221

A

A | الف

کنکور ۹۹

٪۱۰۰

تطابق آزمون های ماز با کنکور

ریاضی

تهیه شده توسط:

دپارتمان ریاضی ماز

گروه آموزشی ماز

سلام به همگی!

بی‌مقدمه بریم سر اصل مطلب؛ قصد دارم دربارۀ سه تا موضوع باهاتون صحبت کنم:

مطلب اول دربارۀ ریاضی ماز و مطابقت این درس با کنکور ۹۹! همان‌طور که به یاد دارید اردیبهشت ماه امسال (سال ۹۹) برای اولین بار دربارۀ دوپینگ ریاضی صحبت کردیم و گفتیم امسال دورۀ دوپینگ ریاضی و زیست باهم برگزار می‌شوند!

و یک قول دادیم بهتون: « همونطور که ماز در درس زیست‌شناسی مطابقت بالا با کنکور داره، در درس ریاضی هم مطابقت بالایی با کنکور ۹۹ خواهد داشت»

حالا الوعده وفا! <u>مطابقت دوپینگ ریاضی ماز با کنکور ۹۹، ۱۰۰ درصد بوده است!</u>

در ادامه یک تحلیل کامل از درس ریاضی در کنکور تجربی ۹۹ داریم تا دیدگاه درستی از درس ریاضی در کنکور به دست بیارید و علاوه بر این، <u>تمام سوالات کنکور در کنار سوال مشابه دوپینگ ریاضی ماز آورده شده‌اند</u> تا مطابقت ماز با کنکور رو ببنید! برای اینکه مطابقت ماز با کنکور رو حس کنید، پیشنهاد می‌کنم اول سوال دوپینگ رو بررسی کنید و بعدش سوال کنکور رو حل کنید!

اما مطلب دوم؛ یک خبر خوش برای کنکوری‌های ۱۴۰۰:

تیم طراحان دوپینگ ریاضی امسال به دپارتمان ریاضی ماز پیوسته‌اند و امسال تمام آزمون‌های ریاضی ماز توسط این تیم طراحی خواهند شد، و همان‌طور که اردیبهشت ۹۹ برای مطابقت دوپینگ ریاضی با کنکور ۹۹ قول دادیم! امسال از همین الان بهتون قول میدیم که آزمون‌های ریاضی ماز در طول سال مطابقت بیش از ۸۰ درصدی با کنکور ۱۴۰۰ خواهند داشت.

و مطلب سوم؛ تحول در دپارتمان‌های تمامی دورس ماز:

با تحولی که در دپارتمان‌های سایر دورس ایجاد شده است، امسال برای تمام دروس عمومی و اختصاصی قول مطابقت بالای ۸۰ درصد به شما خواهیم داد؛ همچنین امسال استفاده از تاکسونومی بلوم برای سطح دشواری سوالات، پاسخنامه‌های کاملاً تشریحی، درسنامه و کادرهای آموزشی را در همۀ دروسِ آزمون آنلاین ماز مشاهده خواهید کرد!

«آزمون بعدی ماز (۱۶ و ۱۷ مهرماه) در همه دروس شما را شگفت‌زده خواهد کرد»

تاریخ آزمون	فارسی ۳	فارسی ۱	عربی، زبان قرآن ۳	عربی، زبان قرآن ۱	دین و زندگی ۳	دین و زندگی ۱	زبان انگلیسی ۳	زبان انگلیسی ۱
۱۶ و ۱۷ مهر	ستایش / ادبیات تعلیمی (شکر نعمت) درس ۱ صفحهٔ ۱۰ تا صفحهٔ ۱۸	ستایش / ادبیات تعلیمی / ادبیات سفر و زندگی (سفر به بصره، درس آزاد) درس۱ تا پایان درس۴ صفحهٔ ۱۰ تا صفحهٔ ۳۸	الدِّین و التدیُّن درس ۱ صفحهٔ ۱ تا صفحهٔ ۴	ذاک هُو اللهُ المَواعظُ العَدَدِیَّةُ درس ۱ تا پایان درس ۲ صفحهٔ ۱ تا صفحهٔ ۲۲	هستی بخش درس ۱ صفحهٔ ۲ تا صفحهٔ ۱۴	هدف زندگی / پر پرواز درس۱ تا پایان درس۲ صفحهٔ ۱۱ تا صفحهٔ ۳۵	Sence of Appreciation درس ۱ صفحهٔ ۱۵ تا صفحهٔ ۲۳	Saving Nature درس ۱ صفحهٔ ۱۵ تا صفحهٔ ۲۸

تاریخ آزمون	زیست‌شناسی دوازدهم	شیمی دوازدهم	فیزیک دوازدهم	ریاضی دوازدهم + مبحث‌های مرتبط ریاضی دهم و یازدهم	زیست‌شناسی پایه	ریاضی پایه (مبحث‌های مستقل ریاضی دهم و یازدهم)	زوج کتاب فیزیک پایه		زوج کتاب شیمی پایه		زمین‌شناسی
							فیزیک ۱	فیزیک ۲	شیمی ۱	شیمی ۲	
۱۶ و ۱۷ مهر	مولکول های اطلاعاتی صفحه‌های ۱ تا ۱۴	مولکول ها در خدمت تندرستی صفحه‌های ۱ تا ۱۶	حرکت بر خط راست صفحه‌های ۱ تا ۱۰	تابع ریاضی۳: صفحه‌های ۱ تا ۱۰ ریاضی۱: صفحه‌های ۹۴ تا ۱۱۷ ریاضی۲: صفحه‌های ۴۷ تا ۵۶	زیست‌شناسی، دیروز، امروز و فردا + گوارش و جذب مواد زیست‌شناسی ۱: صفحه‌های ۱ تا ۳۸	مجموعه، الگو و دنباله ریاضی ۱: صفحه‌های ۲ تا ۲۷	فیزیک و اندازه‌گیری فیزیک ۱: صفحه‌های ۱ تا ۲۶	الکتریسیته ساکن فیزیک۲: صفحه‌های ۱ تا ۲۷	کیهان زادگاه الفبای هستی شیمی ۱: صفحه‌های ۱ تا ۲۳	قدر هدایای زمینی را بدانیم شیمی۲: صفحه‌های ۱ تا ۲۸	آفرینش کیهان و تکوین زمین صفحه‌های ۸ تا ۲۲

موفق باشید

مدیر محتوای گروه آموزشی ماز

تحلیل سوال به سوال درس ریاضی کنکور تجربی ۹۹
به همراه
بررسی تطبیقی دوره دوپینگ درس ریاضی

دکتر آرش کمالی
مدیر دپارتمان ریاضی ماز

در این مجموعه قصد دارم با ضمن بررسی و تحلیل سوال به سوال درس ریاضی در کنکور ۹۹ و مقایسه این کنکور با کنکور ۹۸ ، به نکات و ظرایفی که در طراحی این تست ها توسط طراح در نظر گرفته شده بود اشاره کنم. امیدوارم مطالعه این مطالب بتواند به دانش کمی بیافزاید.

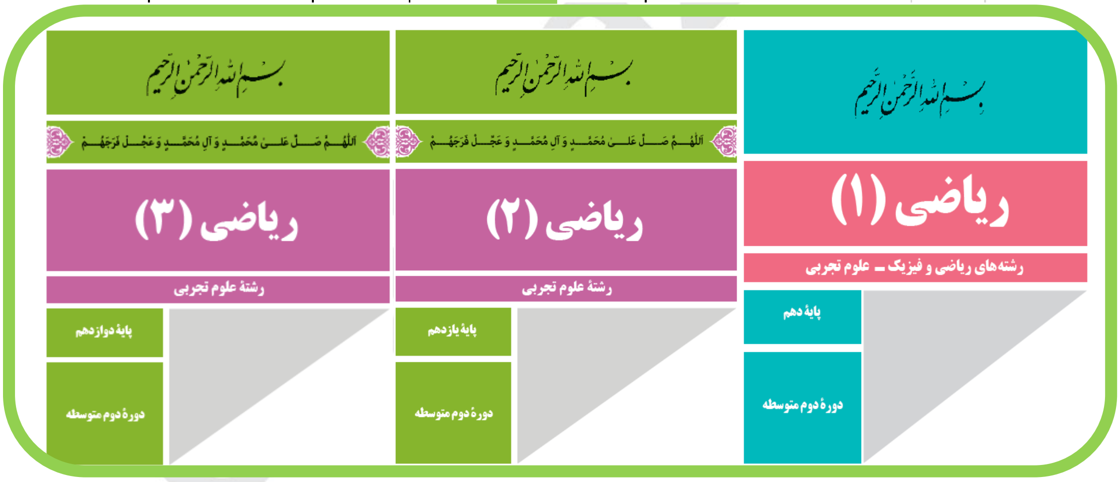
در آزمون سراسری تجربی ۹۹، مانند سالهای قبل ۳۰ سوال مطرحشده بود. وقت پیشنهادی سازمان سنجش برای پاسخگویی به این سوالات ۴۷ دقیقه بود ومنبع طراحی سوالات سه کتاب درسی دهم، یازدهم و دوازدهم بود. البته دو فصل انتهای کتاب دوازدهم از از منابع کنکور حذف شد.

آزمـــون اختصاصـــی گـــروه آزمـــایشـــی عـــلوم تجربـــی

تعداد سؤال: ۱۷۰ — مدت پاسخ‌گویی: ۱۷۵

عنوان مواد امتحانی آزمون اختصاصی گروه آزمایشی علوم تجربی، تعداد، شمارهٔ سؤالات و مدت پاسخ‌گویی

ردیف	مواد امتحانی	تعداد سؤال	از شماره	تا شماره	مدت پاسخ‌گویی
۱	زمین‌شناسی	۲۵	۱۰۱	۱۲۵	۲۰ دقیقه
۲	ریاضی	۳۰	۱۲۶	۱۵۵	۴۷ دقیقه
۳	زیست‌شناسی	۵۰	۱۵۶	۲۰۵	۳۶ دقیقه
۴	فیزیک	[illegible]	۲۰۶	۲۳۵	۳۷ دقیقه
۵	شیمی	۳۵	۲۳۶	۲۷۰	۳۵ دقیقه



در جدول زیر شماره سؤال، مبحث درسی و سطح‌بندی سختی سؤالات مربوط به کنکور ۹۸ و ۹۹ آورده شده است. برای سطح‌بندی سوالات از سه حرف A برای سؤالات ساده، B برای سؤالات متوسط و C برای سؤالات دشوار استفاده‌شده است. در ضمن چند سوال هم با علامت *A متمایز شده اند. این سؤالات با یک روش حل خاص، جزء سؤالات ساده قرار می گیرند اما بدون اطلاع از این روشها، جزء سوالات دشوار قرار می گیرند. در نتیجه برای دانش آموزان قوی این سوالات به قسمت سوالات ساده اضافه میشوند و برای دانش آموزانی که قبل از آزمون تلاش کافی نکرده باشند و با نکات مربوط به این سوالات آشنا نباشند، این سوالات به سوالات دشوار آزمون اضافه می شوند. با این تفسیر برای دانش آموزان قوی کنکور سال ۹۹ سه سوال واقعا دشوار داشت اما برای دانش آموزانی که با نکات مربوط به این سوالات آشنا نبودند این کنکور ۷ سوال واقعا دشوار داشته است.

بودجه بندی آزمون سراسری تجربی ۹۸								
ریاضی (۱) ۵سوال			ریاضی (۲) ۱۱سوال			ریاضی (۳) ۱۴سوال		
شماره	مبحث درسی	سطح	شماره	مبحث درسی	سطح	شماره	مبحث درسی	سطح
۱۲۶	مثلثات	A	۱۳۰	معادله	B	۱۴۱	تابع	A
۱۲۷	معادله	C	۱۳۱	هندسه	B	۱۴۲	مثلثات	B
۱۲۸	نامعادله	B	۱۳۲	هندسه	A*	۱۴۳	حد	A
۱۲۹	آنالیز ترکیبی	A	۱۳۳	هندسه	A	۱۴۴	حد	A
۱۵۳	الگو و دنباله	A	۱۳۴	مثلثات	A	۱۴۵	حد	A*
			۱۳۵	مثلثات	C	۱۴۶	مشتق	A
			۱۳۶	لگاریتم	A	۱۴۷	مشتق	A
			۱۳۷	لگاریتم	A	۱۴۸	مشتق	A
			۱۳۸	پیوستگی	A	۱۴۹	مشتق	A
۱۸	ساده	A	۱۳۹	احتمال	A	۱۵۰	کاربرد مشتق	A*
۶	متوسط	B	۱۴۰	آمار	B	۱۵۱	کاربرد مشتق	C
۳	سخت	C				۱۵۲	تحلیلی	A
۳	نکته دار	A*				۱۵۴	تابع	B
						۱۵۵	احتمال	A

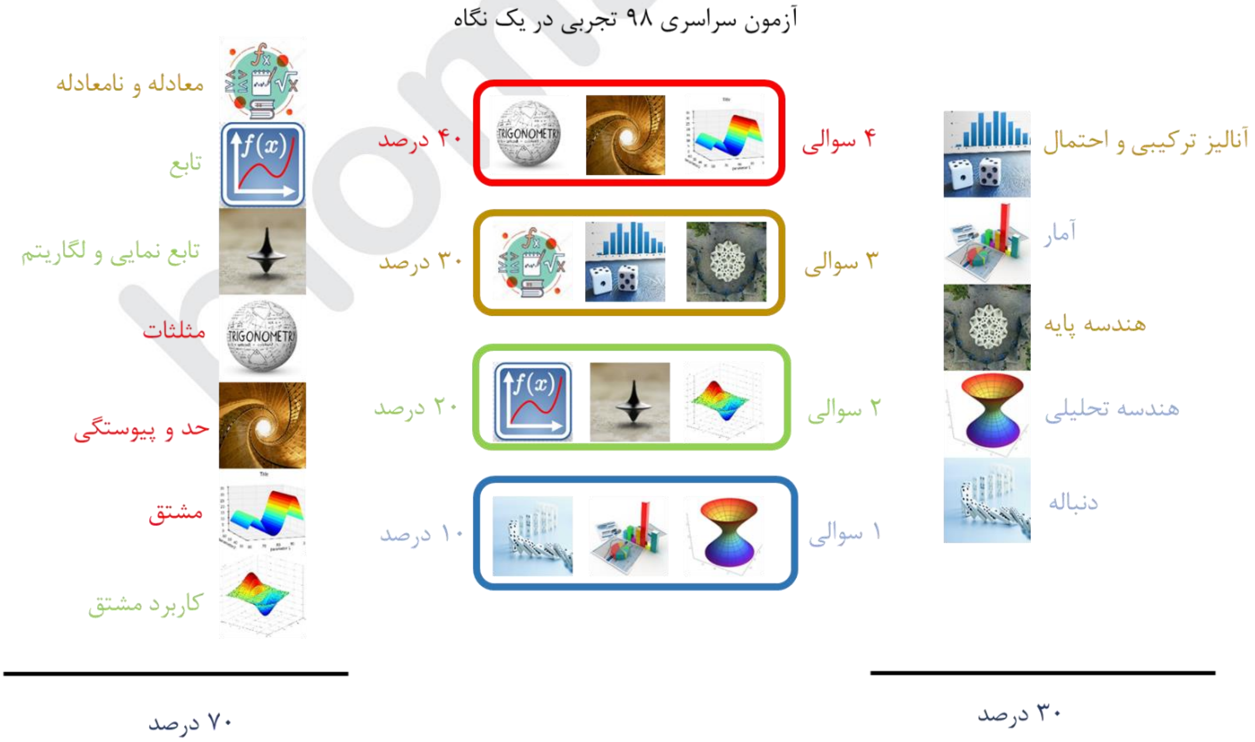
بودجه بندی آزمون سراسری تجربی ۹۹								
ریاضی (۱) ۶سوال			ریاضی (۲) ۱۳سوال			ریاضی (۳) ۱۱سوال		
شماره	مبحث درسی	سطح	شماره	مبحث درسی	سطح	شماره	مبحث درسی	سطح
۱۲۶	عبارتهای جبری	B	۱۵۳	هندسه تحلیلی	A	۱۳۴	تابع	A*
۱۲۷	دنباله	A	۱۲۹	معادله درجه۲	A	۱۳۵	تابع	A
۱۳۰	نامعادله	A	۱۳۲	معادله گنگ	A	۱۳۶	تابع	A*
۱۳۱	سهمی	A	۱۳۳	نامعادله	B	۱۴۲	مثلثات	A
۱۵۰	آنالیزترکیبی	A	۱۵۴	هندسه	A	۱۴۳	مثلثات	C
۱۵۱	احتمال	A	۱۵۵	هندسه	A*	۱۲۸	تقسیم	A
			۱۳۷	لگاریتم	A*	۱۴۵	حد	B
			۱۳۸	تابع نمایی	A	۱۴۶	مشتق	A
۱۶	ساده	A	۱۳۹	تابع نمایی	C	۱۴۷	مشتق	B
۷	متوسط	B	۱۴۰	مثلثات	A	۱۴۸	کاربرد مشتق	C
۳	سخت	C	۱۴۱	مثلثات	B	۱۴۹	کاربرد مشتق	B
۴	نکته دار	A*	۱۴۴	حد	A			
			۱۵۲	آمار	B			

