



موسسه آموزش
عالی
اقبال لاهوری
مهندس حاجی قاسمی

به نام خدا

عنوان درس:

شبیه سازی مخزن

فصل سوم:

شبیه سازی یک بعدی جریان سیال

مدرس:

مهندس مجتبی حاجی قاسمی



فصل سوم: شبیه سازی یک بعدی جریان سیال

جریان یک فازی سیال

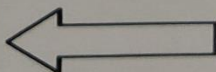
$$\nabla \cdot [\lambda(\nabla p - \gamma \nabla z)] = \left[\phi \frac{c_f}{B^0} + \phi^0 \frac{c_R}{B} \right] \frac{\partial P}{\partial t} + q \quad (1-3)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1.127 A_x k_x}{\mu B} \left(\frac{\partial P}{\partial x} - \gamma \frac{\partial z}{\partial x} \right) \right] \Delta x = \frac{V_b}{5.615} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\phi}{B} \right) + q_{sc} \quad (2-3)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{k_x}{\mu B} \frac{\partial P}{\partial x} \right) = \frac{\phi c}{B} \frac{\partial P}{\partial t} + q$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{\partial U}{\partial t}$$

معادله تفاضل محدود
(به صورت مجموعه ای از معادلات جبری و
تقریب در نقاط مشخص)



معادله دیفرانسیل جزئی
(به صورت یک معادله پیوسته و
مقدار واقعی در نقاط مختلف)

شکل ۱-۳: ساختار تبدیل معادله دیفرانسیل جزئی به معادله تفاضل محدود



فصل سوم: شبیه سازی یک بعدی جریان سیال

بسط سری تیلور

$$U_{i-1} = U_i - U'_i h + U''_i \frac{h^2}{2} - U'''_i \frac{h^3}{6} + \dots + (-1)^m U_i^m \frac{h^m}{m!} \quad (3-5 \text{ الف})$$

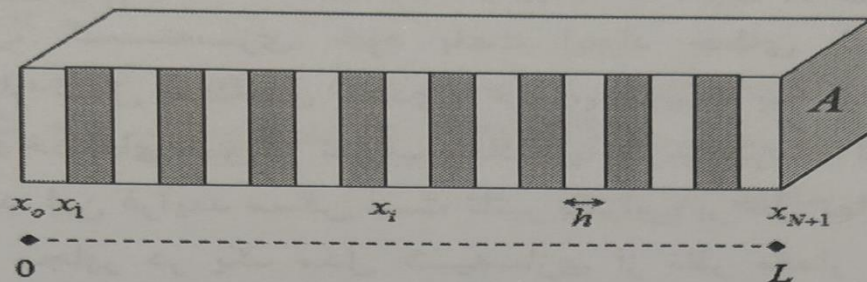
$$U_{i+1} = U_i + U'_i h + U''_i \frac{h^2}{2} + U'''_i \frac{h^3}{6} + \dots + U_i^m \frac{h^m}{m!} \quad (3-5 \text{ ب})$$

این کار باعث می شود تا تقریب های ذیل برای مشتق اول U'_i به دست آید.
(الف) تقریب اختلاف محدود پیشرو:

$$U'_i = \frac{U_{i+1} - U_i}{h} + R_i^f \quad (3-6)$$

در این روش، خطای کوتاه سازی R_i^f از مرتبه h و به صورت زیر می باشد:

$$R_i^f = -U''_i \frac{h}{2} - U'''_i \frac{h^2}{6} - \dots \quad (3-7)$$



شکل ۳-۲: نحوه شبکه بندی یک مخزن یک بعدی در مختصات کارتیزین.



