماز یک کلاس درس!**

- برای آن که نمودار سهمی فقط از یک ناحیهٔ خاص مختصات عبور نکند، داریم:

۱) فقط از ناحیهٔ اول عبور نکند: $\Delta>۰, a<۰, P\geq ۰, S<۰$

۲) فقط از ناحیهٔ دوم عبور نکند: $\Delta>۰, a<۰, P\geq ۰, S>۰$

۳) فقط از ناحیهٔ سوم عبور نکند: $\Delta>۰, a>۰, P\geq ۰, S>۰$

۴) فقط از ناحیهٔ چهارم عبور نکند: $\Delta>۰, a>۰, P\geq ۰, S<۰$

برای آن که نمودار سهمی به معادلهٔ $f(x)=-x^{۲}+mx+m-۳$ فقط از ناحیهٔ دوم مختصات عبور نکند باید:

$a<۰, \Delta>۰, P\geq ۰, S>۰$

۱) $a<۰ \Rightarrow -۱<۰$

۲) $\Delta=(m)^{۲}-۴(-۱)(m-۳)>۰ \Rightarrow m^{۲}+۴m-۱۲>۰ \Rightarrow (m+۶)(m-۲)>۰$

$\Rightarrow m<-۶$ یا $m>۲$

۳) $P=\frac{m-۳}{-۱}\geq ۰ \Rightarrow ۳-m\geq ۰ \Rightarrow m\leq ۳$

۴) $S=\frac{-m}{-۱}>۰ \Rightarrow m>۰$

با گرفتن اشتراک از مجموعه جواب‌های (۱)، (۲)، (۳) و (۴) داریم: $۲<m\leq ۳$

تنها مقدار صحیح در بازه $(۲,۳]$، $m=۳$ است.

**تحلیل:**

**هم در سوال کنکور و هم در سوالات آزمون ماز، بحث عبور منحنی سهمی از نواحی خاصی از محورهای مختصات مطرح شده است و همانطور که می‌دانید برای تعیین وضعیت سهمی در این گونه سوالات، علامت $\Delta$ و همچنین علامت ضریب $x^{۲}$ و نیز علامت پارامترهای S و P می‌تواند تعیین کننده وضعیت سهمی باشد.**

سوال ۱۰۳ کنکور تجربی ۱۴۰۱

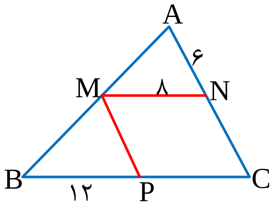
۱۰۳- به ازای چند مقدار a، سهمی $y=ax^{۲}+(۳+۲a)x$ از ناحیه سوم محورهای مختصات نمی‌گذرد؟

۱) هیچ مقدار a ۲) تمام مقادیر a ۳) ۱ ۴) ۲

گروه آموزشی ماز

آزمون دوپینگ تجربی ۱۰ خرداد

۱۶- در شکل زیر چهارضلعی **MNCP** متوازی‌الاضلاع است. با توجه به اندازه‌های روی شکل، نسبت مساحت مثلث **AMN** به مساحت متوازی‌الاضلاع کدام است؟

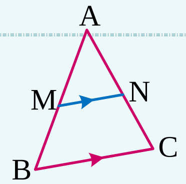



۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$

۳) $\frac{۱}{۴}$ ۴) $\frac{۱}{۵}$

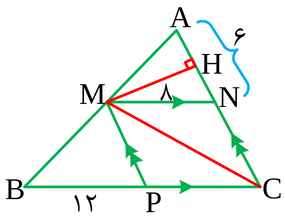
پاسخ: گزینه ۱ (ریاضی ۲ ـ صفحه ۳۵ ـ دشوار)

نکته) طبق تعمیم تالس در مثلث، مطابق شکل، داریم:




$$MN \parallel BC \Rightarrow \frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$$

اولاً چون MNCP متوازی‌الاضلاع است، پس:




$$\begin{cases} MN \parallel BC \\ PC = MN = ۸ \rightarrow BC = ۱۲ + ۸ = ۲۰ \end{cases}$$

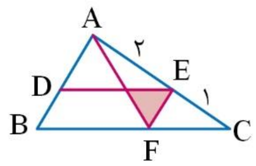
ثانیاً طبق تعمیم قضیه تالس، داریم:

$$MN \parallel BC \rightarrow \frac{MN}{BC} = \frac{AN}{AC} \rightarrow \frac{۸}{۲۰} = \frac{۶}{AC} \rightarrow AC = ۱۵ \rightarrow NC = ۱۵ - ۶ = ۹$$

اینک با در نظر گرفتن اینکه هر قطر متوازی‌الاضلاع آن را به دو مثلث همنهشت تقسیم می‌کند، داریم:

$$\frac{S_{\overset{\triangle}{AMN}}}{S_{\overset{\triangle}{MNC}}} = \frac{\frac{۱}{۲} AH \times AN}{\frac{۱}{۲} AH \times NC} = \frac{۶}{۹} = \frac{۲}{۳} \rightarrow \frac{S_{\overset{\triangle}{AMN}}}{\frac{۱}{۲} S_{MNCP}} = \frac{۲}{۳} \rightarrow \frac{S_{\overset{\triangle}{AMN}}}{S_{MNCP}} = \frac{۱}{۳}$$