در جدول بالا تفکیک سوالات را برحسب کتب درسی مشاهده کردید. اما نگاه دیگری نیز می توان به مفاهیم درس ریاضی داشت: تقسیم بندی مفهومی. برای مثال مفهوم تابع یا مثلثات در سه کتاب درسی مطرح شده اند. در کنکور ۹۸ و کنکورهای قبل از آن سوالات بر اساس ترتیب فصول کتاب مطرح می شدند و در نتیجه ۴ سوال مثلثات در کنکور ۹۸ با شماره های ۱۲۶ برای سوال مثلثات دهم، ۱۳۴ و۱۳۵ برای سوالات مثلثات یازدهم و ۱۴۲ برای سوال مثلثات دوازدهم مطرح شده بود. اما در کنکور ۹۹ سوالات هر مفهوم در کنار هم قرار گرفته بودند یعنی برای مثال، سوالات ۱۴۰ تا ۱۴۳، ۴ سوالی است که از مفهوم مثلثات در کنکور ۹۹ مطرح شده بود. در نتیجه با اینکه در سالهای ۹۸ و ۹۹، هر سال ۴ سوال از مبحث مثلثات مطرح شده بود و اهمیت یادگیری این مفهوم از نظر تعداد سوالات تفاوتی نداشت اما چیدمان سوالات در این دو کنکور متفاوت و مفهوم محور بود.

در جدول زیر سوالات کنکور ۹۸ به صورت تفکیک مفهومی اورده شده است. این مفاهیم در کنکور ۹۸ نظم جالبی داشتند. ۳ مفهوم ۴ سوالی مثلثات و حد و مشتق، ۳ مفهوم ۳ سوالی معادله و .... .از نگاه مفهومی، می توانیم کل مفاهیم مطرح شده از این سه کتاب را در قالب ۱۲ مفهوم دسته بندی کنیم.

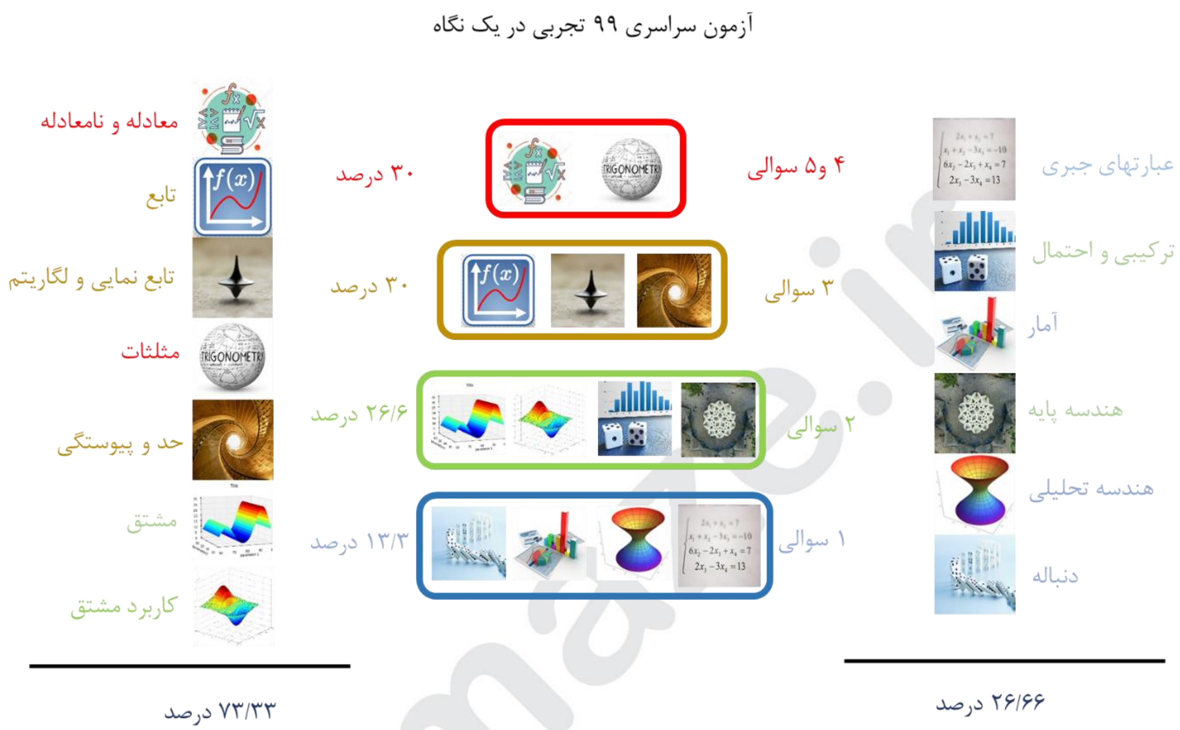
با تفکیک کل مطالب به دو دسته که در سمت چپ و راست قرار گرفته اند، نکته دیگری نیز در نظر گرفته شده است. مطالب سمت چپ یک شاخه پیوسته از مطالب ریاضی است که ۷۰ درصد سوالات کنکور را در برمی گیرد و شاخه سمت راست پیوستگی چندانی ندارند. برای مثال آمار، هندسه پایه و احتمال تقدم و تاخر مفهومی ندارند اما به طور مشخص کاربرد مشتق بعد از مشتق قرار می گیرد.

تعداد سوالات مفاهیم مختلف درس ریاضی در آزمون سراسری ۹۸ رشته تجربی



برای مقایسه بهتر این دو کنکور، مفاهیم کنکور در سال ۹۹ نیز به همین شیوه تفکیک شده اند. ذکر این نکته ضروری است که در کنکور ۹۹ به دلیل شرایط خاص و با توجه به اعلامیه ۲۴ اردیبهشت سازمان سنجش، دو فصل آخر کتاب ریاضی ۳ از منابع کنکور حذف شده بود.

تعداد سوالات مفاهیم مختلف درس ریاضی در آزمون سراسری ۹۹ رشته تجربی



مقایسه بین دو جدول فوق نشان می دهد که ساختار کلی کنکور ۹۹ با کنکور ۹۸ بسیار نزدیک بوده است. با اینکه در کل کنکور ۹۹ کنکور سخت تری نسبت به سال ۹۸ بوده است اما این سخت تر بودن به معنای این نیست که اگر یک دانش آموز در طی یک سال منابع لازم را مطالعه کرده بود و انرژی لازم را برای کسب آمادگی صرف می کرد، نمی توانست نتیجه لازم را کسب کند.

در صفحات بعد به تحلیل سوال به سوال کنکور ۹۹ می پردازم و ضمن اشاره به منابع مرتبط با هر سوال در کتاب درسی یا کنکور سالهای قبل، به سوالات مطرح شده در آزمون های دوپینگ که برای پرسیدن همین مفاهیم طراحی شده بودند نیز اشاره می کنم.

مستند به ارجاعاتی که داده شده است تمامی سوالات کنکور ۹۹ با شباهت قابل قبولی در آزمون های دوپینگ وجود داشت و تطابق ۱۰۰ درصدی بین سوالات دوپینگ و کنکور ۹۹ وجود دارد.

سوال ۱۲۶ آزمون سراسری ۹۹ تجربی

۱۲۶- حاصل عبارت $\frac{\sqrt{8}+\sqrt{27}}{5-\sqrt{6}}-2(\sqrt[4]{9}-1)^{-1}$، کدام است؟

۱) $1+\sqrt{3}$ ۲) $-1+\sqrt{2}$ ۳) $1-\sqrt{2}$ ۴) $\sqrt{2}-2\sqrt{3}$

درجه سوال B (متوسط)

این سوال یک سوال از فصل سوم کتاب دهم است. برای حل این سوال ابتدا باید کسر اول را ضرب کردن مزدوج مخرج در صورت و خرج گویا کرد و سپس با گویا شده عبارت دوم جمع کرد:

$$\frac{\sqrt{8}+\sqrt{27}}{5-\sqrt{6}}=\frac{2\sqrt{2}+3\sqrt{3}}{5-\sqrt{6}}\times\frac{5+\sqrt{6}}{5-\sqrt{6}}=\frac{10\sqrt{2}+4\sqrt{3}+15\sqrt{3}+9\sqrt{2}}{25-6}=\frac{19\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)}{19}=\sqrt{3}+\sqrt{2}$$

$$2(\sqrt[4]{9}-1)^{-1}=\frac{2}{\sqrt{3}-1}=\frac{2(\sqrt{3}+1)}{3-1}=\sqrt{3}+1$$

البته با محاسبه مقادیر تقریبی رادیکالها مشخص بود که جواب یک عدد کوچک مثبت است که تنها گزینه ۲ این خاصیت را دارد.

سوالهای اول تا سوم در هر آزمون جایگاه خاصی دارند. در سال ۹۸ سوال ۱۲۶ سوال قابل پیش بینی تری نسبت به سوال ۱۲۷ بود که یک معادله با حجم عملیاتی بالا بود که از تمرین کتاب درسی ریاضی ۲ اقتباس شده بود. این سوال برای شروع آزمون سوال ساده ای نبود. اگر از همان ابتدا رادیکالهای صورت کسر اول ساده نوشته نمی شدند، با توجه به بزرگ شدن رادیکالها سوال کمی سخت می شد.

با اینکه در کنکور ۹۸ رشته تجربی از این مبحث سوالی طرح نشده بود، اما در آزمون ۶ دوپینگ از سوال ۲۱ تا ۳۰ یعنی ۱۰ سوال را به این موضوع اختصاص داده بودیم که مطالب مربوط به این قسمت در قالب این ۱۰ سوال مرور شود. برای نمونه سوال ۲۴ این آزمون در زیر آورده شده است.

سوال ۲۴ آزمون ۶ دوپینگ

۲۴- اگر $a=(7-4\sqrt{3})^{\frac{1}{4}}$، مقدار $\sqrt{2}(a-a^{-1})$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۲- ۳) $2\sqrt{3}$ ۴) $-2\sqrt{3}$

جواب: گزینه ۲

$$a=((2-\sqrt{3})^{2})^{\frac{1}{4}}=(2-\sqrt{3})^{\frac{1}{2}}$$

عبارت خواسته شده $=\sqrt{2}\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{2-\sqrt{3}}}\right)=\sqrt{4-2\sqrt{3}}-\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2-\sqrt{3}}}\times\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{\sqrt{2+\sqrt{3}}}\right)$

$$=\sqrt{4-2\sqrt{3}}-\frac{\sqrt{4+2\sqrt{3}}}{\underbrace{\sqrt{4-3}}_{1}}=\sqrt{(\sqrt{3}-1)^{2}}-\sqrt{(\sqrt{3}+1)^{2}}=\sqrt{3}-1-\sqrt{3}-1=\underline{-2}$$

سوال ۱۲۷ آزمون سراسری ۹۹ تجربی

۱۲۷- اعداد طبیعی متوالی را به طریقی دسته‌بندی می‌کنیم، که آخرین عدد هر گروه مربع کامل باشد، یعنی ... , {۲, ۳, ۴} , {۱}. در دستهٔ نهم، واسطهٔ حسابی بین دو عدد اول و آخر آن، کدام است؟

۱) ۷۱   ۲) ۷۲   ۳) ۷۳   ۴) ۷۴

درجه سوال A (ساده)

با توصیف ارائه شده در صورت سوال مشخص است که دسته هشتم به عدد ۶۴ و دسته نهم به عدد ۸۱ ختم می شود. در نتیجه دسته نهم به صورت {۶۵,۶۶,۶۷,...,۸۱} در می آید و واسطه حسابی ۶۵ و ۸۱ که میانگین این دو عدد است، ۷۳ بدست می آید.

شباهت این سوال به سوال زیر قابل توجه است:

آزمون سراسری ۸۴ رشته ریاضی (خارج از کشور)

اعداد طبیعی را به طریقی دسته‌بندی می‌کنیم که آخرین جمله‌ی هر دسته، مجذور کامل باشد:
(۱), (۲, ۳, ۴), (۵, ۶, ۷, ۸, ۹), ... مجموع جملات در دسته‌ی دهم کدام است؟

۱) ۱۶۹۱   ۲) ۱۷۱۰   ۳) ۱۷۲۹   ۴) ۱۷۴۸

با توجه به سوالات ترکیبی تصاعد حسابی و هندسی که می تواند هر دو مفهوم را در قالب یک سوال مورد هدف قرار دهد، سوال در مورد واسطه حسابی بین دو عدد را به صورت زیر در آزمون ۱ دوپینگ مورد سوال قرار گرفته بود. در این آزمون نیز از سوال ۲۱ تا ۳۰، در قالب ۱۰ سوال مفاهیم دنباله های هندسی و حسابی و مفهوم واسطه حسابی مورد توجه قرار گرفته بود.