فصل سوم: شبیه سازی یک بعدی جریان سیال

بسط سری تیلور

(ب) تقریب اختلاف محدود عقب رو:

$$U'_i = \frac{U_i - U_{i-1}}{h} + R_i^b \quad (۸-۳)$$

در این روش، خطای کوتاه سازی R_i^b از مرتبه h و به صورت زیر است:

$$R_i^b = U_i'' \frac{h}{2} - U_i''' \frac{h^2}{6} + \dots \quad (۹-۳)$$

(ج) تقریب اختلاف مرکزی:

$$U'_i = \frac{U_{i+1} - U_{i-1}}{2h} + R_i^c \quad (۱۰-۳)$$

در این روش، خطای کوتاه سازی R_i^c از مرتبه h^2 و به صورت زیر است:

$$R_i^c = U_i''' \frac{h^2}{6} - U_i^{iv} \frac{h^4}{120} + \dots \quad (۱۱-۳)$$

روش (ج)، تقریب بهتری را نسبت به موارد الف و ب نشان می دهد. علاوه بر این، از بسط تیلور جملات U_{i+1} و U_{i-1} نیز می توان برای یافتن تقریبی برای مشتق دوم U_i'' به صورت ذیل استفاده کرد:

$$U_i'' = \frac{U_{i-1} - 2U_i + U_{i+1}}{h^2} + R_i^2 \quad (۱۲-۳)$$



فصل سوم: شبیه سازی یک بعدی جریان سیال

بسط سری تیلور

در این حالت هم خطای کوتاه سازی R_1^2 از مرتبه h^2 و به صورت زیر است:

$$R_1^2 = U_i^{iv} \frac{h^2}{12} - U_i^{vi} \frac{h^4}{360} + \dots \quad (13-3)$$

عبارت‌های گسسته سازی تشریح شده در روابط (۳-۶) تا (۳-۱۲) برای متغیرهای مکانی بودند؛ برای متغیرهای زمان نیز انجام چنین روند مشابهی را در نظر بگیرید، با به کارگیری روش

تفاضل پیشرو برای گام زمانی Δt و نقطه زمانی n ام مشتق زمانی اول به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\frac{\partial U_i}{\partial t} = \frac{U_i^{n+1} - U_i^n}{\Delta t} \quad (14-3)$$

حال برای اعمال این گسسته سازی‌ها برای مسئله مورد بحث در این فصل (معادله ۳-۴)، در این جا ابتدا از روش تفاضل مرکزی برای متغیر مکان و تفاضل پیشرو برای متغیر زمان استفاده می‌کنیم، با جایگزینی تقریب‌های حاصل در معادله جریان رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\frac{U_{i-1} - 2U_i + U_{i+1}}{h^2} = \frac{U_i^{n+1} - U_i^n}{\Delta t} \quad (15-3)$$

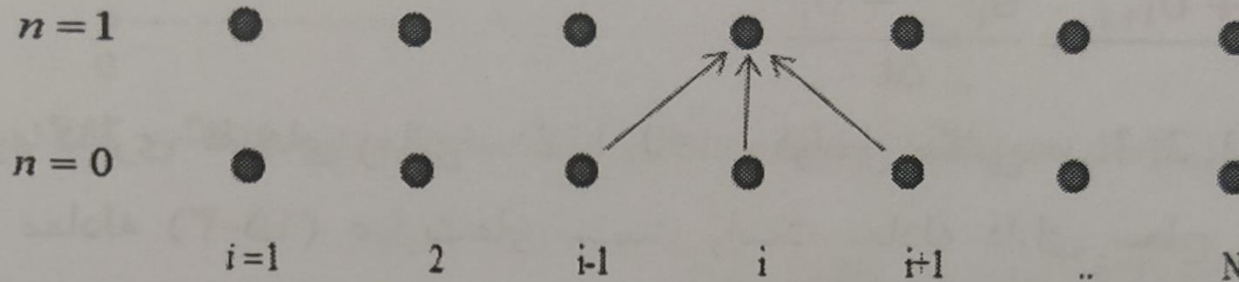


موسسه آموزش
عالی
اقبال لاهوری
مهندس حاجی قاسمی

فصل سوم: شبیه سازی یک بعدی جریان سیال

فرمولاسیون صریح و ضمنی

$$U_i^{n+1} = \alpha [U_{i+1}^n - \left(2 - \frac{1}{\alpha}\right) U_i^n + U_{i-1}^n] \quad (3-16)$$