آزمون همه دروس مرحله ۱۶ ماز



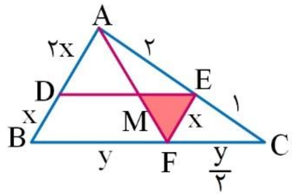
**۱۲۹- اگر چهارضلعی DEFB متوازی‌الاضلاع باشد، مساحت ناحیه رنگ شده، چه کسری از مساحت مثلث ABC است؟**

۱) $\frac{۱}{۲۷}$ ۲) $\frac{۲}{۲۵}$

۳) $\frac{۱}{۱۰}$ ۴) $\frac{۲}{۲۷}$

پاسخ: گزینه ۴ (ریاضی ۲ ـ دشوار)

چهارضلعی DEFB متوازی‌الاضلاع است. پس $DE = BF$ و $EF = DB$، با توجه به قضیه تالس داریم:



$$\frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC} \Rightarrow \frac{۲}{۳} = \frac{y}{BC} \Rightarrow BC = \frac{۳}{۲}y \Rightarrow FC = \frac{y}{۲}$$

از طرفی در مثلث AFC داریم:

$$\frac{ME}{FC} = \frac{۲}{۳} \Rightarrow ME = \frac{۲}{۳}\times\frac{y}{۲} = \frac{y}{۳}$$

در متوازی‌الاضلاع $\hat{B} = \hat{E}$، پس:

$$S_{\overset{\triangle}{ABC}} = \frac{۱}{۲}AB.BC\sin\hat{B} = \frac{۱}{۲}.۳x.\frac{۳y}{۲}\sin\hat{B}$$

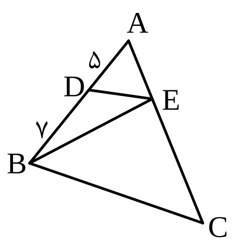
$$S_{\overset{\triangle}{EMF}} = \frac{۱}{۲}EM.FE.\sin\hat{E} = \frac{۱}{۲}.\frac{y}{۳}.x.\sin\hat{E}$$

$$\Rightarrow \text{نسبت مساحت‌ها} = \frac{S_{\overset{\triangle}{EMF}}}{S_{\overset{\triangle}{ABC}}} = \frac{\frac{۱}{۲}\left(\frac{y}{۳}\right)(x)\sin\hat{E}}{\frac{۱}{۲}(۳x)\left(\frac{۳y}{۲}\right)\sin\hat{B}} = \frac{\frac{xy}{۳}}{\frac{۹xy}{۲}} = \frac{۲}{۲۷}$$

**تحلیل:**

**در سوال مطرح شده در کنکور، چون ارتفاع دو مثلث BCE و BDE باهم برابر است بنابراین نسبت مساحت دو مثلث با نسبت قاعده آنها برابر است و برای پیدا کردن نسبت قاعده این دو مثلث، می‌توان از تعمیم قضیه تالس کمک گرفت، مبحثی که در آزمون‌های ماز حتی با دشواری بیشتری حل گردید.**

## سوال ۱۲۹ کنکور تجربی ۱۴۰۱



**۱۲۹- در مثلث ABC، ضلع BC موازی ضلع DE است. مساحت مثلث BCE، چند برابر مساحت مثلث BDE است؟**

۱) ۱/۵

۲) ۱/۷

۳) ۲/۱

۴) ۲/۴

گروه آموزشی ماز

## آزمون جامع ۳ دوپینگ

۱۰۴- جزء صحیح عدد $\frac{1}{\sqrt{3-2\sqrt{2}}}-\frac{\sqrt{200}}{\sqrt[4]{1024}-\sqrt{18}}$ کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۸ ۳) ۹ ۴) ۷

پاسخ: گزینه ۴ (ریاضی ۱ و ۲ ـ متوسط)

$$\frac{\sqrt{200}}{\sqrt[4]{1024}-\sqrt{18}}=\frac{\sqrt{100\times 2}}{\sqrt[4]{2^{10}}-\sqrt{9\times 2}}=\frac{10\sqrt{2}}{\sqrt{2^5}-3\sqrt{2}}=\frac{10\sqrt{2}}{4\sqrt{2}-3\sqrt{2}}=\frac{10\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=10$$

$$\frac{1}{\sqrt{3-2\sqrt{2}}}\times\frac{\sqrt{3+2\sqrt{2}}}{\sqrt{3+2\sqrt{2}}}=\frac{\sqrt{3+2\sqrt{2}}}{\sqrt{9-8}}=\sqrt{3+2\sqrt{2}}=\sqrt{(1+\sqrt{2})^2}=1+\sqrt{2}\simeq 2/4$$

$$\rightarrow [10-2/4]=[7/6]=7$$

## آزمون تعیین سطح دوپینگ تجربی

۱۰۲- حاصل $\sqrt{14-6\sqrt{5}}+\frac{\sqrt{125}+1}{6-\sqrt{5}}$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) $2\sqrt{5}$ ۳) ۴ ۴) $2(\sqrt{5}-1)$