سوال ۲۴ آزمون ۱ دوپینگ

۲۴- بین جملات نهم و دهم دنباله هندسی $\{\frac{۱}{۱۶}, \frac{۱}{۸}, \frac{۱}{۴}, \ldots\}$ ، ۳ واسطه حسابی درج کرده‌ایم . مجموع این سه جمله چند است ؟

۱) ۴۸   ۲) ۷۲   ۳) ۸۴   ۴) ۹۶

جواب: گزینه ۲

$$\left.\begin{array}{l} a_1 = \frac{1}{16} \\ q = 2 \end{array}\right\} a_9 = a_1 q^8 = \frac{1}{2^4} \times 2^8 = 2^4 = 16$$

$$a_{10} = a_1 q^9 = 16 \times 2 = 32$$

$$16, \underline{a}, \underline{b}, \underline{c}, 32 \rightarrow a + c = 2b = 48 \rightarrow a + b + c = 72$$

سوال ۱۲۸ آزمون سراسری ۹۹ تجربی

۱۲۸- فرض کنید چندجمله‌ای $p(x)$ بر $1-x^2$، بخش‌پذیر باشد. اگر $Q(x)=p(x-1)+p(1-x)$، آنگاه حاصل تقسیم $Q(x)$ بر $x-2$ کدام است؟

۱) -1 ۲) صفر   ۳) ۱   ۴) ۲

درجه سوال A (ساده)

$$p(x)=(x^2-1)q(x)\Rightarrow\ p(1)=0\ ,\ \ p(-1)=0$$
$$r=Q(2)=p(1)+p(-1)=0+0=0$$

با اینکه این سوال یک سوال ساده است اما مطرح کردن سوال تقسیم چندجمله ای ها که در کتاب درسی در فصل حد کتاب دوازدهم مطرح می شود کاری کاملا متفاوت و غیر معمول در کنکور سراسری تجربی است. این سوال نمونه ای در کنکور ۹۸ نداشت و معمولا طراحان برای پرسش از این فصل، سوالات رفع ابهام یا حد بی نهایت را مطرح می کرد. در آزمون شماره ۱۸ دوپینگ ابتدا به نکته حل این سوال در قالب درسنامه چکیده ای که از نکات مهم کتاب استخراج شده بود به صورت زیر اشاره شده بود:

قضیه : باقی‌مانده تقسیم چند جمله‌ای $f(x)$ بر $ax+b$ عبارت‌است از $r(x)=f(\frac{-b}{a})$.

و سپس در سه سوال اول این موضوع به سه شکل مختلف مورد سوال قرار گرفته بود که نکات مربوط به آن یادآوری و مرور شود:

سوال ۱ و ۲ آزمون ۱۸ دوپینگ

۱- باقیمانده‌ی تقسیم چندجمله‌ای $P(x)$ بر $x+2$ و $x-3$ به ترتیب ۳ و ۲- است. باقیمانده‌ی تقسیم $P(x)$ بر x^2-x-6 کدام است؟

۱) $x-1$ ۲) $-x+1$ ۳) $-x+2$ ۴) $2x-1$

جواب: گزینه ۲

روش کوتاه حل این سوال این است که ریشه عبارتهایی که می خواهیم تقسیم کنیم را محاسبه کنیم و در گزینه ها قرار دهیم. گزینه ای که برای هر دو مقدار قابل قبول بود، جواب سوال است.

$$\begin{array}{l|l} P(x) & x+2 \\ \hline - & \\ 3 & \end{array} \qquad \begin{array}{l|l} P(x) & x-3 \\ \hline - & \\ -2 & \end{array} \qquad \begin{array}{l|l} P(x) & x^2-x-6 \\ \hline - & \\ ax+b & \end{array}$$

$P(-2)=3$ $P(3)=-2$

$$\begin{cases} P(3)=3a+b=-2 \\ P(-2)=-2a+b=3 \end{cases}$$
$$\Rightarrow a=-1\ ,\ b=1\Rightarrow -x+1$$

۲- اگر عبارت $x^{2n+1}-2x^{2n}+x^5-5x^3+k$ به ازای هر عدد طبیعی n بر دو جمله‌ای $x-2$ بخش‌پذیر باشد. آنگاه باقیمانده‌ی تقسیم آن بر x^2-1 کدام است؟

۱) $-3x+6$ ۲) $-2x+1$ ۳) $2x+4$ ۴) $3x-4$

جواب: گزینه ۱

$$f(2)=0\Rightarrow \cancel{(2)^{2n+1}}-2\cancel{(2)^{2n}}+(2)^5-5(2)^3+k=0\Rightarrow 32-40+k=0\Rightarrow k=8$$
$$f(x)=(x^2-1)Q(x)+ax+b$$
$$\Rightarrow\begin{cases} x=1\ \ \Rightarrow f(1)=a+b\Rightarrow a+b=1-2+1-5+8=3 \qquad \rightarrow a+b=3 \\ x=-1\Rightarrow f(-1)=-a+b\Rightarrow -a+b=-1-2-1+5+8=9\rightarrow -a+b=9 \end{cases}$$
$$\Rightarrow a=-3,b=6\Rightarrow r(x)=-3x+6$$

سوال ۱۲۹ آزمون سراسری ۹۹ تجربی

۱۲۹- معادلهٔ درجهٔ دوم $3x^2+(2m-1)x+2-m=0$ دارای دو ریشهٔ حقیقی است. اگر مجموع ریشه‌ها با معکوس حاصل‌ضرب آن دو ریشه برابر باشد، مقدار m کدام است؟

۱) $\frac{7}{2}$ ۲) 3 ۳) -1 ۴) $-\frac{5}{2}$

درجه سوال A (ساده)

$$-\frac{b}{a}=\frac{a}{c}\Rightarrow -\frac{2m-1}{3}=\frac{3}{2-m}\Rightarrow 2m^2-5m-7=0\Rightarrow \begin{cases} m=-1 \\ m=\frac{7}{2} \end{cases}$$

$$m=-1\Rightarrow 3x^2-3x+3=0\Rightarrow \Delta=9-36=-27<0$$

$$m=\frac{7}{2}\Rightarrow 3x^2+6x-\frac{3}{2}=0\rightarrow \Delta>0$$

این سوال که در فصل اول کتاب ریاضی ۲ مورد بحث قرار می گیرد یک سوال کاملا متداول در کنکورهای سراسری است. اصولا معادله درجه و حل معادلات درجه ۲ همواره یکی از ارکان مهم سوالات کنکور سراسری بوده اند و تسلط به این مطلب بسیار اهمیت دارد. با اینکه در کنکور ۹۸ سوالی از رابطه بین ریشه های معادله درجه۲ به این شکل مطرح نشده بود اما ۱۴ سوال کنکور ۹۸ با استفاده از حل یک معادله درجه به جواب نهایی منجر می شد. در آزمون ۶ دوپینگ سوالات متنوعی از فرم های مختلف معادله درجه و روابط بین ریشه ها پرسیده شوده بود که در زیر یک نمونه از آنها آورده شده است. به روش حل دو سوال و اینکه داشتن ریشه حقیقی باعث حذف جواب با دلتای منفی می شود در هر دو سوال قابل توجه است.

سوال ۶ آزمون ۷ دوپینگ

۶- به ازای کدام مقدار m معادله درجه دوم $3mx^2+4x+2m^2+1=0$ دو ریشه حقیقی و معکوس هم دارد؟

۱) $\frac{1}{2}$ یا ۱- ۲) ۱ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) ۱ یا $\frac{1}{2}$

حل : گزینه ۳ صحیح است.

یک واژه کلیدی در این سوال کلمه حقیقی است که معمولا در ادامه متوجه می شویم که باعث می شود دلتای معادله در یکی از حالات منفی شود و آن جواب قابل قبول نباشد. در همین سوال ابتدا دو مقدار ۱ و $\frac{1}{2}$ بدست می آید که عدد ۱ قابل قبول نخواهد بود.

$$\frac{c}{a}=1\Rightarrow 2m^2+1=3m\Rightarrow 2m^2-3m+1=0\Rightarrow \begin{cases} m=1 \\ m=\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$m=1\Rightarrow 3x^2+4x+3=0\Rightarrow 16-36=-20<0$$

غ ق ق

$$m=\frac{1}{2}\Rightarrow \frac{3}{2}x^2+4x+\frac{3}{2}=0\rightarrow \Delta>0$$

سوال ۱۳۰ آزمون سراسری ۹۹ تجربی

۱۳۰- مجموعهٔ جواب نامعادلهٔ $3 < \frac{x+1}{2x-1} < 1$، کدام است؟

۱) $(0/6 \ , \ 1/5)$ ۲) $(0/8 \ , \ 1/2)$ ۳) $(1 \ , \ 2)$ ۴) $(0/8 \ , \ 2)$

درجه سوال A (ساده)

برای حل این سوال می توان از روش رد گزینه استفاده کرد. با جایگذاری عدد ۱ در کسر گزینه ۳ حذف می شود و با جایگذاری عدد ۲ مشخص می شود که این عدد مرز جواب است و گزینه های ۱ و ۳ نیز حذف می شوند.

علاوه بر این می توان با حل دو معادله به جای دو نامعادله نقاط مرزی را بدست آورد و در نهایت حل نامعادله به روش کلاسیک نیز امکان پذیر است. معمولا در آزمون های سراسری چند سوال با شباهت زیاد به آزمون های چند سال قبل مطرح می شود که این سوال در آزمون ۹۹ شباهت زیادی به سوال ۱۲۸ آزمون سراسری ۹۸ رشته تجربی داشت:

آزمون سراسری ۹۸ رشته تجربی

۱۲۸- مجموعه جواب نامعادلهٔ $3 < \frac{2x-3}{x+1} < 1$، به کدام صورت است؟

۱) $R-[-6,4]$ ۲) $R-[-4,6]$ ۳) $x > 4$ ۴) $x < -6$

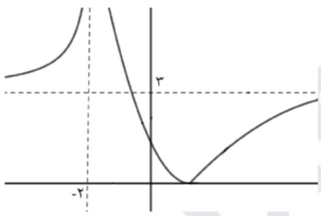
یک نوع این سوال که کمی سخت تر است سوالی است که همین نامعادله دو طرفه را به صورت یک نامعادله قدرمطلقی بیان می کند. در آزمون ۳ دوپینگ در سوال ۲۲ به این نمونه از سوال و حل آن با توجه به نمودار تابع هموگرافیک اشاره شده بود.

سوال ۲۲ آزمون ۳ دوپینگ

۲۲. مجموعه جواب نامعادله $\left|\frac{3x-2}{x+2}\right| < 3$ به کدام صورت است ؟

۱) $(-2,+\infty)$ ۲) $(-\frac{2}{3},+\infty)$ ۳) $(-\infty,-2)\cup(-\frac{2}{3},+\infty)$ ۴) $(-2,-\frac{2}{3})$

پاسخ: گزینه ۲



$$|3x-2| < 3|x+2| \Rightarrow 9x^2 - 12x + 4 < 9x^2 + 36x + 36$$

$$\Rightarrow 4-36 < 36x + 12x \Rightarrow 48x > -32 \Rightarrow x > -\frac{32}{48} = -\frac{2}{3}$$

سوال ۱۳۱ آزمون سراسری ۹۹ تجربی

۱۳۱- فرض کنید نقاط $(-۲,۵)$، $(۵,۰)$ و $(۱۱,۱)$، بر سهمی $y = ax^2 + bx + c$ واقع باشند. این سهمی، از کدام‌یک از نقاط زیر می‌گذرد؟

۱) $(-۱,۳)$ ۲) $(-۱,۴)$ ۳) $(۲,۹)$ ۴) $(۲,۱۵)$

درجه سوال A (ساده)

این سوال که در مورد نمودار سهمی است و از کتاب ریاضی ۱ مطرح شده است، نیز از سوالات متداول در آزمون های سراسری می باشد. برای نمونه سوال سال ۸۹ با اطلاعات مربوط به دو نقطه با عرض یکسان در طرفین محور تقارن، ایده بسیار نزدیکی به حل این سوال را مورد پرسش قرار داده بود:

آزمون سراسری ۸۹ رشته تجربی (خارج از کشور)

نمودار تابع با ضابطه $f(x) = ax^2 + bx + c$، محور xها را در نقطه‌ای به طول یک و محور yها را در نقطه‌ای به عرض ۶- قطع کرده و از نقطه (۶- , ۲-) می‌گذرد، $f(-۱)$ کدام است؟

۱) ۸- ۲) ۷- ۳) ۵- ۴) ۴-

در آزمون ۳ دوپینگ نمونه های متنوعی از سوال در مورد نوشتن معادله سهمی با توجه به نمودار آن مورد سوال قرار گرفته بود. برای نمونه سوال ۱۱ آزمون ۳ دوپینگ به صورت زیر آورده شده است:

سوال ۱۱ آزمون ۳ دوپینگ

۱۱. یک سهمی محور xها را در نقاط $x = ۱$ و $x = ۴$ و محور yها را در $y = -۲$ قطع میکند. دراین صورت عرض نقطه‌ای به طول ۲- روی این سهمی کدام است ؟

۱) ۹ ۲) ۹- ۳) ۱ ۴) ۱-

پاسخ: گزینه ۲

$$y = a(x-۱)(x-۴) \longrightarrow A\Big|_{-۲}^{\cdot} \Rightarrow a = -\frac{۱}{۲} \Rightarrow y = -\frac{۱}{۲}(x-۱)(x-۴)$$

$$x = -۲ \longrightarrow y = -\frac{۱}{۲}(-۲-۱)(-۲-۴) = -۹$$

سوال ۱۳۲ آزمون سراسری ۹۹ تجربی

۱۳۲- نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x)=\sqrt{x}$ را در امتداد محور xها، ۱۲ واحد در جهت مثبت و سپس در امتداد محور yها، ۲ واحد در جهت مثبت، انتقال می‌دهیم. فاصلهٔ نقطهٔ برخورد منحنی حاصل با نمودار تابع f، از مبدأ مختصات، کدام است؟

۱) $4\sqrt{15}$ ۲) $6\sqrt{7}$ ۳) $4\sqrt{17}$ ۴) $6\sqrt{10}$

درجه سوال A (ساده)

یک سوال ترکیبی از انتقال تابع و حل معادله ای که از برخورد شکل جدید تابع با شکل قبلی بدست می آید. معمولا سوالات انتقال توابع در آزمون سراسری با یک معادله برخورد یا یافتن نقطه تقاطع همراه می شود. برای مثال در کنکور ۹۷ تجربی سال به صورت زیر مطرح شده بود:

آزمون سراسری ۹۷ رشته تجربی (خارج از کشور)

قرینه نمودار تابع $f(x)=\sqrt{x}$ را نسبت به محور y ها تعیین کرده، سپس ۲ واحد به طرف x های مثبت انتقال می‌دهیم. نمودار حاصل، نیم‌ساز ناحیه‌ی اول و سوم را با کدام طول قطع می‌کند؟

۱) ۲- ۲) ۰/۵ ۳) ۱ ۴) ۱/۵

از این نمونه سوالات در مورد تابع قدرمطلقی و درجه ۲ نیز قابل طرح است که نمونه های مختلف آن در آزمون ۹ دوپینگ طراحی شده بود. برای نمونه:

سوال ۲۳ آزمون ۹ دوپینگ

۲۳- نمودار تابع $y=x^2+2x$ را ۴ واحد به طرف x های مثبت و سپس ۴ واحد به طرف y های منفی انتقال می دهیم، مولفه y شامل برخورد تابع جدید با تابع اولیه کدام است؟

۱) $\frac{5}{4}$ ۲) $-\frac{3}{4}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $-\frac{1}{2}$

پاسخ گزینه ۱ صحیح است

$$y=x^2+2x \xrightarrow{\text{۴ واحد به راست}} y=(x-4)^2+2(x-4)=x^2-6x+8 \xrightarrow{\text{۴ واحد به طرف } y \text{ های منفی}} y=x^2-6x+4$$

$$x^2+2x=x^2-6x+4 \Rightarrow 8x=4 \Rightarrow x=\frac{1}{2} \Rightarrow A\left|\begin{array}{l}\frac{1}{2}\\ \frac{5}{4}\end{array}\right.$$

۱۸- نمودار تابع $y=\left|\frac{1}{2}x\right|+3$ را، ۶ واحد به طرف x های مثبت و ۲ واحد به طرف y های منفی انتقال می دهیم. نمودار جدید و نمودار اولیه با کدام طول متقاطع اند؟

۱) ۱ ۲) $\frac{3}{2}$ ۳) $-\frac{3}{2}$ ۴) ۲

پاسخ گزینه ۱ صحیح است

$$\left|\frac{1}{2}x\right|+3 \xrightarrow{\text{۶ واحد به راست}} \left|\frac{1}{2}(x-6)\right|+3 \xrightarrow{\text{۳ واحد به پایین}} \left|\frac{1}{2}(x-6)\right|+1$$

$$\frac{1}{2}|x-6|+1=\frac{1}{2}|x|+3 \Rightarrow |x-6|-|x|=4 \Rightarrow x=1$$

سوال ۱۳۳ آزمون سراسری ۹۹ تجربی

۱۳۳- در بازهٔ (a, b)، نمودار تابع با ضابطهٔ $y = |2x^2 - 4|$ در زیر خط $y = 2x$ واقع است. بیشترین مقدار $b - a$، کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

درجه سوال B (متوسط)

در حل اینگونه نامعادلات یک روش توجه به نمودار و شکل توابع در دستگاه مختصات دکارتی است. برای مثال در کنکور ۹۲ خارج از کشور نیز سوالی مشابه با همین سوال و ایده توجه به نمودار تابع مطرح شده بود:

آزمون سراسری ۹۲ رشته ریاضی (خارج از کشور)

مجموعه جواب نامعادله‌ی $|x^2 - 2x| < x$ کدام بازه است؟

۱) $(0, 1)$ ۲) $(0, 3)$ ۳) $(1, 2)$ ۴) $(1, 3)$

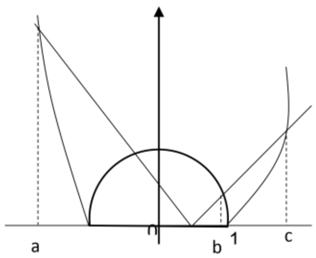
در آزمون ۷ دوپینگ نمونه های متنوعی از حل نامعادله با توجه به نمودار تابع مطرح شده بود که از این سوال کنکور پیچیده تر بود و محاسبات بیشتری لازم داشت.