شکل ۳-۳: وضعیت ارتباط نقاط/بلوک‌های همجوار در روش فرمولاسیون صریح



فصل سوم: شبیه سازی یک بعدی جریان سیال

فرمولاسیون صریح و ضمنی

شرط پایداری

در این مرحله برای کنترل و آزمودن شرط پایداری، دو روش به کار برده می‌شود. روش اول، قانون مثبت^۲ است. این روش بیان می‌کند که ضریب متغیرهای سمت راست معادله تفاضل محدود (۱۶-۳) باید مثبت باشند؛ به عبارت دیگر باید شرط زیر برقرار گردد:

$$-\left(2 - \frac{1}{\alpha}\right) \geq 0 \text{ یا } \alpha \leq \frac{1}{2} \quad (۱۷-۳)$$

$$\left| \frac{\varepsilon_i^{n+1}}{\varepsilon_i^n} \right| \leq 1 \quad (۱۸-۳)$$

از طرفی، می‌توان هر نوع تابعی، مانند تابع خطا ε_i^n در نقطه i را به صورت بسط سری فوریه نوشت که در فرم اعداد مختلط^۴ پس از ساده سازی تابع خطا به فرم زیر تبدیل می‌شود:

$$\varepsilon_i = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \lambda_m e^{j\beta_m i \Delta x}, j = \sqrt{-1} \quad (۱۹-۳)$$



فصل سوم: شبیه سازی یک بعدی جریان سیال

فرمولاسیون صریح و ضمنی

روش تحلیلی ون نیومن از سری فوریه بهره برده و فقط یک مؤلفه از آن سری را در این تحلیل بررسی می کند، برای مثال عبارت $\varepsilon_i^n = \lambda^n e^{j\beta i}$ را در نظر بگیرید. برای پیدا کردن حالت گسسته از تابع خطا، $\varepsilon_i^n + U_i^{*n}$ را با U_i^n در معادله تفاضل محدود (۳-۱۶)، جایگزین می کنیم. بنابراین برای حل واقعی و تقریبی محاسبه شده رابطه زیر نوشته می شود.

$$U_i^{*n+1} = \alpha [U_{i+1}^{*n} - \left(2 - \frac{1}{\alpha}\right) U_i^{*n} + U_{i-1}^{*n}] \quad (۳-۲۰ \text{ الف})$$

$$U_i^{n+1} = \alpha [U_{i+1}^n - \left(2 - \frac{1}{\alpha}\right) U_i^n + U_{i-1}^n] \quad (۳-۲۰ \text{ ب})$$

با بکارگیری رابطه (۳-۲۰) و جایگزینی معادله خطا و ساده سازی رابطه زیر برای تابع خطا حاصل می شود که مشابه معادله تابع اصلی است.

$$\varepsilon_i^{n+1} = \alpha [\varepsilon_{i+1}^{n+1} - \left(2 - \frac{1}{\alpha}\right) \varepsilon_i^n + \varepsilon_{i-1}^n] \quad (۳-۲۱)$$

با جایگزینی مولفه های تابع خطا $\varepsilon_i^n = \lambda^n e^{j\beta i}$ در رابطه (۳-۲۱) و انجام عملیات جبری و به کارگیری روابط مثلثاتی مناسب رابطه زیر به دست می آید.

$$\lambda^{n+1} = \lambda^n \left[-4\alpha \sin^2 \frac{\beta}{2} + 1 \right] \quad (۳-۲۲)$$



فصل سوم: شبیه سازی یک بعدی جریان سیال

فرمولاسیون صریح و ضمنی

از آنجایی که خطای بین دو گام زمانی با شرط $\left| \frac{\lambda^{n+1}}{\lambda^n} \right| \leq 1$ محدود می شود بنابراین معیار پایداری با شرط زیر برقرار می شود:

$$0 \leq \alpha \leq \frac{1}{2\sin^2 \frac{\beta}{2}} \quad \text{or} \quad \alpha \leq \frac{1}{2} \quad (23-3)$$