پاسخ: گزینه ۳ (ریاضی ۱ ـ متوسط )

نکته) برای ساده کردن رادیکال مرکب $\sqrt{A\pm B\sqrt{C}}$ از اتحاد مربع استفاده کنید. (حدس بزنید $A\pm B\sqrt{C}$ مربع کامل است.)

$$\sqrt{7-2\sqrt{6}}=\sqrt{(\sqrt{6}-1)^2}=\sqrt{6}-1$$

$$\sqrt{5-2\sqrt{6}}=\sqrt{(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2}=\sqrt{3}-\sqrt{2}$$

صورت کسر را به صورت اتحاد مجموع مکعبات (چاق و لاغر) و عبارت زیر رادیکال را به صورت اتحاد مربع می‌نویسیم:

$$\frac{\sqrt{125}+1}{6-\sqrt{5}}+\sqrt{14-6\sqrt{5}}=\frac{(\sqrt{5})^3+1}{6-\sqrt{5}}+\sqrt{(\sqrt{5}-3)^2}=\frac{(\sqrt{5}+1)\cancel{(5-\sqrt{5}+1)}}{\cancel{6-\sqrt{5}}}+|\sqrt{5}-3|=\sqrt{5}+1+(3-\sqrt{5})=4$$

**تحلیل:**

**در سوال کنکور ایده ساده کردن رادیکال مرکب مطرح شده بود که این ایده در سوال‌های متعددی از آزمون‌های ماز مورد سوال قرار گرفته بود که دونمونه از آنها را برایتان آورده‌ایم.**

## سوال ۱۰۱ کنکور تجربی ۱۴۰۱

۱۰۱- حاصل عبارت $\sqrt{1+\sqrt{7}}\sqrt[4]{(4+\sqrt{7})^{-1}}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\sqrt[4]{2}$ ۳) ۲ ۴) $2\sqrt[4]{2}$

گروه آموزشی ماز

## آزمون تعیین سطح دوپینگ تجربی

۱۰۵- مجموعه جواب نامعادلهٔ $۱<\frac{۳x+۲}{x-۲}<۲$ به صورت $|x-\alpha|<\beta$ است. $\frac{\alpha}{\beta}$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $۲$ ۳) $-\frac{۱}{۲}$ ۴) $-۲$

پاسخ: گزینه ۴ (ریاضی ۱ ـ متوسط)

نامعادلهٔ داده شده را به دو نامعادله تقسیم کرده، پس از حل آن‌ها اشتراک جواب‌ها را به دست می‌آوریم:

$$۱<\frac{۳x+۲}{x-۲}<۲\rightarrow\begin{cases}\frac{۳x+۲}{x-۲}>۱\rightarrow\frac{۳x+۲}{x-۲}-۱>۰\rightarrow\frac{۲x+۴}{x-۲}>۰\rightarrow\begin{cases}x<-۲\\x>۲\end{cases} & (۱)\\ \frac{۳x+۲}{x-۲}<۲\rightarrow\frac{۳x+۲}{x-۲}-۲<۰\rightarrow\frac{x+۶}{x-۲}<۰\rightarrow -۶<x<۲ & (۲)\end{cases}$$

$$(۱)\bigcap(۲)\Rightarrow -۶<x<-۲$$

از طرفی: $|x-\alpha|<\beta\rightarrow-\beta<x-\alpha<\beta\rightarrow\alpha-\beta<x<\alpha+\beta\rightarrow\begin{cases}\alpha-\beta=-۶\\\alpha+\beta=-۲\end{cases}\rightarrow۲\alpha=-۸\rightarrow\alpha=-۴\rightarrow\beta=۲\rightarrow\frac{\alpha}{\beta}=-۲$

روش دوم:

$$۱<\frac{۳x+۲}{x-۲}<۲\rightarrow-\frac{۱}{۲}<\frac{۳x+۲}{x-۲}-\frac{۳}{۲}<\frac{۱}{۲}\rightarrow-\frac{۱}{۲}<\frac{۳x+۱۰}{۲(x-۲)}<\frac{۱}{۲}\rightarrow-۱<\frac{۳x+۱۰}{x-۲}<۱\rightarrow\left|\frac{۳x+۱۰}{x-۲}\right|<۱$$

$$\xrightarrow{x\neq۲}|۳x+۱۰|<|x-۲|\rightarrow(۳x+۱۰)^۲<(x-۲)^۲\rightarrow(۳x+۱۰)^۲-(x-۲)^۲<۰\rightarrow$$

$$(۲x+۱۲)(۴x+۸)<۰\rightarrow-۶<x<-۲\rightarrow-۲<x+۴<۲\rightarrow|x+۴|<۲\rightarrow\alpha=-۴,\beta=۲$$