سوال ۲۶ آزمون ۷ دوپینگ

۲۶- اگر مجموعه جواب نا معادله $|2x - 1| \leq |x^2 - 1|$ به صورت $[a, 0] \cup [b, c]$ باشد، $c - b$ کدام است؟

۱) $3 - \sqrt{3}$ ۲) $3 + \sqrt{3}$ ۳) $3 - \sqrt{2}$ ۴) $3 + \sqrt{2}$

حل : گزینه ۱ صحیح است.



با توجه به نامعادله که از یک قدر مطلقدرجه ۱ و یک قدر مطلق درجه۲ ساخته شده است،

ابتدا شکل دو تابع را رسم می کنیم.

از روی شکل مشخص است که مقادیر c, b مربوط به خط $y = 2x - 1$ هستند

$$x^2 - 1 = 2x - 1 \Rightarrow x = 0 \text{ یا } 2 \Rightarrow c = 2$$

$$-x^2 + 1 = 2x - 1 \Rightarrow x^2 + 2x - 2 = 0 \Rightarrow x = -1 \pm \sqrt{3} \Rightarrow x = \sqrt{3} - 1$$

جواب:

$$[-1 - \sqrt{3}, 0] \cup [\sqrt{3} - 1, 2]$$

سوال ۱۳۴ آزمون سراسری ۹۹ تجربی

۱۳۴- اگر $f(x) = 2x - [2x]$ و $g(x) = -x^2 + 4x$ باشند، بُرد تابع gof، کدام است؟

۱) $[0, 2)$ ۲) $[0, 3)$ ۳) $[0, 4)$ ۴) $[1, 4)$

درجه سوال A^* (نکته دار)

موضوع برد به طور کلی در آزمون سراسری تجربی کمتر مطرح می شود. نکته مهم در حل این سوال و سوال کنکور این است که با یافتن برد تا f که مقادیر دامنه تابع g را مشخص می کنند، قسمتی از تابع درجه که در بازه $[0,1)$ قرار می گیرد، برد تابع gof را بوجود می آورد و در نتیجه جواب گزینه ۲ است. اگر دانش آموزی در جلسه کنکور، این نکته و برد تابع f که بین صفر و یک قرار دارد را می دانست این سوال را به راحتی حل می کرد و این سوال برایش ساده بود اما اگر این نکته را نمی دانست این سوال را می توان یک سوال سخت ارزیابی کرد.

نکته مطرح شده در این سوال، سال ۸۶ در کنکور ریاضی به شکل زیر مورد پرسش قرار گرفته بود:

آزمون سراسری ۸۶ رشته ریاضی (خارج از کشور)

اگر $f(x) = x - [x]$ و $g(x) = \frac{1-x}{x}$، برد تابع gof کدام بازه است؟

۱) $(0,+\infty)$ ۲) $[0,+\infty)$ ۳) $(1,+\infty)$ ۴) $[1,+\infty)$

با توجه به این موضوع و با اینکه برد تابع مرکب و همچنین توجه با تاثیر محدوده تغییرات تابع جزء صحیح در کنکور تجربی مطرح نشده بود اما در آزمون های ۹ و ۱۵ دوپینگ هم موضوع برد تابع شامل جزئ صحیح و هم برد تابع مرکب به شکل زیر مورد بحث قرار گرفته است.

سوال ۱۲ آزمون ۹ و سوال ۱۵ آزمون ۱۵ دوپینگ

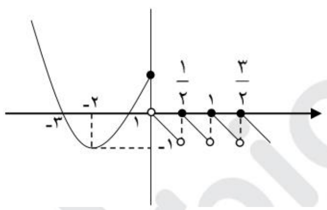
۱۲- برد تابع چند ضابطه ای مقابل کدام است؟

$$f(x)=\begin{cases} x^2+4x+3 & x\le 0 \\ [2x]-2x & x>0 \end{cases}$$

۱) $(-1,+\infty)$ ۲) $[-1,+\infty)$ ۳) $(-2,+\infty)$ ۴) $[-2,+\infty)$

پاسخ گزینه ۲ صحیح است.

در این سوال نمودار دو تابع مورد توجه بوده است. در این تابع محدوده نغییرات ضابطه پایین زیر مجموعه ضابطه بالایی می باشد.



۱۵- اگر $f = \{(3,4),(5,2),(-2,4),(-1,3),(0,6)\}$ ، $g = \{(3,5),(2,4),(-1,2),(4,1),(1,1)\}$ مجموع اعضای برد تابع gof کدام است؟

۱) ۹ ۲) ۱۰ ۳) ۱۱ ۴) ۱۲

پاسخ گزینه ۲ صحیح است

$$3 \xrightarrow{f} 4 \xrightarrow{g} 1 \to (3,1)$$
$$5 \xrightarrow{f} 2 \xrightarrow{g} 4 \to (5,4)$$
$$-2 \xrightarrow{f} 4 \xrightarrow{g} 1 \to (-2,1) \Rightarrow \text{برد تابع} = \{1,4,5\}$$
$$-1 \xrightarrow{f} 3 \xrightarrow{g} 5 \to (5,1)$$
$$0 \xrightarrow{f} 6 \xrightarrow{g} \times$$

سوال ۱۳۵ آزمون سراسری ۹۹ تجربی

۱۳۵- اگر $g(x)$ وارون تابع $f(x) = x + \sqrt{x}$ باشد، مقدار $g(۶) + g(۱۲)$، کدام است؟

۱) ۱۰   ۲) ۱۱   ۳) ۱۳   ۴) ۱۴

درجه سوال A (ساده)

این سوال یک سوال کلاسیک در مورد محاسبه مقادیر تابع معکوس است که با حل یک معادله درجه ۲ رادیکالی بدست می اید.

$$g(۶) = \alpha \Rightarrow f(\alpha) = ۶ \Rightarrow \alpha + \sqrt{\alpha} = ۶ \Rightarrow \alpha = ۴$$

$$g(۱۲) = \beta \Rightarrow f(\beta) = ۱۲ \Rightarrow \beta + \sqrt{\beta} = ۱۲ \Rightarrow \beta = ۹$$

$$g(۶) + g(۱۲) = ۴ + ۹ = ۱۳$$

همین مدل سوال و درقالب تابعی بسیار نزدیک به همین تابع در آزمون ۱۶ مورد سوال قرار گرفته بود:

سوال ۱۲ آزمون ۱۶ دوپینگ

۱۲- اگر $f(x) = x + \sqrt{x+۱}$، آن‌گاه $f^{-۱}(۵)$ کدام است؟

۱) ۸   ۲) ۱۵   ۳) ۷   ۴) ۳

جواب: گزینه ۴

وقتی نقطه ای به طول ۵ روی تابع معکوس قرار دارد بدین معنی است که عرض آن روی تابع اصلی ۵ بوده است. همچنین وقتی عرض نقطه ای از تابع معکوس را می خواهیم در واقع طول آن روی تابع اصلی را می خواهیم. بنابراین می‌توانیم گزینه‌ها را به جای مولفه x در صورت سوال جایگذاری کنیم. اگر مقدار تابع برابر ۵ شد بدین معنی است که آن مقدار جواب است.

$$f^{-۱}(۵) = a \Rightarrow f(a) = ۵ \Rightarrow a + \sqrt{a+۱} = ۵ \Rightarrow \sqrt{a+۱} = ۵ - a$$

$$\left.\begin{array}{l} a^۲ - ۱۰a + ۲۵ = a + ۱ \\ a^۲ - ۱۱a + ۲۴ = ۰ \end{array}\right\} \begin{array}{l} \rightarrow ۳ \quad \text{قابل قبول} \\ \rightarrow ۸ \quad \text{غیر قابل قبول} \end{array}$$

سوال ۱۳۶ آزمون سراسری ۹۹ تجربی

۱۳۶- تابع f با ضابطهٔ $f(x)=x-\frac{2}{x}$ در دامنهٔ $D_f=(-\infty,0)$ را در نظر بگیرید. نمودار تابع f^{-1} نیمساز ناحیهٔ چهارم را با کدام طول، قطع می‌کند؟

۱) $\frac{3}{4}$ ۲) ۱ ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) ۲

درجه سوال A^* (نکته دار)

نکته مهم این سوال این است که اگر به جای بدست آوردن تابع معکوس آنگونه که در صورت سوال ذکر شده است محل برخورد خود تابع را با نیمساز ناحیه دوم بدست آوریم و سپس قرینه این نقطه را نسبت به نیمساز ناحیه اول بدست آوریم این سوال به یک سوال ساده به صورت زیر تبدیل می شود:

$$x-\frac{2}{x}=-x\Rightarrow 2x=\frac{2}{x}\Rightarrow x=\pm1\xrightarrow{x<0}x=-1\rightarrow A(-1,1)\Rightarrow A'(1,-1)$$

و در نتیجه جواب گزینه ۲ خواهد بود.

همین ایده را می شد در سوال تابع معکوس کنکور ۹۸ تجربی نیز استفاده کرد. در اینجا نیز می توان به جای یافتن معکوس تابع f ابتدا محل برخورد تابع f را با معکوس آن بدست آوریم و سپس قرینه جواب را نسبت به نیمساز ناحیه اول و سوم محاسبه کنیم.

آزمون سراسری ۹۸ رشته تجربی

اگر $f(x)=x^2-2x-3\ ;\ x\geq 1$ باشد، نمودارهای دو تابع f^{-1} و $g(x)=\frac{x-9}{2}$ با کدام طول، متقاطع هستند؟

۱) ۱۲ ۲) ۱۵ ۳) ۱۸ ۴) ۲۱

همین نکته در قالب سوال زیر در آزمون ۱۶ دوپینگ مورد سوال قرار گرفته بود. با اینکه در این سوال گفته شده است که خط مورد نظر معکوس تابع را قطع می کند اما در مراحل حل سوال، معکوس تابع را محاسبه نکرده ایم و با تحلیل خاصیت تابع معکوس در جابجایی طول و عرض نقاط، از روی معادله تابع اصلی و برخورد آن با نقطه تصویر جواب مساله بدست آمده است:

سوال ۱۴ آزمون ۱۶ دوپینگ

۱۴- خط $y=x-5$ نمودار معکوس تابع $f(x)=ax+\sqrt{4x+1}$ را در نقطه‌ای به عرض ۲ قطع می‌کند. مقدار a کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) $\frac{2}{3}$ ۴) $\frac{4}{3}$

جواب: گزینه ۲

نکته: اگر f تابعی وارون‌پذیر باشد و $f(a)=b$، آن‌گاه: $f^{-1}(b)=a$.

طول نقطه‌ای از خط $y=x-5$ که عرض آن ۲ است، برابر ۷ می‌باشد، یعنی این خط وارون f را در نقطه‌ی $(7,2)$ قطع می‌کند. چون $(7,2)\in f^{-1}$، از نکته‌ی بالا نتیجه می‌گیریم: $(2,7)\in f$

$$f(2)=7\Rightarrow 2a+\sqrt{8+1}=7\Rightarrow 2a=4\Rightarrow a=2$$

سوال ۱۳۷ آزمون سراسری ۹۹ تجربی

۱۳۷- اگر $\log_{۴} ۳ = ۰/۸$ باشد، مقدار $\log_{۱۲} ۶$، کدام است؟

۱) $\frac{۱۳}{۱۸}$ ۲) $\frac{۸}{۱۱}$ ۳) $\frac{۳}{۴}$ ۴) $\frac{۷}{۹}$

درجه سوال A^* (نکته دار)

این سوال اگر با تبدیل لگاریتم دوم به یک تقسیم لگاریتم حل شود ساده است اما در غیر این صورت سوال دشواری خواهد بود. روش حل سوال به صورت زیر است:

$$\log_{۱۲} ۶ = \frac{\log_{۴} ۶}{\log_{۴} ۱۲} = \frac{\log_{۴} ۳ + \log_{۴} ۲}{\log_{۴} ۳ + \log_{۴} ۴} = \frac{۰/۸ + ۰/۵}{۰/۸ + ۱} = \frac{۱۳}{۱۸}$$

همین ایده به صورت زیر در آزمون ۱۱ مورد سوال قرار گرفته بود:

سوال ۱۶ آزمون ۱۱ دوپینگ ریاضی

۱۶- اگر $\log_{۲} ۵ = k$ باشد، حاصل $\log ۵۰$ کدام است؟

۱) $\frac{k}{۲k+۱}$ ۲) $\frac{k+۲}{k+۱}$ ۳) $\frac{k+۱}{۲k}$ ۴) $\frac{۲k+۱}{k+۱}$

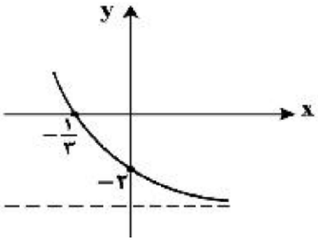
جواب : گزینه ۴ صحیح می باشد

$$\log ۵۰ = \log \frac{۱۰۰}{۲} = \log ۱۰۰ - \log ۲ = ۲ - \log ۲$$

$$\log ۲ = \frac{۱}{\log_{۲} ۱۰} = \frac{۱}{\log_{۲} ۲ \times ۵} = \frac{۱}{\log_{۲} ۲ + \log_{۲} ۵} \xrightarrow{\log_{۲} ۵ = k} \frac{۱}{۱+k} \quad \Rightarrow ۲ - \frac{۱}{۱+k} = \frac{۲k+۱}{k+۱}$$

سوال ۱۳۸ کنکور ریاضی ۹۹

۱۳۸- شکل زیر، نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x)=-4+2^{ax+b}$ است. $f(-\frac{5}{3})$، کدام است؟



۱) ۵۴
۲) ۶۰
۳) ۴۸
۴) ۲۸

درجه سوال A (ساده)

این سوال با یک جایگذاری ساده که نقاط داده شده در نمودار را در تابع قرار دهیم قابل حل است.

$$f(0)=-2 \Rightarrow -4+2^{b}=-2 \Rightarrow b=1$$

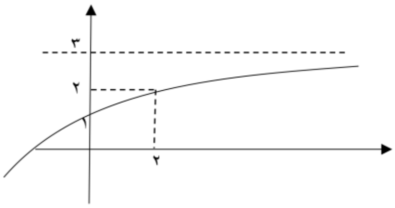
$$f(-\frac{1}{3})=-4+2^{a(-\frac{1}{3})+1}=0 \Rightarrow -\frac{a}{3}+1=2 \Rightarrow a=-3$$

$$f(x)=-4+2^{-3x+1} \Rightarrow f(-\frac{5}{3})=-4+2^{5+1}=-4+64=60$$

مشابه همین سوال و با ۳ پارامتر در آزمون ۱۱ دوپینگ به شکل زیر مطرح شده بود:

سوال ۸ آزمون ۱۱ دوپینگ

۸- اگر نمودار تابع نمایی $y=a-b^{x-c}$ مطابق شکل زیر باشد، حاصل $2b^2+a-c$ کدام است؟



۱) صفر
۲) ۳
۳) ۲
۴) ۱

جواب : گزینه ۳ صحیح می باشد

$a=3 \rightarrow$ مقدار تابع نمایی در بی نهایت به عدد ۳ نزدیک می شود : $y=3$

$$f(2)=2 \rightarrow 3-b^{2-c}=2 \rightarrow b^{2-c}=1 \rightarrow c=2$$

$$f(0)=1 \rightarrow 3-b^{-c}=1 \rightarrow b^{-c}=2 \rightarrow b=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow 2b^2+a-c=2\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+3-2=2$$

سوال ۱۳۹ آزمون سراسری ۹۹ تجربی

۱۳۹- فرض کنید در دامنهٔ $[0,+\infty)$، تابع با ضابطهٔ $f(x)=\dfrac{2^x+(\frac{1}{2})^x}{2}$، مفروض باشد. $f^{-1}(2)$، کدام است؟

۱) $\log_2(2-\sqrt{3})$ ۲) $\log_2(\sqrt{3}-1)$ ۳) $\log_2(1+\sqrt{3})$ ۴) $\log_2(2+\sqrt{3})$

درجه سوال C (سخت)

در ظاهر این یک سوال تابع معکوس است اما در واقع یک سوال معادله نمایی است. اگر مقدار خواسته شده در این سوال را α در نظر بگیریم، آنگاه باید تابع $f(x)$ را برابر ۲ قرار دهیم تا بتوانیم مقدار α که ریشه معادله است را بدست آوریم. با این بیان صورت این سوال به حل معادله زیر تبدیل می شود:

$$\frac{2^x+(\frac{1}{2})^x}{2}=2 \Rightarrow 2^x+\frac{1}{2^x}=4 \xrightarrow{2^x=t} t+\frac{1}{t}=4 \Rightarrow t^2-4t+1=0$$

$$(t-2)^2=3 \Rightarrow t=2\pm\sqrt{3} \xrightarrow{t=2^x} 2^x=2\pm\sqrt{3} \Rightarrow$$

$$x=\log_2(2\pm\sqrt{3}) \xrightarrow{D_f=[0,+\infty)} x=\log_2(2+\sqrt{3})$$

معادله نمایی با این مدل تغییر متغیر تاکنون در کنکور تجربی طرح نشده بود اما در سال ۹۶ در کنکور ریاضی خارج از کشور ایده ای مشابه با این مدل سوال مطرح شده بود:

آزمون سراسری ۹۶ رشته ریاضی (خارج از کشور)

نمودارهای دو تابع $f(x)=4^x$ و $g(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{2x}+\frac{3}{2}$ در نقطهٔ A متقاطع‌اند. فاصلهٔ نقطهٔ A تا نقطهٔ $\left(-\frac{1}{2}, 1\right)$، کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\sqrt{2}$ ۳) ۲ ۴) $\sqrt{5}$

در نتیجه به دلیل خاص بودن این نوع سوال در حل معادلات نمایی در آزمون ۱۱ دوپینگ سوال زیر مطرح شده بود:

سوال ۹ آزمون ۱۱ دوپینگ

۹- اگر نمودار دو تابع $f(x)=\left(\frac{1}{5}\right)^{2x}+3$ ، $g(x)=(25)^x-\frac{9}{5}$ در نقطه ی A متقاطع باشند، فاصله نقطه ی A از نقطه ی $B\left(\frac{1}{2},3\right)$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{5}$ ۲) $\sqrt{5}$ ۳) $\frac{\sqrt{5}}{5}$ ۴) $\frac{21}{50}$

جواب : گزینه ۱ صحیح می باشد

برای حل این سوال دو تابع را برابر هم قرار می دهیم و معادله بدست آمده را با استفاده از تغییر متغیر حل می کنیم.

$$f(x)=g(x)\to(25)^x-\frac{9}{5}=\left(\frac{1}{5}\right)^{2x}+3 \xrightarrow{(25)^x=t} t-\frac{9}{5}=\frac{1}{t}+3\to t-\frac{24}{5}-\frac{1}{t}=0$$

$$\xrightarrow{\times(25)} 5t^2-24t-5=0$$

$$\Delta=(-24)^2-4(5)(-5)=676\to\begin{cases} t_1=\dfrac{24+26}{2(5)}=5\to(25)^x=5\to x=\dfrac{1}{2} \\ t_2=\dfrac{24-26}{2(5)}=-\dfrac{1}{5} \quad \text{غ ق ق} \end{cases}$$

$$A\left(\frac{1}{2},\frac{16}{5}\right) \quad , \quad B\left(\frac{1}{2},3\right) \quad \to \quad AB=\sqrt{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)^2+\left(3-\frac{16}{5}\right)^2}=\frac{1}{5}$$

سوال ۱۴۰ آزمون سراسری ۹۹ تجربی

۱۴۰- حاصل عبارت $\tan(300)\cos(210)+\tan(480)\sin(840)$، کدام است؟ (اعداد داده شده برحسب درجه هستند.)

۱) $-\frac{1}{2}$ ۲) صفر   ۳) ۱   ۴) ۲

درجه سوال A (ساده)

با اینکه این سوال یکی از متداول ترین مثالها در هنگام تدریس تبدیل نسبت های مثلثاتی است، به دلیل مطرح شدن سوالی بسیار مشابه با آن در کنکور ۹۸ تجربی، انتظار می رفت که دانش آموزان این سوال را به عنوان یک سوال ساده در جلسه کنکور حل کنند.

آزمون سراسری ۹۸ رشته تجربی

حاصل عبارت $\text{Sin}\left(\frac{-11\pi}{6}\right)\text{tg}\left(\frac{19\pi}{4}\right)+\text{Cos}\left(\frac{-17\pi}{6}\right)\text{Sin}\left(\frac{17\pi}{3}\right)$، کدام است؟

۱) $-\frac{1}{4}$ ۲) $-\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{1}{4}$ ۴) $\frac{1}{2}$

مشابه با همین ایده سوالهای متنوعی در آزمون ۱ و ۱۵ مطرح شده بود که دو نمونه از آنها آورده شده است:

سوال ۱ و ۱۵ آزمون ۱۰ دوپینگ

۱- حاصل $A=\text{Sin}330^\circ\,\text{Sin}300^\circ+\text{Cos}210^\circ\,\text{Cos}420^\circ$ کدام است؟

۱) ۱   ۲) ۱-   ۳) ۲   ۴) ۰

جواب: گزینه ۴

$$A=\text{Sin}330^\circ\,\text{Sin}300^\circ+\text{Cos}210^\circ\,\text{Cos}420^\circ \Rightarrow$$

$$A=\text{Sin}(360-30)\text{Sin}(360-60)+\text{Cos}(180+30)\text{Cos}(360+60)\Rightarrow$$

$$A=(-\text{Sin}30)(-\text{Sin}60)+(-\text{Cos}30)(\text{Cos}60)=(-\tfrac{1}{2})(-\tfrac{\sqrt{3}}{2})+(-\tfrac{\sqrt{3}}{2})(\tfrac{1}{2})=0$$

۱۵- حاصل عبارت $\tan 780^\circ\,\text{Cos}210^\circ-\cot 315^\circ\,\text{Sin}510^\circ$، کدام است؟

۱) ۱-   ۲) ۰   ۳) ۱   ۴) ۲

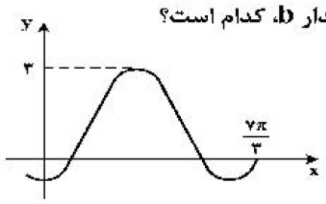
جواب: گزینه ۱

$$\tan 780^\circ\,\text{Cos}210^\circ-\cot 315^\circ\,\text{Sin}510^\circ=\tan(2\times360+60)\text{Cos}(180+30)-\cot(270+45)\text{Sin}(360+150)$$

$$=\tan 60(-\text{Cos}30)+\tan(45)\text{Sin}(150)=-\frac{3}{2}+\frac{1}{2}=-1$$

سوال ۱۴۱ آزمون سراسری ۹۹ تجربی

۱۴۱- شکل زیر، قسمتی از نمودار تابع با ضابطهٔ $y=a+b\sin(\frac{\pi}{۲}+x)$ است. مقدار b، کدام است؟



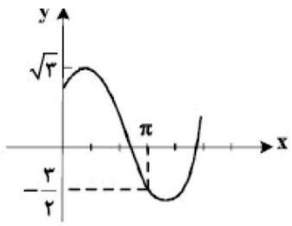
۱) ۲
۲) ۱
۳) -۱
۴) -۲

درجه سوال B (متوسط)

سوال انتقال تابع مثلثاتی sin در کتاب ریاضی ۲ مطرح شده است و در کنکور ۹۸ نیز به صورت زیر مورد سوال قرار گرفته بود.

آزمون سراسری ۹۸ رشته تجربی

شکل روبه‌رو، قسمتی از نمودار تابع $y=a+b\sin\left(x+\frac{\pi}{۳}\right)$ است. b کدام است؟



۱) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$
۲) $\frac{۳}{۲}$
۳) $\sqrt{۳}$
۴) ۲

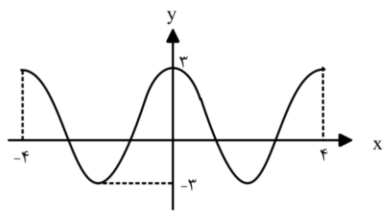
اما نکته مهم در سوال ۱۴۱ کنکور ۹۹ این بود که به دلیل اینکه تابع به مقدار $\frac{\pi}{۲}$ به سمت چپ منتقل شده بود می توانستیم با استفاده از تبدیل نسبت های مثلثاتی آن را تبدیل کنیم و سوال را به صورت زیر حل کنیم:

$$y=a+b\cos(x)\xrightarrow{(\frac{۷\pi}{۳},۰)}۰=a+\frac{b}{۲}\Rightarrow a=-\frac{b}{۲}\to y=-\frac{b}{۲}+b\cos(x)\xrightarrow{(\pi,۳)}۳=-\frac{۳b}{۲}\Rightarrow b=-۲$$

در آزمون ۱۷ دوپینگ ایده مشابه با همین سوال و تبدیل نمودار به صورت زیر مطرح شده بود:

سوال ۶ آزمون ۱۷ دوپینگ

۶- اگر نمودار زیر قسمتی از تابع $f(x)=a\sin(\pi(\frac{۱}{۲}-bx))$ باشد، حاصل ab کدام است؟ $(b<۰)$



۱) $-\frac{۳}{۲}$
۲) $\frac{۳}{۲}$
۳) $-\frac{۳}{۴}$
۴) $\frac{۳}{۴}$

جواب: گزینه ۱

اولا که $\sin(\pi(\frac{۱}{۲}-bx))$ همان $\sin(\frac{\pi}{۲}-\pi bx)$ یعنی $\cos(\pi bx)$ است، پس تابع به صورت $f(x)=a\cos(\pi bx)$ است.

حالا داریم:

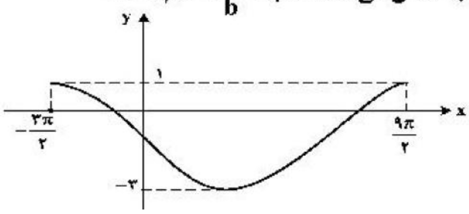
$$f(۰)=۳\Rightarrow a=۳$$

دوره‌ی تناوب تابع: $T=\frac{۲\pi}{|\pi b|}=\frac{۲}{|b|}=۴\Rightarrow b=\pm\frac{۱}{۲}\xrightarrow{b<۰}b=-\frac{۱}{۲}$

پس $ab=-\frac{۳}{۲}$ است.

سوال ۱۴۲ آزمون سراسری ۹۹ تجربی

۱۴۲- شکل زیر، نمودار تابع $y = a\sin(bx)+c$ را در یک بازهٔ تناوب، نشان می‌دهد. نسبت $\frac{a}{b}$، کدام است؟



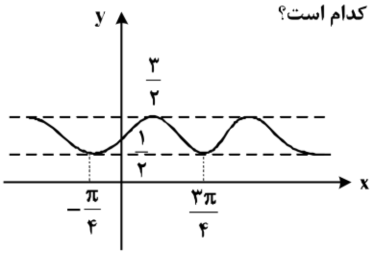
۱) -2
۲) -3
۳) -4
۴) -6

درجه سوال A (ساده)

درجه این سوال به نسبت مطالبی که در رسم نمودار توابع مرکب مثلثاتی انتظار می رود ساده است. سوالی بسیار مشابه با همین ایده در کنکور ۹۸ رشته ریاضی مطرح شده بود:

آزمون سراسری ۹۸ رشته ریاضی

۱۱۲- شکل روبه‌رو، نمودار تابع $y = 1 + a\sin bx\cos bx$ است. $a+b$ کدام است؟

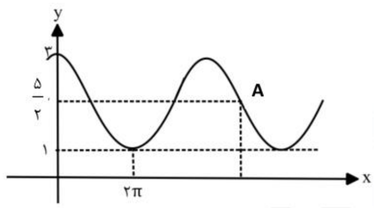


۱) ۱
۲) $\frac{3}{2}$
۳) ۲
۴) ۳

در آزمون ۱۷ دوپینگ سوالات متنوعی از این مدل مطرح شده بود که فقط یک نمونه از آن در زیر آورده شده است. در حل این سوال ابتدا دوره تناوب و مقادیر a و b و c بدست آمده است که سوال کنکور ۹۹ در همین جا به پایان می رسد اما در این سوال در مرحله بعد با طرح سوال در مورد طول نقطه A عملا یک مرحله نهایی برای حل یک معادله و بدست آوردن طول نقطه اضافه تر از سوال کنکور ۹۹ خواسته شده بود:

سوال ۵ آزمون ۱۷ دوپینگ

۵- نمودار تابع $y = a\cos bx + c$ به صورت زیر است. طول نقطه‌ی A کدام است؟



۱) $\frac{25\pi}{6}$
۲) $\frac{13\pi}{3}$
۳) $\frac{14\pi}{3}$
۴) $\frac{29\pi}{6}$

جواب: گزینه ۳

با توجه به برد تابع که ۲ واحد است و نزولی بودن آن در همسایگی راست عدد صفر، ضریب تابع کسینوس برابر ۱ است. و چون بیشترین مقدار آن برابر ۳ می باشد یعنی عدد ثابت سوال ۲ بوده است. همچنین نصف دوره تناوب تابع برابر 2π است بنابراین داریم:

$$c = \frac{3+1}{2} = 2\ ,\ T = 4\pi = \frac{2\pi}{|b|} \Rightarrow |b| = \frac{1}{2}\ ,\ f(0) = 3 \Rightarrow a + c = 3 \Rightarrow a = 1$$

بنابراین $y = \cos\frac{1}{2}x + 2$ می‌باشد.

$$y = \frac{5}{2} \Rightarrow \cos\frac{1}{2}x + 2 = \frac{5}{2} \Rightarrow \cos\frac{1}{2}x = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2}x = \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}, \frac{7\pi}{3} \Rightarrow x = \frac{2\pi}{3}, \frac{10\pi}{3}, \frac{14\pi}{3}$$

پس طول نقطه‌ی A برابر $\frac{14\pi}{3}$ است.