**تحلیل:**

**در سوال کنکور، بعد از حل نامعادله و به دست آوردن محدوده $x$، باید محدوده $۳x$ را به دست بیاریم و تعداد عددهای صحیح این محدوده را گزارش کنیم که همین روند را هم در سوال آزمون تعیین سطح دوپینگ باید انجام می‌دادیم با این تفاوت که سوال آزمون ماز به مراتب دشوارتر بود.**

## سوال ۱۰۴ کنکور تجربی ۱۴۰۱

۱۰۴- اگر $\frac{۴-۲x}{۳x+۱}\geq۰$ باشد، مجموعه مقادیر $[۳x]$ چند عضو دارد؟

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۸

گروه اموزشی ماز

### آزمون دوپینگ تجربی ۱۷ اردیبهشت

۸- اگر $\lim\limits_{x\to 1}\sqrt{x^2+ax+b}=0$ باشد، حاصل $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{ax^b-4}{ax-\sqrt{bx^2+3x}}$ کدام است؟

۱) $-2$ ۲) $-1$ ۳) $1$ ۴) $2$

پاسخ: گزینه ۴ (متوسط)

چون $\lim\limits_{x\to 1}\sqrt{x^2+ax+b}$ از هر دو طرف برابر صفر شده است. بنابراین می‌توان گفت که عبارت زیر رادیکال باید به ازای $x=1$ برابر صفر باشد و چون عبارت زیر رادیکال قرار دارد بنابراین مقدار آن در همسایگی $x=1$ مثبت است پس می‌توان گفت که عبارت زیر رادیکال باید به فرم $(x-1)^2$ باشد، پس:

$$x^2+ax+b=(x-1)^2=x^2-2x+1 \Rightarrow \begin{cases} a=-2 \\ b=1 \end{cases}$$

حال با داشتن مقادیر a و b، حاصل حد خواسته شده را به دست می‌آوریم:

$$\lim_{x\to -\infty}\frac{ax^b-4}{ax-\sqrt{bx^2+3x}}=\lim_{x\to -\infty}\frac{-2x-4}{-2x-\sqrt{x^2+3x}}\xrightarrow{\text{پرتوان}}\lim_{x\to -\infty}\frac{-2x}{-2x-|x|}$$

$$=\lim_{x\to -\infty}\frac{-2x}{-2x+x}=\lim_{x\to -\infty}\frac{-2x}{-x}=+2$$

### آزمون همه دروس مرحله ۱۷ ماز

۱۲۹- اگر $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3+ax^2+bx}{x-2}=0$ باشد، حاصل $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{bx+\sqrt{-ax^2+10}}{(a+b)x^2+3x+1}$ کدام است؟

۱) صفر ۲) $2$ ۳) $\dfrac{4}{3}$ ۴) $\dfrac{2}{3}$

پاسخ: گزینه ۴ (ریاضی ۳ ـ صفحه ۵۰ الی ۶۴ ـ دشوار)

چون حاصل حد صفر شده پس عامل $(x-2)$ در صورت باقی‌مانده است، پس عامل $(x-2)$ در صورت توان ۲ داشته است.

$$\lim_{x\to 2}\frac{x(x^2+ax+b)}{x-2}=0$$

$$\left.\begin{array}{l}(x-2)^2=x^2-4x+4 \\ x^2+ax+b\end{array}\right\} \xrightarrow{\text{مقایسه}} \Rightarrow \begin{cases} a=-4 \\ b=4 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to -\infty}\frac{4x+\sqrt{4x^2+10}}{3x+1}\xrightarrow{\text{هم‌ارزی پرتوان}}\lim_{x\to -\infty}\frac{4x+|2x|}{3x}=\lim_{x\to -\infty}\frac{4x-2x}{3x}=\frac{2}{3}$$

**تحلیل:**

**در سوال کنکور علی رغم پیچیدگی ظاهر آن، با یک سوال نسبتاً ساده حد در بینهایت مواجهیم که برای حل آن پس از تعیین وضعیت تابع g در سمت راست $x=1$، می‌توانیم به جواب سوال دست پیدا کنیم. همانطور که می‌بینید، نمونه‌ها ومدل‌های مشابه آن را در آزمون‌های ماز (با همان ایده) دیده بودیم.**

### سوال ۱۲۱ کنکور تجربی ۱۴۰۱

۱۲۱- اگر $g(x)=\dfrac{\sqrt{ax^2+bx+c}}{|x-1|}$ و $\lim\limits_{x\to 1^+}(4-[x])g(x)=6$ باشد، حاصل $\lim\limits_{x\to +\infty}g(x)$ کدام است؟

۱) $-1$ ۲) $1$ ۳) $2$ ۴) $-2$

آزمون دوپینگ تجربی ۹ اردیبهشت

۶- $a_n$ دنباله‌ای حسابی با قدرنسبت منفی است. اگر مجموع جملات هفتم و سیزدهم برابر $-۴۶$ و اختلاف جملات هشتم و شانزدهم برابر ۲۴ باشد، جملهٔ بیستم کدام است؟

۱) $-۴۶$ ۲) $-۴۹$ ۳) $-۵۳$ ۴) $-۵۹$

پاسخ: گزینه ۳ (ریاضی ۱ ـ ساده)

جملهٔ عمومی دنبالهٔ حسابی با جملهٔ اول $a$ و قدرنسبت $d$: $a_n = a + (n-۱)d$

جملهٔ عمومی دنبالهٔ حسابی با جملهٔ اول $a$ و قدرنسبت $d$ به صورت $a_n = a + (n-۱)d$ می‌باشد. قدرنسبت دنباله منفی است؛ یعنی جملهٔ هشتم از جملهٔ شانزدهم بزرگتر است. بنابراین:

$$a_۸ - a_{۱۶} = ۲۴ \rightarrow (a+۷d)-(a+۱۵d) = ۲۴ \rightarrow -۸d = ۲۴ \rightarrow d = -۳$$

از طرفی: $a_۷ + a_{۱۳} = -۴۶ \rightarrow (a+۶d)+(a+۱۲d) = -۴۶ \rightarrow a+۹d = -۲۳ \rightarrow a-۲۷ = -۲۳ \rightarrow a = ۴$

بنابراین: $a_n = ۴ + (n-۱)(-۳) = -۳n + ۷ \rightarrow a_{۲۰} = -۵۳$

آزمون همه دروس مرحله ۵ ماز

**۹۸- در یک دنباله حسابی اگر مجموع جملات سوم و هفتم برابر پانزده و مجموع جملات نهم و بیست‌ویکم برابر بیست‌ونه باشد، جمله‌ی دهم برابر کدام است؟**

۱) ۱۱ ۲) ۱۲ ۳) ۱۰ ۴) ۹

پاسخ: گزینه ۱ (صفحه۲۱تا۲۴-متوسط)

**هر تست ماز یک کلاس درس!**

در هر دنباله حسابی داریم:

$$t_n + t_m = t_s + t_t \Leftrightarrow n+m = s+t$$

همین‌طور ممکن است تعداد جملات هر طرف بیشتر از دو تا باشد ولی برای اینکه بتوانیم از این نکته استفاده کنیم باید حتماً تعداد جملات دو طرف برابر و نیز مجموع اندیس‌های دو طرف هم برابر باشند. مثلاً:

$$t_1 + t_7 + t_{19} = t_9 + t_9 + t_9 = t_2 + t_8 + t_{17}$$

نکته مشابهی در مورد دنباله هندسی هم وجود دارد. در هر دنباله هندسی:

$$a_m \times a_n = a_s \times a_t \Leftrightarrow m+n = s+t$$

مثلاً:

$$a_1 \times a_9 = a_3 \times a_7 = a_2 \times a_8$$

**روش اوّل:** اگر جمله اول برابر a و قدرنسبت برابر d باشد:

$$\begin{cases} t_3 + t_7 = 15 \Rightarrow a + 2d + a + 6d = 15 \\ t_9 + t_{21} = 29 \Rightarrow a + 8d + a + 20d = 29 \end{cases}$$

$$-\begin{cases} 2a + 8d = 15 \\ 2a + 28d = 29 \end{cases}$$

$$20d = 14 \Rightarrow d = 0/7 \Rightarrow a = 4/7$$

$$t_{10} = a + 9d = 4/7 + 9 \times 0/7 = 11$$

**روش دوم:** براساس نکته‌ی آمده در درسنامه داریم:

$$t_3 + t_7 + t_9 + t_{21} = 4t_{10} = 44 \Rightarrow t_{10} = 11$$

زیرا:

$$3+7+9+21 = 10+10+10+10 = 40$$

## تحلیل:

**در کنکور امسال، سوالی که از مبحث الگو و دنباله مطرح شد یک سوال بسیار ساده بود طوری که تنها با به دست آوردن پارامترهای مجهول جمله عمومی الگو به واسطه حل یک دستگاه دو معادله و دو مجهول، به راحتی می‌توانستیم به خواسته سوال برسیم. همانطور که در نمونه‌های ارائه شده از آزمون ماز نیز مشاهده می‌کنید، ایده اصلی همان به دست آوردن جمله عمومی دنباله به کمک حل دستگاه و در نهایت محاسبه خواسته سوال به کمک آن می‌باشد.**

## سوال ۱۰۲ کنکور تجربی ۱۴۰۱

**۱۰۲- اگر ۸ و ۵ به ترتیب جملات پنجم و دهم یک الگوی خطی باشند، جمله شانزدهم کدام است؟**

۱) ۱۱/۶ ۲) ۹/۶ ۳) ۲/۴ ۴) ۱/۴

آزمون دوپینگ تجربی ۹ اردیبهشت

**۱۴– به چند طریق می‌توان از بین ۵ ایرانی، ۴ فرانسوی و ۳ ژاپنی یک کمیتهٔ ۴ نفره انتخاب کرد به طوری‌که در آن حداقل یک ایرانی باشد و بیش از یک فرانسوی نباشد؟**