سوال ۱۴۳ آزمون سراسری ۹۹ تجربی

۱۴۳- جواب‌های معادلهٔ مثلثاتی $\sin(2x-\frac{\pi}{4})=\cos(x+\frac{\pi}{4})$، با شرط $x\neq k\pi$، که در آن k یک عدد صحیح است، کدام است؟

۱) $\frac{k\pi}{3}$ ۲) $\frac{2k\pi}{3}$ ۳) $\frac{2k\pi}{3}-\frac{\pi}{6}$ ۴) $\frac{2k\pi}{3}+\frac{\pi}{6}$

درجه سوال C (سخت)

در این معادله مثلثاتی ابتدا بایستی با استفاده از تبدیل ها یک سمت معادله را به نسبت مثلثاتی طرف مقابل تبدیل کنیم و سپس معادله مورد نظر را حل می کردیم.

$$\mathrm{Sin}(2x-\frac{\pi}{4})=\mathrm{Sin}(\frac{\pi}{4}-x)\Rightarrow\begin{cases}2x-\frac{\pi}{4}=2k\pi+(\frac{\pi}{4}-x) & \Rightarrow 3x=2k\pi+\frac{\pi}{2}\Rightarrow x=\frac{2k\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\\ 2x-\frac{\pi}{4}=2k\pi+\pi-(\frac{\pi}{4}-x) & \Rightarrow x=2k\pi+\pi\end{cases}$$

این ایده در فرم ساده تر آن در کنکور ۹۸ خارج از کشور مطرح شده بود:

آزمون سراسری ۹۸ رشته تجربی (خارج از کشور)

۱۴۲- جواب کلّی معادلهٔ مثلثاتی $\cos 3x+\cos x=0$، با شرط $\cos x\neq 0$، کدام است؟

۱) $\frac{k\pi}{2}-\frac{\pi}{3}$ ۲) $k\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}$ ۳) $k\pi-\frac{\pi}{4}$ ۴) $k\pi+\frac{\pi}{4}$

اما نکته متمایز کننده سوال کنکور ۹۹ این بود که به دلیل وجود زاویه $\frac{\pi}{4}$ در صورت سوال، سوال گمراه کننده بود و برای دانش آموزانی که اتحادهای مثلثاتی جمع و تفریق زوایا را به صورت اضافه تر از کتاب تجربی از رشته ریاضی خوانده بودند با انجام تبدیل ها سوال بسیار پیچیده تر می شد و یافتن جواب بسیار مشکل بود. اما در آزمو ۱۷ دوپینگ یک ترکیب معادله مثلثاتی به همین سبک مطرح شده بود که بایستی با همین زاویه ای که در صورت سوال قرار می گرفت تبدیل را انجام می دادیم.

سوال ۲۵ آزمون ۱۷ دوپینگ

۲۵- جواب کلی معادله‌ی مثلثاتی $(\mathrm{Sin}\,x+\mathrm{Cos}\,x)^2=1-\mathrm{Sin}(x-\frac{\pi}{4})$، کدام است؟

۱) $k\pi+\frac{3\pi}{4}$ ۲) $\frac{2k\pi}{3}-\frac{\pi}{12}$ ۳) $\frac{2k\pi}{3}+\frac{\pi}{12}$ ۴) $2k\pi\pm\frac{3\pi}{4}$

جواب: گزینه ۳

$$(\mathrm{Sin}\,x+\mathrm{Cos}\,x)^2=1+\mathrm{Sin}(\frac{\pi}{4}-x)\Rightarrow 1+2\mathrm{Sin}\,x\,\mathrm{Cos}\,x=1+\mathrm{Sin}(\frac{\pi}{4}-x)\Rightarrow \mathrm{Sin}\,2x=\mathrm{Sin}(\frac{\pi}{4}-x)$$

$$\rightarrow \mathrm{Sin}\,2x=\mathrm{Sin}(\frac{\pi}{4}-x)\Rightarrow\begin{cases}2x=2k\pi+\frac{\pi}{4}-x & \Rightarrow x=\frac{2k\pi}{3}+\frac{\pi}{12}\quad (1)\\ 2x=2k\pi+\pi+x-\frac{\pi}{4} & \Rightarrow x=2k\pi+\frac{3\pi}{4}\quad (2)\end{cases}$$

$$(1)\cup(2): x=\frac{2k\pi}{3}+\frac{\pi}{12}$$

سوال ۱۴۴ آزمون سراسری ۹۹ تجربی

۱۴۴- حاصل $\lim\limits_{x\to -2^-} \dfrac{[x]+3}{x+2}$ ، کدام است؟

۱) $-\infty$ ۲) -1 ۳) صفر ۴) ۱

درجه سوال A (ساده)

این سوال شاید یکی از ساده ترین سوالات کنکور ۹۹ تجربی است و نکته آن این است که نسبت صفر مطلق که در صورت بوجود می آید به صفر حدی که در مخرج بوجود می آید، برابر صفر است و گزینه ۳ صحیح است.

اما توجه به مقادیر جزء صحیح و اینکه اگر در یک حد نماد جزء صحیح وجود داشته باشد ابتدا باید در یک مرحله مقدار جزء صحیح مشخص شود و در مرحله بعد حد محاسبه گردد هم در کنکور ۹۸ خارج از کشور ریاضی به صورت زیر مطرح شده بود:

آزمون سراسری ۹۸ رشته ریاضی (خارج از کشور)

۱۱۰- حاصل $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{\sin^2 \pi x}{[x]+\cos \pi x}$ ، کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) π ۴) 2π

هم در آزمون ۱۲ دوپینگ در قالب مثالهای متنوی در محاسبه حد توابع جزء صحیح مورد سوال قرار گرفته بود:

سوال ۴ آزمون ۱۲ دوپینگ

۴- اگر تابع $f(x)=a[\frac{1}{x}]-[-3x]$ در $x=\frac{-1}{3}$ حد داشته باشد، مقدار a کدام است؟ ([] نماد جزء صحیح است.)

۱) ۲ ۲) -۲ ۳) ۱ ۴) -۱

جواب: گزینه ۳

مقدار عدد $\frac{-1}{3}$ را در معادله گذاشته و همسایگی‌های چپ و راست عدد صحیح را بدست آورده و برابر هم قرار می‌دهیم.

$$-\frac{1}{3}\begin{cases} \nearrow -\frac{1}{3}^+ : & a(-4)-(0)=-4a \\ \searrow -\frac{1}{3}^- : & a(-3)-(1)=-3a-1 \end{cases} \Rightarrow \underline{a=1}$$

سوال ۱۴۵ آزمون سراسری ۹۹ تجربی

۱۴۵- تابع با ضابطهٔ $f(x)=\dfrac{ax-\sqrt[3]{x^2-1}}{4x^n-12}$ را در نظر بگیرید. اگر $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\dfrac{1}{6}$ باشد، آنگاه $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$، کدام است؟

۱) $\dfrac{1}{24}$ ۲) $\dfrac{1}{18}$ ۳) $\dfrac{1}{12}$ ۴) $\dfrac{5}{36}$

درجه سوال B (متوسط)

یکی از ایده های طراحی سوال در مورد ترکیب حد بی نهایت و حد مبهم به فرم صفر صفرم که در کنکورهای تجربی مطرح شده بود در این سوال نیز استفاده شده است. برای مثال به این سوال کنکور ۹۴ تجربی دقت کنید:

آزمون سراسری ۹۴ رشته تجربی

در تابع با ضابطهٔ $f(x)=\dfrac{ax^n+15}{3x-\sqrt{4x^2+15x}}$، اگر $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-1$ باشد، آن‌گاه $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$ کدام است؟

۱) ۶- ۲) ۴- ۳) ۳ ۴) ۵

در اینگونه سوالات در مرحله اول با توجه به تعاریف حد دربینهایت مقادیر a و n بدست می آید و در مرحله بعد، یک حد مبهم صفر صفرم باید محاسبه شود. به دلیل اینکه در این سوالات عملا دو موضوع حد در قالب یک سوال پرسیده می شود، مثالهای متنوعی از آن در آزمون ۱۸ دوپینگ طراحی شده بود که دو نمونه از آن را در زیر مشاهده می کنید:

سوال ۲۳ و ۲۵ آزمون ۱۸ دوپینگ

۲۳- در تابع با ضابطهٔ $f(x)=\dfrac{-2x+\sqrt{x^2+3x}}{ax^n-6}$، اگر $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\dfrac{1}{2}$ باشد، آنگاه $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$، کدام است؟

۱) $-\dfrac{1}{6}$ ۲) $-\dfrac{1}{8}$ ۳) $\dfrac{1}{4}$ ۴) $\dfrac{1}{3}$

جواب: گزینه ۲

از آنجایی که جواب حد در بی نهایت یک عدد مشخص شده است، باید در جه صورت و مخرج یکسان باشند. در نتیجه داریم:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{-2x+|x|}{ax^n}\xrightarrow{n=1}\lim_{x\to-\infty}\frac{-3\cancel{x}}{a\cancel{x}}=-\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{-3}{a}=-\frac{1}{2}\Rightarrow a=6$$

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{-2x+\sqrt{x^2+3x}}{6x-6}\xrightarrow{Hop}\lim_{x\to 1}\frac{-2+\dfrac{2x+3}{2\sqrt{x^2+3x}}}{6}=\frac{-2+\dfrac{5}{4}}{6}=\frac{\dfrac{-3}{4}}{6}=-\frac{1}{8}$$

۲۵- اگر حد کسر $\dfrac{ax-\sqrt{3x-2}}{\sqrt{x^2-4x+4}}$، وقتی $x\to+\infty$ برابر یک باشد، آنگاه حد این کسر وقتی $x\to 2^-$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\dfrac{1}{4}$ ۳) $-\dfrac{1}{4}$ ۴) ۱-

جواب: گزینه ۳

در این سوال باید توجه کرد که عبارت مربع کامل در رادیکال مخرج را ابتدا به صورت قدرمطلق بنویسیم و تعیین علامت کنیم و پس از آن از هوپیتال استفاده کنیم. زیرا وقتی زیر رادیکال صفر می شود، استفاده از هوپیتال بی فایده است.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\frac{ax}{|x|}=a=1\Rightarrow a=1$$

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{x-\sqrt{3x-2}}{|x-2|}=\lim_{x\to 2^-}\frac{x-\sqrt{3x-2}}{-x+2}\xrightarrow{Hop}\frac{1-\dfrac{3}{2\sqrt{3x-2}}}{-1}=-\frac{1}{4}$$

سوال ۱۴۶ آزمون سراسری ۹۹ تجربی

۱۴۶- تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases}\sqrt{۵-۲x} & ; x\le -۲\\ -\frac{۱}{۲}x^{۲}+bx+c & ; x>-۲\end{cases}$، در $x=-۲$، مشتق‌پذیر است. مقدار c کدام است؟

۱) $-\frac{۲}{۳}$ ۲) $-\frac{۱}{۳}$ ۳) $\frac{۱}{۳}$ ۴) $\frac{۲}{۳}$

درجه سوال A (ساده)

این سوال یکی از پرتکرارترین سوالات در بحث تعریف مشتق در توابع است. برای حل این سوال ابتدا باید پیوستگی تابع در نقطه مورد نظر بررسی شود و سپس برابری مشتق چپ و راست به عنوان معادله دوم نوشته شود.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to(-۲)^-} f(x)=\lim\limits_{x\to(-۲)^-}\sqrt{۵-۲x}=۳\\[2ex] \lim\limits_{x\to(-۲)^+} f(x)\Rightarrow \lim\limits_{x\to(-۲)^+}(-\frac{۱}{۲}x^{۲}+bx+c)=-۲b+c-۲\end{array}\right\}\Rightarrow c=۲b+۵\quad(۱)$$

$$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{-۲}{۲\sqrt{۵-۲x}} & x<-۲\Rightarrow f'_-(-۲)=-\dfrac{۱}{۳}\\ -x+b & x>-۲\Rightarrow f'_+(-۲)=۲+b\end{cases}\quad\Rightarrow ۲+b=-\frac{۱}{۳}\Rightarrow b=-\frac{۷}{۳}\xrightarrow{(۱)}c=-\frac{۱۴}{۳}+۵=\frac{۱}{۳}$$

نمونه های متنوعی از این سوال در آزمون ۱۹ دوپینگ طراحی شده بود که موارد زیر نمونه ای از آن می باشد.

سوال ۶ آزمون ۱۹ دوپینگ

۶- در تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases}\sqrt[۳]{(۳x+۵)} & ; x<۱\\ a\sqrt{x}+b & ; x\ge ۱\end{cases}$، مقدار $f'(۱)$ موجود است، $a-b$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) -۱ ۳) ۲ ۴) -۲

جواب: گزینه ۲

برای آنکه در تابع $f(x)=\begin{cases}\sqrt[۳]{(۳x+۵)} & ; x<۱\\ a\sqrt{x}+b & ; x\ge ۱\end{cases}$ مقدار $f'(۱)$ موجود باشد باید تابع در نقطه‌ی $x=۱$ پیوسته بوده و ضمناً مشتق‌های راست و چپ در نقطه‌ی $x=۱$ با هم برابر باشند:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to۱^-} f(x)=\lim\limits_{x\to۱^-}\sqrt[۳]{(۳x+۵)}=۲\\[2ex] \lim\limits_{x\to۱^+} f(x)\Rightarrow \lim\limits_{x\to۱^+}(a\sqrt{x}+b)=a+b\end{array}\right\}\Rightarrow a+b=۲\quad(۱)$$

$$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{۳}{۳\sqrt[۳]{(۳x+۵)^{۲}}} & x<۱\Rightarrow f'_-(۱)=\dfrac{۱}{۴}\\ \dfrac{a}{۲\sqrt{x}} & x\ge۱\Rightarrow f'_+(۱)=\dfrac{a}{۲}\end{cases}\quad\Rightarrow \frac{a}{۲}=\frac{۱}{۴}\Rightarrow a=\frac{۱}{۲}\xrightarrow{(۱)}b=\frac{۳}{۲}$$

$$\Rightarrow a-b=-۱$$

سوال ۱۴۷ آزمون سراسری ۹۹ تجربی

۱۴۷- مشتق تابع با ضابطهٔ $f(x)=\left(\dfrac{\sqrt[۳]{x^۲+۲x}}{x^۲-x}\right)^۳$، در نقطهٔ $x=۲$، کدام است؟

۱) $-\frac{۳}{۴}$ ۲) $-\frac{۵}{۴}$ ۳) $-\frac{۵}{۲}$ ۴) $-\frac{۱۵}{۴}$

درجه سوال B (متوسط)

این سوال نیز مانند سوال ۱۴۶ سوالی است که در بحث مشتق توابع مرکب معمولا مطرح می شود و تسلط بر فرایند مشتق گیری و رعایت کردن نگارش صحیح ضرائب هنگام مشتق گیری در اینگونه سوالات بسیار مهم است.

$$f(x)=\frac{x^۲+۲x}{(x^۲-x)^۳}\Rightarrow f'(x)=\frac{(۲x+۲)(x^۲-x)^۳-۳(x^۲-x)^۲(۲x-۱)(x^۲+۲x)}{(x^۲-x)^۶}$$

$$\Rightarrow f'(x)=\frac{(۲x+۲)(x^۲-x)-۳(۲x-۱)(x^۲+۲x)}{(x^۲-x)^۴}\xrightarrow{x=۲}\Rightarrow f'(۲)=\frac{(۶)(۲)-۳(۳)(۸)}{(۲)^۴}=\frac{-۶۰}{۱۶}=-\frac{۱۵}{۴}$$

نمونه های متنوعی از این خانواده از سوالات مشتق در آزمون ۲۰ دوپینگ طراحی شده بود که دو نمونه از آن در زیر آورده شده است.

سوال ۲۰ آزمون ۲۰ دوپینگ

۲۰- مشتق تابع $y=\sqrt[۳]{(\frac{۲x+۱}{x-۲})^۲}$ به ازای $x=-۳$ چند است؟

۱) $\frac{۱}{۵}$ ۲) $-\frac{۱}{۵}$ ۳) $\frac{۲}{۱۵}$ ۴) $-\frac{۲}{۱۵}$

جواب: گزینه ۴

مشتق تابع را می‌نویسیم.

$$y'=\frac{۲}{۳}\left(\frac{۲x-۴-۲x-۱}{(x-۲)^۲}\right)\left(\frac{۲x+۱}{x-۲}\right)^{-\frac{۱}{۳}}\quad,\quad y'=\frac{۲}{۳}\frac{-۵}{(x-۲)^۲}\left(\frac{x-۲}{۲x+۱}\right)^{-\frac{۱}{۳}}\Rightarrow y'(-۳)=-\frac{۲}{۱۵}$$

۲۱- مشتق عبارت $\left(\dfrac{x-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)^{\frac{۱}{۳}}$ در نقطه $x=۴$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۱}{۳}$ ۳) $\frac{۱}{۶}$ ۴) $\frac{۱}{۱۲}$

جواب: گزینه ۴

$$y=\left(\frac{x}{\sqrt{x}}-۱\right)^{\frac{۱}{۳}}=\left(\sqrt{x}-۱\right)^{\frac{۱}{۳}}\Rightarrow y'=\frac{۱}{۳}\left(\frac{۱}{۲\sqrt{x}}\right)\left(\sqrt{x}-۱\right)^{-\frac{۲}{۳}}$$

$$y'(۴)=\frac{۱}{۳}\times\frac{۱}{۴}\times۱=\frac{۱}{۱۲}$$

سوال ۱۴۸ آزمون سراسری ۹۹ تجربی

۱۴۸- فاصلهٔ نقطهٔ ماکسیمم نسبی تابع با ضابطهٔ $f(x)=x+\sqrt{۴x-x^۲}$، از نیمساز ناحیهٔ اول کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\sqrt{۲}$ ۳) ۲ ۴) $۲\sqrt{۲}$

درجه سوال C (سخت)

این سوال سخت ترین سوال کنکور ۹۹ تجربی بود. البته در کل مبحث کاربرد مشتق مبحث پرنکته و سختی به حساب می آید و همواره این مساله به دانش اموزان گوشزد می شود که حل چنین سوالاتی تنها در صورتی توجیه پذیر است که هدف کسب درصد بالای ۹۰ درصد باشد. در غیر اینصورت این مبحث و سوالات مربوط به آن را می توان به عنوان سوال نزده در نظر گرفت.

البته لازم به ذکر است که نکته سوال بسیار ساده است اما آسان نیست. ساده است به این دلیل که باید مشتق تابع را محاسبه و تعیین علامت کرد و در نقطه ای که علامت مشتق از مثبت به منفی تبدیل می شود، نقطه ماکسیمم نسبی تابع اتفاق می افتد، اما آسان نیست چون تابعی که باید آن را تعیین علامت کرد یک عبارت شامل رادیکال است که یافتن ریشه و تعیین علامت آن دشوار است.

$$y=x+\sqrt{۴x-x^۲}\rightarrow y'=۱+\frac{۴-۲x}{۲\sqrt{۴x-x^۲}}=\frac{\sqrt{۴x-x^۲}+(۲-x)}{\sqrt{۴x-x^۲}}$$

$$\sqrt{۴x-x^۲}+(۲-x)=۰\Rightarrow\sqrt{۴x-x^۲}=x-۲\Rightarrow ۴x-x^۲=x^۲-۴x+۴$$

$$\Rightarrow x^۲-۴x+۲=۰\Rightarrow x=۲\pm\sqrt{۲}\xrightarrow{x>۲}x=۲+\sqrt{۲}\Rightarrow A(۲+\sqrt{۲},۲+۲\sqrt{۲})$$

حال از رابطه فاصله نقطه از خط فاصله این نقطه را تا نیمساز ناحیه اول بدست می اوریم که این فاصله برابر ۱ بدست می اید. موضوع یافتن اکسترمم نسبی و مطلق تابع به شکل های متنوعی در آزمون ۲۳ دوپینگ مورد سوال قرار گرفته بود که یک نمونه از آنها در سوال زیر آورده شده است.

سوال ۸ آزمون ۲۳ دوپینگ

۸- بیشترین مقدار تابع $f(x)=\frac{۱}{x^۴-۲x^۲+۳}$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) ۱ ۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) ۲

جواب: گزینه ۱

ابتدا مخرج کسر را بررسی می‌کنیم. مخرج کسر یک عبارت همواره مثبت است. در نتیجه بیشترین مقدار این کسر به ازای کمترین مقدار مخرج کسر بدست می‌آید.

$$y=x^۴-۲x^۲+۳\rightarrow y'=۴x^۳-۴x=۴x(x^۲-۱)=۰\Rightarrow x=-۱,۰,۱$$

x		−۱		۰		۱	
y	−	۰	+	۰	−	۰	+
	↘	min	↗	max	↘	min	↗

کمترین مقدار مخرج کسر $y(-۱)=y(۱)=۲$ است. بنابراین بیشترین مقدار این کسر $\frac{۱}{۲}$ خواهد بود.

سوال ۱۴۹ آزمون سراسری ۹۹ تجربی

۱۴۹- از بین مثلث‌های قائم‌الزاویه با اندازهٔ وتر ۱۰ واحد، دو ضلع قائم با کدام نسبت انتخاب شود تا حجم حاصل از دوران این مثلث حول ضلع قائم، بیشترین باشد؟

۱) $\frac{2}{1}$ ۲) $\frac{\sqrt{3}}{1}$ ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) $\frac{\sqrt{2}}{1}$

درجه سوال B (متوسط)

این سوال، سوال سختی است اما در محدوده سوالات قابل طرح در موضوع بهینه سازی سوال متوسطی به حساب می آید. برای حل این سوال می دانیم که حجم ایجاد شده از دوران مثلث قائم الزاویه حول یک ضلع قائم، یک مخروط است. در نتیجه بایستی حجم مخروط ماکزیمم شود در شرایطی که رابطه بین شعاع قاعده که یک ضلع مثلث قائم الزاویه است و ارتفاع مخروط که ضلع دیگر مثلث قائم الزاویه است داده شده است.

در نتیجه برای حل این سوال داریم:

$$r^2+h^2=100 \Rightarrow r^2=100-h^2 \qquad V=\frac{1}{3}\pi r^2 h=\frac{1}{3}\pi h(100-h^2)=\frac{\pi}{3}(100h-h^3)$$

$$V'=\frac{\pi}{3}(100-3h^2)=0 \Rightarrow h=\frac{10}{\sqrt{3}} \to r=\frac{10\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \longrightarrow \frac{r}{h}=\frac{\sqrt{2}}{1}$$

سوالات متنوعی از موضوع بهینه سازی با بحث رسم شکل و نوشتن رابطه بین متغیرها در آزمون ۲۳ دوپینگ داده شده بود که سوال زیر یک نمونه از این سوالات است.

تذکر: در برخی از کتابها فرمول های حفظی زیادی از تقسیم نسبتی مقادیر با توجه به توانها داده می شود که حفظ کردن آنها را به هیچ عنوان توصیه نمیکنم. در ریاضیات تسلط بر مفهوم پایه ای سوال و کار بر روی اصول اولیه می تواند کمک کند که در حل سوالهای متنوع از یک اصل پایه ای پیروی کنیم و احتیاج به حفظ کردن فرمول های متعدد نداشته باشیم.

سوال ۱۶ آزمون ۲۳ دوپینگ ریاضی

۱۶- در یک مخروط قائم حاصل‌جمع ارتفاع و قطر قاعده ۶ می‌باشد. اگر حجم مخروط بیشینه باشد، ارتفاع مخروط چقدر است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) $\frac{8}{3}$

جواب: گزینه ۱

نکته: حجم مخروطی به شعاع قاعده‌ی r و ارتفاع h برابر است با: $\frac{1}{3}\pi r^2 h$

$$2r+h=6 \Rightarrow h=6-2r \qquad V=\frac{1}{3}\pi r^2 h=\frac{1}{3}\pi r^2(6-2r)=\frac{\pi}{3}(6r^2-2r^3)$$

$$V'=\frac{\pi}{3}(12r-6r^2)=0 \Rightarrow r=2 \Rightarrow h=2$$

سوال ۱۵۰ آزمون سراسری ۹۹ تجربی

۱۵۰- به چند طریق می‌توان ۵ نفر از ۹ دوست صمیمی خود را به مهمانی دعوت کرد، به‌طوری‌که دو نفر آنان، نخواهند با هم در مهمانی شرکت کنند؟

۱) ۸۴ ۲) ۸۷ ۳) ۹۱ ۴) ۹۵

درجه سوال A (ساده)

این سوال یکی از ساده ترین سوالات از مجموعه سوالاتی است که در مورد شمارش می توان مطرح کرد. نمونه های بسیار سخت تر و پیچیده تر از این سوال در آزمون ۴ دوپینگ طراحی شده بود.

$$\binom{۹}{۵}-\binom{۷}{۳}=۱۲۶-۳۵=۹۱$$

اما سوال ۲۸ این آزمون شباهت زیادی به سوال فوق دارد:

سوال ۲۸ آزمون ۴ دوپینگ

۲۸- شخصی می خواهد دوستان خود را به یک مهمانی دعوت کند. اگر او ۷ دوست با نامهای A,B,C,D,E,F,G داشته باشد، با این فرض که امکان حضور دو نفر A,F با هم در این مهمانی وجود نداشته باشد، به چند طریق می تواند ۴ دوست خود را دعوت کند، ؟

۱) ۳۵ ۲) ۳۰ ۳) ۲۵ ۴) ۲۰

پاسخ: گزینه ۳

ابتدا تعداد کل حالات را محاسبه می کنیم و سپس تعداد حالاتی که این دو دوست با هم در مهمانی شرکت می کنند را نیز محاسبه می کنیم و از کل حالات کم می کنیم.

$$\binom{۷}{۴}-\left[\binom{۵}{۲}\right]=۳۵-۱۰=۲۵$$

سوال ۱۵۱ آزمون سراسری ۹۹ تجربی

۱۵۱- پنج کتاب زبان فارسی و ۳ کتاب زبان انگلیسی، به تصادف در یک قفسه کنار هم چیده شده‌اند. با کدام احتمال کتاب‌های هم زبان، کنار هم قرار می‌گیرند؟

۱) $\frac{۱}{۱۴}$ ۲) $\frac{۱}{۲۱}$ ۳) $\frac{۱}{۲۸}$ ۴) $\frac{۱}{۵۶}$

درجه سوال A (ساده)

یکی از نقاطی که در کنکور تجربی در سالهای قبل قابل توجه بود بحث احتمال و سوالات چالشی در این مبحث بود. از موضوع احتمال شرطی یا احتمال مستقل سوالات بسیار چالشی قابل طرح است که در کنکور ۹۹ ظاهرا طراح سوال به یک سوال بسیار ساده به فرم فوق بسنده کرده بود.

$$\frac{۵!۳!۲!}{۸!}=\frac{۵!\times ۱۲}{۸\times ۷\times ۶\times ۵!}=\frac{۱}{۲۸}$$

در آزمون ۴ و ۵ دوپینگ سوالات مربوط به ترکیبیات و احتمال مطرح شده بود که دو سوال زیر به عنوان نمونه های مشابه با سوال فوق آورده شده است.

سوال ۱۰ آزمون ۴ و سوال ۲۹ آزمون ۵ دوپینگ

۱۰- در یک کتابخانه ۳ کتاب فیزیک متمایز ، ۲ کتاب شیمی متمایز و ۴ کتاب ریاضی متمایز وجود دارد. شخص کتاب دار k کتاب زیست متمایز را برای اضافه کردن به این کتابخانه می آورد و کتابخانه را مرتب می کند به نحوی که کتابهای ریاضی در کنار هم و کتابهای شیمی و فیزیک یک در میان باشند و k کتاب زیست را در ابتدای قفسه از سمت راست قرار می دهد، اگر تعداد حالات مرتب کردن کتابها به صورتی که گفته شد ۱۱۵۲ حالت باشد، k کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

جواب :گزینه ۲ صحیح می باشد (مثال صفحه ۱۳۰)

بهتر است گزینه n را استخراج کرده و در عبارت جایگذاری کنید.