۱) ۱۲۵ ۲) ۱۷۵ ۳) ۲۷۰ ۴) ۲۹۰

پاسخ: گزینه ۴ (ریاضی ۱ ـ متوسط)

نکته) به هر انتخاب r شیء از n شیء متمایز که در آن ترتیب انتخاب اهمیت نداشته باشد یا به عبارتی به هر زیرمجموعهٔ r عضوی از یک مجموعهٔ n عضوی، یک ترکیب r تایی از n شیء می‌گوییم و آن را به صورت‌های زیر نمایش می‌دهیم:

$$C(n,r)=\binom{n}{r} \qquad ۰\le r\le n$$

خواهیم داشت: $\binom{n}{r}=\frac{P(n,r)}{r!}=\frac{n!}{(n-r)!r!}$

حالت اول) در کمیته، یک فرانسوی باشد: باید از بین ۵ ایرانی و ۳ ژاپنی، ۳ نفر انتخاب کنیم که حداقل یک نفر ایرانی باشد.

راه‌حل اول: $\underbrace{\binom{۵}{۱}\binom{۳}{۲}}_{\text{یک ایرانی}}+\underbrace{\binom{۵}{۲}\binom{۳}{۱}}_{\text{دو ایرانی}}+\underbrace{\binom{۵}{۳}}_{\text{سه ایرانی}}=۱۵+۳۰+۱۰=۵۵$

راه‌حل دوم: کل حالات – حالاتی که ایرانی نباشد $=\binom{۸}{۳}-\binom{۳}{۳}=۵۶-۱=۵۵$

حال تعداد حالات انتخاب یک فرانسوی یعنی $\binom{۴}{۱}$ را در این عدد ضرب می‌کنیم:

$$\binom{۴}{۱}\times ۵۵=۲۲۰$$

حالت دوم) در کمیته، هیچ فرانسوی‌ای نباشد: باید از بین ۵ ایرانی و ۳ ژاپنی، ۴ نفر انتخاب کرد که قطعاً حداقل یک ایرانی وجود خواهد داشت.

$$\binom{۸}{۴}=\frac{۸!}{۴!۴!}=۷۰$$

جواب مساله $=۲۲۰+۷۰=۲۹۰$

روش دوم) با کمی دقت در می‌یابیم حالت‌های مطلوب طبق جدول زیر است:

| تعداد حالات | ژاپنی | فرانسوی | ایرانی |
|---|---|---|---|
| $\binom{۳}{۲}\binom{۴}{۱}\binom{۵}{۱}=۶۰$ | ۲ | ۱ | ۱ |
| $\binom{۳}{۳}\binom{۵}{۱}=۵$ | ۳ | ۰ | ۱ |
| $\binom{۳}{۱}\binom{۴}{۱}\binom{۵}{۲}=۱۲۰$ | ۱ | ۱ | ۲ |
| $\binom{۳}{۲}\binom{۵}{۲}=۳۰$ | ۲ | ۰ | ۲ |
| $\binom{۳}{۱}\binom{۵}{۳}=۳۰$ | ۱ | ۰ | ۳ |
| $\binom{۴}{۱}\binom{۵}{۳}=۴۰$ | ۰ | ۱ | ۳ |
| $\binom{۵}{۴}=۵$ | ۰ | ۰ | ۴ |

$\xrightarrow{+} ۲۹۰$

**تحلیل:**

**اگر کمی به سوال کنکور و سوال ۱۴ آزمون ۱۹ اردیبهشت دوپینگ دقت کنیم متوجه می‌شویم که وجه مشترک آنها این است که در هر دو سوال، راه رسیدن به جواب مساله، جدا کردن حالت‌های مطلوب سوال و محاسبه تعداد مطلوب هر حالت و در نهایت جمع آنها است.**

### سوال ۱۲۶ کنکور تجربی ۱۴۰۱

**۱۲۶- ۷ کتاب در موضوعات مختلف که ریاضی، فیزیک و زیست هم جزو آنهاست، در اختیار داریم. به چند طریق می‌توان ۴ کتاب را طوری انتخاب کرد که اگر ریاضی انتخاب شود، زیست نیز انتخاب شود و اگر فیزیک انتخاب شود زیست انتخاب نشود؟**

۱) ۱۰ ۲) ۱۱ ۳) ۱۵ ۴) ۱۶

آزمون همه دروس مرحله ۱۱ ماز

۱۰۷- اگر $g(x)=2x+1$ و $(fog)(x)=8x^2+6x+5$ باشند، معادلهٔ $(gof)(x)=6x+f(x)$ دارای چند جواب صحیح است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

پاسخ: گزینه ۱ (ریاضی ۳ ـ صفحه ۱۱ تا ۱۴ ـ دشوار)

**هر تست ماز یک کلاس درس!**

برای تعیین ضابطهٔ $f$ با داشتن توابع $fog$ و $g$ ابتدا ضابطهٔ تابع $g(x)$ را برابر با $t$ فرض کرده و $x$ را برحسب $t$ به‌دست می‌آوریم سپس در تابع مرکب داده شده به جای $x$، عبارت به‌دست آمده برحسب $t$ را قرار می‌دهیم و تابع $f$ را برحسب $t$ به‌دست می‌آوریم و در آخر هم در تابع $f(t)$ به جای همهٔ $t$ ها، $x$ قرار می‌دهیم تا ضابطهٔ $f(x)$ به‌دست آید.