$\boxed{M_۱M_۲M_۳M_۴}$ $\boxed{P_۱C_۱P_۲C_۲P_۳}$ $\boxed{K}$

۴ کتاب ریاضی — کتاب فیزیک و شیمی یک در میان — کتاب زیست

$$حالات = ۲!\times ۴!\times ۳!\times ۲!\times K! = ۱۱۵۲$$

۲! : جای دو بسته عوض شود — ۴!: کتاب های ریاضی — ۳!×۲!: شیمی و فیزیک

$$\Rightarrow K!=\frac{۱۱۵۲}{۴۸\times ۱۲}=۲\Rightarrow K=۲$$

۲۹- اگر حروف کلمه HESSABI را کنار هم قرار دهیم چقدر احتمال دارد که این کلمه با حرف S شروع شود و به حرف I ختم شود و حروف یکسان کنار هم نباشد؟

۱) $\frac{۸}{۱۰۵}$ ۲) $\frac{۴}{۱۰۵}$ ۳) $\frac{۲}{۱۰۵}$ ۴) $\frac{۱}{۲۱}$

گزینه ۲ صحیح است

برای اینکه حروف یکسان کنار هم نباشند، حرف دوم نباید حرف S باشد در نتیجه تعداد حالات مطلوب برابر با ۹۶ خواهد بود.
اما تعداد کل کلماتی که از این جایگشت بدست می آید !۷ است که به دلیل دو حرف تکراری S باید بر ۲ تقسیم شود یعنی جواب به صورت زیر بدست می آید:

$$S,\underline{۴},\underline{۴},\underline{۳},\underline{۲},\underline{۱},I \rightarrow ۴\times ۴!=۴\times ۲۴=۹۶$$

$$\frac{۹۶}{\frac{۷!}{۲}}=\frac{۲۴\times ۴\times ۲}{۷\times ۶\times ۵\times ۴!}=\frac{۸}{۲۱۰}=\frac{۴}{۱۰۵}$$

سوال ۱۵۲ آزمون سراسری ۹۹ تجربی

۱۵۲- ضریب تغییرات داده‌های آماری به‌صورت جدول زیر، کدام است؟

داده	۱۰ ، ۱۰ ، ۱۰ ، ۱۰ ، ۱۰ ، ۱۱ ، ۱۱ ، ۱۱ ، ۱۱ ، ۱۴ ، ۱۴ ، ۱۴ ، ۱۴ ، ۱۴ ، ۱۴ ، ۱۴

۱) ۰/۱۲ ۲) ۰/۱۵ ۳) ۰/۱۷ ۴) ۰/۱۸

درجه سوال B (متوسط)

این سوال نیز یک سوال ساده است که به دلیل حجم عملیات آن کمی وقت گیر است. برای بدست آوردن ضریب تغییرات تعدادی داده ابتدا باید میانگین آنها را محاسبه کرد. در مرحله بعد باید واریانس را بدست اورد و در نهایت نسبت انحراف معیار که جذر واریانس است به میانگین برابر با ضریب تغییرات خواهد بود.

$$\bar{X}=\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i}{n}=\frac{۵\times۱۰+۴\times۱۱+۷\times۱۴}{۱۶}=\frac{۵۰+۴۴+۹۸}{۱۶}=۱۲$$

$$\sigma_X^۲=\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^۲}{n}=\frac{۵\times(۱۰-۱۲)^۲+۴\times(۱۱-۱۲)^۲+۷\times(۱۴-۱۲)^۲}{۱۶}=\frac{۲۰+۴+۲۸}{۱۶}=\frac{۱۳}{۴}$$

$$C.V.=\frac{\sigma_X}{\bar{X}}=\frac{\frac{\sqrt{۱۳}}{۲}}{۱۲}=\frac{\frac{۳/۶}{۲}}{۱۲}=\frac{۱/۸}{۱۲}=۰/۱۵$$

در مورد محاسبه واریانس و ضریب تغییرات داده ها سوالات متنوعی در آزمون ۱۴ دوپینگ طراحی شده بود که دو نمونه از این سوالات در اینجا آورده شده است.

سوال ۱۴ و ۲۳ آزمون ۱۴ دوپینگ

۱۴- در داده‌های ۴، ۸، ۱۴، ۹، ۱۸، ۱۲، ۶، ۷، ۱، ۵ و ۳ واریانس داده‌های بین $Q_۱$ و $Q_۳$ کدام است؟

۱) $\sqrt{۲}$ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

جواب: گزینه ۲

ابتدا داده‌ها را مرتب نموده و داده‌های بین $Q_۱$ و $Q_۳$ را استخراج می‌کنیم.

$$\underset{\substack{\downarrow\\Q_۱}}{۴}$$

$$۱,۳,\underset{Q_۱}{۴},۵,۶,\underset{Q_۲}{۷},۸,۹,\underset{Q_۳}{۱۲},۱۴,۱۸$$

$$\xrightarrow[Q_۳\ ,\ Q_۱]{\text{داده‌های بین}} ۵,۶,۷,۸,۹$$

$$\bar{x}=\frac{۵+۶+۷+۸+۹}{۵}=\frac{۳۵}{۵}=۷$$

$$\sigma^۲=\frac{\sum(x_i-\bar{x})^۲}{۵}=\frac{(۵-۷)^۲+(۶-۷)^۲+(۷-۷)^۲+(۸-۷)^۲+(۹-۷)^۲}{۵}$$

$$=\frac{۴+۱+۰+۱+۴}{۵}=۲$$

۲۳- در ۴۰ داده‌ی آماری، میانگین ۴ و انحراف معیار ۱/۲ محاسبه شده است. اگر به تمام داده‌ها ۸ واحد اضافه شود، ضریب تغییرات داده‌های جدید کدام است؟

۱) ۰/۱ ۲) ۰/۲ ۳) ۰/۳ ۴) ۰/۴

جواب: گزینه ۱

$$CV_{\text{جدید}}=\frac{۱/۲}{۴+۸}=\frac{۱/۲}{۱۲}=\frac{۱}{۱۰}$$

توجه: اگر داده‌های آماری را با k جمع کنیم، میانگین جدید با k جمع می‌شود ولی انحراف معیار تغییر نمی‌کند.

سوال ۱۵۳ آزمون سراسری ۹۹ تجربی

۱۵۳- مثلثی با رأس‌های $A(1, 5)$، $B(7, 3)$ و $C(2, -2)$، مفروض است. اندازهٔ ارتفاع AH در مثلث ABC، کدام است؟

۱) ۴ ۲) $3\sqrt{2}$ ۳) ۵ ۴) $4\sqrt{2}$

درجه سوال A (ساده)

در این سوال که یک سوال ساده از مطالب هندسه مختصاتی کتاب ریاضی ۲ می باشد، بایستی ابتدا معادله خط BC را بدست آوریم و سپس با استفاده از فرمول فاصله نقطه از خط، فاصله نقطه A از خط BC را بدست آوریم.

$$m_{BC} = \frac{-2-3}{2-7} = 1 \rightarrow y-3 = x-7 \rightarrow x-y-4 = 0$$

$$AH = \frac{|x-y-4|}{\sqrt{2}} = \frac{|1-5-4|}{\sqrt{2}} = 4\sqrt{2}$$

در آزمون ۶ دوپینگ سوالات متنوعی و بسیار مشکل تر از این مبحث طرح شده بود که دو نومنه از این سوالات آورده شده است.

سوال ۲ و ۱۹ آزمون ۶ دوپینگ

۲- اگر $A(2,4)$، $B(3,-1)$ و $C(-1,3)$ سه راس یک مثلث باشند، مختصات پای ارتفاع AH کدام است؟

۱) $(-1,2)$ ۲) $(0,2)$ ۳) $(1,1)$ ۴) $(1,3)$

جواب: گزینه ۲

برای یافتن جواب باید ابتدا معادله ارتفاع AH را بدست آوریم و آن را با خط BC برخورد می‌دهیم. شیب AH عکس و قرینه شیب خط BC است:

$$m_{BC} = \frac{-1-3}{3+1} = -1 \xrightarrow{\text{شیب عکس و قرینه}} m_{AH} = 1 \xrightarrow{A(2,4)} AH: y = x+2 \quad \boxed{1}$$

$$\rightarrow BC: y = -x+2 \quad \boxed{2}$$

$$\boxed{1}, \boxed{2} \Rightarrow \text{محل برخورد} \quad \begin{cases} y = x+2 \\ y = -x+2 \end{cases} \rightarrow H\Big|\begin{matrix} 0 \\ 2 \end{matrix}$$

۱۹- اگر نقاط $A(2,-4)$، $B(0,-3)$ و $D(4,0)$ سه راس متوازی الاضلاع ABCD باشند، فاصلهٔ راس C از قطر متوازی الاضلاع کدام است؟

۱) $\frac{3}{2}$ ۲) ۲ ۳) $\frac{5}{2}$ ۴) ۳

جواب: گزینه ۲

فاصله راس C از قطر متوازی الاضلاع با فاصله راس A از قطر متوازی الاضلاع برابر است در نتیجه فاصله راس A را از قطر BD محاسبه می‌کنیم:

$$m_{BD} = \frac{y_D - y_B}{x_D - x_B} = \frac{0+3}{4-0} = \frac{3}{4} \rightarrow y - 0 = \frac{3}{4}(x-4) \xrightarrow{\times 4} 3x - 4y = 12$$

$$\text{فاصله A از BD} \rightarrow d = \frac{|6+16-12|}{5} = \frac{10}{5} = 2$$

سوال ۱۵۴ آزمون سراسری ۹۹ تجربی

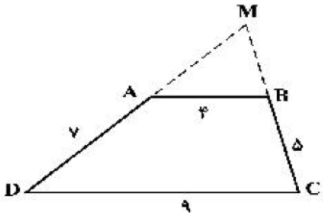
۱۵۴- اندازهٔ اضلاع متوازی‌الاضلاع ABCD مطابق شکل زیر داده شده است. محیط مثلث MAB، کدام است؟

۱) ۱۳/۲

۲) ۱۳/۶

۳) ۱۴/۴

۴) ۱۴/۸



درجه سوال A (ساده)

اولین نکته قابل توجه این است که شکل داده شده ذوزنقه است که در صورت سوال به اشتباه متوازی الاضلاع گفته شده است. نکته دوم اینکه رسم شکل در این سوال باعث شده است که بتوانیم کاملا واضح، دو مثلث متشابهی که با استفاده از آنها باید سوال را حل کرد مشاهده کنیم و روابط جواب را بنویسیم.

$$\triangle MAB \sim \triangle MDC \Rightarrow \frac{MA}{MD} = \frac{MB}{MC} = \frac{AB}{DC}$$

$$\xrightarrow[MB=y]{MA=x} \frac{x}{x+۷} = \frac{y}{y+۵} = \frac{۴}{۹} \Rightarrow (x = ۵/۶ \,,\; y = ۴)$$

$$P_{MAB} = (x+y+۴) = ۵/۶ + ۴ + ۴ = ۱۳/۶$$

همین سوال مربوط به محیط مثلثی که از امتداد ساقهای ذوزنقه در بیرون آن تشکیل می شود به فرم زیر در آزمون ۷ دو پینگ مرط شده بود.

سوال ۲۸ آزمون ۷ دوپینگ

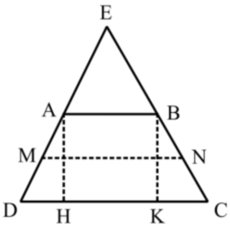
۲۸- در ذوزنقه متساوی الساقین ABCD، نقاط M و N وسط ساق‌ها هستند و قاعدهٔ کوچک برابر ۸ و $MN=۱۲$ و ارتفاع ذوزنقه ۳ است. محیط مثلثی که از امتداد ساق‌ها و بیرون ذوزنقهٔ متساوی الساقین به وجود می‌آید کدام است؟

۱) ۱۰ ۲) ۱۶ ۳) ۱۸ ۴) ۲۶

جواب: گزینه ۳

می‌دانیم که به کمک تالس می‌توانیم نشان دهیم که $MN = \frac{AB+CD}{۲}$ در نتیجه:

$$۱۲ = \frac{۸+CD}{۲} \Rightarrow DC = ۱۶$$



از A و B عمود می‌کنیم چون ذوزنقه متساوی الساقین است داریم:

$$HK = ۶ \,,\, DH = KC = ۴$$

$$\overset{\Delta}{ADH} : AD^۲ = AH^۲ + DH^۲ = ۴^۲ + ۳^۲ \Rightarrow AD = ۵$$

$$\overset{\Delta}{DEC} : (AB \parallel DC) \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{AE}{DE} = \frac{AB}{DC} = \frac{EB}{EC}$$

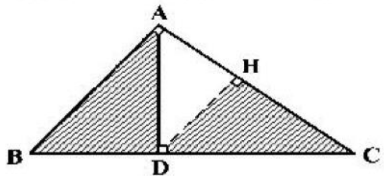
مثلث AEB متساوی الساقین است.

$$\frac{AE}{DE} = \frac{AB}{CD} = \frac{۱}{۲} \quad \Rightarrow \quad AE = AD = ۵ \qquad EB = ۵$$

$$\text{محیط مثلث} = AE + EB + AB = ۵ + ۵ + ۸ = ۱۸$$

سوال ۱۵۵ آزمون سراسری ۹۹ تجربی

۱۵۵- در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC، طول اضلاع قائم $AB = \sqrt{3}$ و $AC = 2$ است. نسبت مساحت‌های دو مثلث قائم‌الزاویه HCD و ABD، کدام است؟



۱) $\frac{3}{7}$ ۲) $\frac{4}{7}$

۳) $\frac{16}{21}$ ۴) $\frac{8}{9}$

درجه سوال A^* (نکته دار)

این سوال یکی از سوالات نکته دار کنکور ۹۹ بود که اگر با استفاده از نکته ای که در آزمون ۷ دوپینگ مطرح شده بود آن را حل می کردیم ساده بود اما در غیر این صورت محاسبات آن، سوال را به یک سوال سخت و وقت گیر تبدیل می کرد.

طبق نکته مطرح شده در زیر ارتفاع AD مساحت مثلث را به نسبت مجذور اضلاع تقسیم می کند. در نتیجه مساحت مثلث ABD به مساحت مثلث ACD نسبت ۳ به ۴ دارد. همین موضوع در مثلث ACD نیز وجود دارد و در این مثلث نیز ارتفاع DH مساحت را با همین نسبت تقسیم می کند. در نتیجه با توجه به این نکته به راحتی می توانیم سوال را حل کنیم:

$$\triangle ABC \to \frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle ADC}} = \frac{3}{4} \Rightarrow S_{\triangle ABD} = \frac{3}{4} S_{\triangle ADC}$$

$$\triangle ADC \to \frac{S_{\triangle HCD}}{S_{\triangle ADH}} = \frac{4}{3} \Rightarrow \frac{S_{\triangle HCD}}{S_{\triangle ADC}} = \frac{4}{7} \Rightarrow S_{\triangle HCD} = \frac{4}{7} S_{\triangle ADC}$$

$$\Rightarrow \frac{S_{\triangle HCD}}{S_{\triangle ABD}} = \frac{\frac{4}{7} S_{\triangle ADC}}{\frac{3}{4} S_{\triangle ADC}} = \frac{16}{21}$$

سوال ۱۵ آزمون ۷ دوپینگ

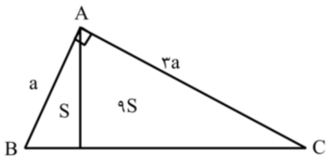
۱۵- در مثلث ABC داریم $AC = 3AB$ و $\hat{A} = 90$، ارتفاع AH و میانه AM رسم شده است. مساحت مثلث ABC چند برابر مساحت مثلث AMH است؟

۱) ۲ ۲) ۲/۵ ۳) ۳ ۴) ۴

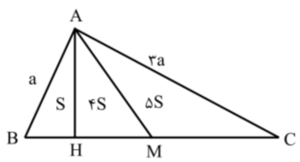
جواب: گزینه ۲

چون در این سوال فقط نسبت مساحت‌ها خواسته شده است می‌توانیم به صورت زیر عمل کنیم.

در مثلث قائم الزاویه، ارتفاع وارد بر وتر مساحت مثلث را به نسبت مجذور اضلاع تقسیم می‌کند. در نتیجه داریم:



از طرفی میانه وارد بر وتر مساحت را نصف می‌کند در نتیجه در این سوال مساحت قسمت قبل که $10S$ باشد را توسط میانه نصف می‌کنیم که در نتیجه در هر طرف میانه $5S$ قرار می‌گیرد و اگر ارتفاع و میانه را با هم در یک شکل رسم کنیم آنگاه تقسیم مساحت به صورت رو به‌رو خواهد بود:



$$\frac{10S}{4S} = 2/5$$