به عنوان مثال اگر $g(x)=x+1$ و $(fog)(x)=2x+3$ باشد برای به‌دست آوردن تابع $f(x)$ داریم:

$$g(x)=x+1=t \Rightarrow x=t-1$$

$$f(g(x))=2x+3 \Rightarrow f(t)=2(t-1)+3=2t+1 \Rightarrow f(x)=2x+1$$

برای به‌دست آوردن تابع $f(x)$ داریم:

$$g(x)=2x+1=t \Rightarrow x=\frac{t-1}{2}$$

$$f(g(x))=8x^2+6x+5 \Rightarrow f(t)=8\left(\frac{t-1}{2}\right)^2+6\left(\frac{t-1}{2}\right)+5=2t^2-t+4$$

$$\Rightarrow f(x)=2x^2-x+4$$

حال برای تشکیل معادلهٔ داده شده، ابتدا تابع $gof$ را تشکیل می‌دهیم:

$$(gof)(x)=g(f(x))=2f(x)+1=2(2x^2-x+4)+1=4x^2-2x+9$$

حال معادلهٔ داده شده را تشکیل می‌دهیم و حل می‌کنیم:

$$(gof)(x)=6x+f(x) \Rightarrow 4x^2-2x+9=6x+2x^2-x+4 \Rightarrow 2x^2-7x+5=0$$

مجموع ضرایب صفر است $\rightarrow$ $\begin{cases} x=1 \\ x=\frac{5}{2}=2/5 \end{cases}$ $\Rightarrow$ معادله دارای یک جواب صحیح است

**تحلیل:**

**ایده اصلی هر دو سوال، به دست آوردن تابع درونی تابع مرکب است اما این پایان ماجرا نیست چرا که بعد از به دست آمدن تابع درونی، باید مجموعه عملیاتی را به کمک این تابع انجام دهیم تا به جواب مساله برسیم؛ که به وضوح شاهد این روند در هر دو سوال هستیم، عملیاتی که در سوال آزمون ماز به مراتب سنگین‌تر بود.**

سوال ۱۱۰ کنکور تجربی ۱۴۰۱

۱۱۰- اگر $gof(x)=5x^2+11$ و $f(x)=2x$ باشد، کمترین مقدار $g(x-7)$ چقدر است؟

۱) ۳ ۲) ۷ ۳) ۹ ۴) ۱۱

آزمون همه دروس مرحله ٦ ماز

۹۱- تابع $y=a\sqrt{۴x^۲-۴x+۱}+\sqrt{۹x^۲-۶x+۱}$ در بازه‌ی $\left[\frac{۱}{۳},\frac{۱}{۲}\right]$ تابع ثابت $y=k$ است، مقدار $ak$ کدام است؟

۱) ۰/۷۵ ۲) ۰/۵ ۳) ۰/۲۵ ۴) ۱/۲۵

پاسخ: گزینه ۱ (ریاضی ۱- صفحه ۱۱۰ تا ۱۱۲ - متوسط)

$$y=a\sqrt{(۲x-۱)^۲}+\sqrt{(۳x-۱)^۲}$$
$$=a|۲x-۱|+|۳x-۱|$$

در بازه $\left[\frac{۱}{۳},\frac{۱}{۲}\right]$ مقدار $۲x-۱$ منفی و $۳x-۱$ مثبت است پس:

$$y=a(۱-۲x)+(۳x-۱)=(۳-۲a)x+a-۱$$

اگر این تابع همان تابع ثابت $y=k$ باشد پس:

$$\begin{cases}۳-۲a=۰\\a-۱=k\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=\frac{۳}{۲}\\k=\frac{۱}{۲}\end{cases}\Rightarrow ak=\frac{۳}{۴}$$

**تحلیل:**

**می‌دانیم که توابع ثابت به فرم $y=k, k\in\mathbb{R}$ می‌باشند، بنابراین در سوال کنکور تنها کافی است که ضرایب $x$ در توابع گفته شده برابر صفر باشد. از طرفی در سوال ۹۱ مرحله ۶ آزمون ماز، همانطور که در بالا هم می‌بینید، پس از ساده‌سازی ضابطه تابع و تعیین علامت قدر مطلق در بازه گفته شده به ضابطه تابعی برخورد می‌کنیم که باید ضابطه یک تابع ثابت باشد و طبق نکته گفته شده، ضریب $x$ در ضابطه به دست آمده باید برابر صفر باشد.**

سوال ۱۰۵ کنکور تجربی ۱۴۰۱

۱۰۵- دو تابع $f(x)=b-۳ax$ و $g(x)=c-(۳b-۳)x$ ثابت هستند. اگر $f+g=۵$ باشد، حاصل $bc$ چقدر است؟

۱) $-۶$ ۲) $-۴$ ۳) ۴ ۴) ۶

گروه آموزشی ماز

آزمون همه دروس مرحله ۲۳ ماز

۱۲۶-هرگاه تابع $f(x)=(m-۲)x^۳+mx^۲-mx$ در مجموعه $\mathbb{R}$ نزولی اکید باشد، حدود $m$ کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۲}\le m<۲$ ۲) $m\ge ۲$ ۳) $۰<m<۲$ ۴) $۰\le m\le \frac{۳}{۲}$

پاسخ: گزینه ۴ (ریاضی ۳ ـ متوسط)

شرط آن‌که f در $\mathbb{R}$ نزولی اکید باشد، آن است که همواره $f'\le ۰$، پس:

$$f'(x)=۳(m-۲)x^۲+۲mx-m\le ۰$$

$$\Delta\le ۰\ ,\ a<۰\Rightarrow\begin{cases}۴m^۲+۱۲m(m-۲)\le ۰\\ m-۲<۰\Rightarrow m<۲\end{cases}$$

$$۴m(m+۳m-۶)\le ۰\Rightarrow ۴m(۴m-۶)\le ۰\Rightarrow\begin{cases}۰\le m\le \frac{۳}{۲}\\ m<۲\end{cases}\Rightarrow ۰\le m\le\frac{۳}{۲}$$

**تحلیل:**

**برای رسیدن به جواب در سوال کنکور ، تنها کافی است که ضریب $x^۳$ منفی باشد و در سوال نمونه مربوط به آزمون ماز، همین تیپ سوال با یک زاویه دید دیگری مورد سوال قرار گرفته بود.**

سوال ۱۱۱ کنکور تجربی ۱۴۰۱

۱۱۱-تابع $f(x)=(-۹+k^۲)x^۳+۵$ اکیداً نزولی است. مجموع مقادیر صحیح $k$ ، چقدر است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۶

گروه اموزشی ماز

## دوپینگ تجربی ۲۲ اردیبهشت

۱- اگر $f(x)=\dfrac{x|x-۲|}{x+۲[-x]}$، مقدار $\lim\limits_{x\to ۲^-}\dfrac{f(x)}{x^۲-۴}$ کدام است؟

۱) $-\dfrac{۱}{۲}$ ۲) $-\dfrac{۱}{۴}$ ۳) $\dfrac{۱}{۴}$ ۴) $\dfrac{۱}{۲}$

پاسخ: گزینه ۳ (متوسط)

نکته) اگر f در $\alpha$ پیوستگی چپ داشته باشد:

$\lim\limits_{x\to ۲^-}\dfrac{f(x)-f(۲)}{x-۲}$ یا $\lim\limits_{h\to ۰^-}\dfrac{f(۲+h)-f(۲)}{h}$ را در صورت وجود، مشتق چپ f در $x=۲$ می‌نامیم. به طریق مشابه مشتق راست در $x=۲$ تعریف می‌شود.

ابتدا با فرض $x<۲$، ضابطه تابع f را ساده می‌کنیم:

$$x<۲: f(x)=\frac{-x(x-۲)}{x+۲(-۲)}\Rightarrow f(x)=\frac{-x(x-۲)}{x-۴}$$

تابع f در $x=۲$ پیوسته است، لذا هم پیوستگی چپ دارد هم پیوستگی راست.

$$\lim_{x\to ۲^-}\frac{f(x)}{x^۲-۴}=\lim_{x\to ۲^-}\frac{f(x)}{(x-۲)(x+۲)}=\frac{۱}{۴}f'_-(۲)$$

$$f(x)=(\underbrace{x-۲}_{\text{عامل صفرکننده}}).\frac{-x}{x-۴}\Rightarrow f'_-(۲)=\frac{-۲}{-۲}=+۱$$

$\text{حاصل حد}=+\dfrac{۱}{۴}$

**تحلیل:**

**هر دو سوال کنکور و آزمون ماز با دادن تابع $f(x)$، حاصل یک حد کسری را می‌خواهند که حتما سر جلسه به راحتی بچهای مازی از پسش برآمدن!**

## سوال ۱۲۲ کنکور تجربی ۱۴۰۱

۱۲۲- اگر $f(x)=x\left(\sqrt{\dfrac{۲x+۱}{۵x+۹}}\right)^۲$ باشد، حاصل $\lim\limits_{x\to ۰}\dfrac{f(x)}{x}$ کدام است؟

۱) $\dfrac{۱}{۲۷}$ ۲) $\dfrac{۱}{۹}$ ۳) $\dfrac{۲}{۷}$ ۴) $\dfrac{۳}{۱۴}$

گروه اموزشی ماز