بنابراین، شرط پایداری برای فرمولاسیون صریح با لحاظ نمودن تعریف عبارت α به صورت زیر بیان می شود:

$$\frac{\Delta t}{h^2} \leq \frac{1}{2} \quad (24-3)$$

این رابطه نشان می دهد که گام زمانی برای این فرمولاسیون نمی تواند به طور دلخواه انتخاب شود. برای جریان کمی تراکم پذیر تک فاز در مسائل یک بعدی، تحت شرایط خواص ثابت سنگ و سیال (و با واحدهای میدانی شامل $k_x(\text{md})$, $\mu(\text{cp})$, $c\left(\frac{1}{\text{psi}}\right)$, $h(\text{ft})$, $\Delta t(\text{days})$) با معادله جریان حاکم در واحد میدانی به صورت $\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = \frac{\mu \phi C}{0.001127 \times 5.615 K_x} \frac{\partial P}{\partial t}$ ، شرط پایداری برای روش فرمولاسیون صریح به صورت زیر بیان می باشد:

$$\Delta t \leq \frac{\mu \phi C}{(0.001127 \times 5.615) K_x} \frac{h^2}{2} \quad (25-3)$$



فصل سوم: شبیه سازی یک بعدی جریان سیال

فرمولاسیون صریح و ضمنی

مثال ۳-۱) برای جریان سیال کمی تراکم پذیر در مخزنی تک بعدی با تراوایی $k_x(50\text{md})$ ، تخلخل $\phi(0.27)$ ، ضریب حجمی سیال $B(1\text{rb/stb})$ ، گرانیوی سیال $\mu(30\text{cp})$ ، و ضریب تراکم پذیری $c\left(1.6 \times 10^{-6} \frac{1}{\text{psi}}\right)$ و ضخامت مخزن $h(1000\text{ft})$ شرط پایداری را برای روش فرمولاسیون صریح، به دست آورید.

$$\Delta t \leq \frac{\mu \phi C}{(0.001127 \times 5.615) K_x} \frac{h^2}{2} = 20.5 \text{ days}$$

روش حل :

این بدین معنی است که در شبیه سازی چنین مسئله ای باید گام زمانی در نظر گرفته شده از این مقدار کمتر باشد.



فصل سوم: شبیه سازی یک بعدی جریان سیال

فرمولاسیون صریح و ضمنی

همگرایی و سازگاری

معادله تفاضل محدود (۳-۱۵) را در نظر بگیرید. با به کارگیری تقریب بسط تیلور برای عبارت‌های U_{i-1}^n و U_{i+1}^n در حول U_i^n و عبارت U_i^{n+1} در حول U_i^n می‌توان نوشت.

$$\begin{aligned} \frac{1}{h^2} \left[U_i^n - U_i^n h + U_i''^n \frac{h^2}{2} - \frac{U_i'''^n h^3}{6} + \frac{U_i^{ivn} h^4}{24} - \frac{U_i^{vn} h^5}{120} + \dots - 2U_i^n + U_i^n + U_i'^n h + U_i''^n \frac{h^2}{2} \right. \\ \left. + \frac{U_i'''^n h^3}{6} + \frac{U_i^{ivn} h^4}{24} + \frac{U_i^{vn} h^5}{120} + \dots \right] \\ = \frac{1}{\Delta t} \left[U_i^n + \left(\frac{\partial U}{\partial t} \right)_i^n \Delta t + \left(\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \right)_i^n \frac{(\Delta t)^2}{2} - U_i^n \right] \end{aligned}$$

(۳-۲۶)

بنابراین اختلاف بین دو مقدار معادله دیفرانسیل جزئی (PDE) و معادله تفاضل محدود (FDE) به صورت زیر خلاصه می‌شود:

$$FDE - PDE = \left[U_i''^n - \left(\frac{\partial U}{\partial t} \right)_i^n + \frac{U_i^{ivn} h^2}{12} - \frac{U_i^{vn} h^4}{360} - \left(\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \right)_i^n \frac{\Delta t}{2} \right] - \left[\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right)_i^n - \left(\frac{\partial U}{\partial t} \right)_i^n \right] \quad (۳-۲۷)$$

و پس از ساده‌سازی مقدار خطای کوتاه‌سازی برابر است با:

$$\left(\frac{h^2}{12} \frac{\partial^4 U}{\partial x^4} \right)_i^n - \left(\frac{\Delta t}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \right)_i^n + \dots \quad (۳-۲۸)$$



فصل سوم: شبیه سازی یک بعدی جریان سیال

فرمولاسیون صریح و ضمنی

به طور خلاصه برخی از خصوصیات روش فرمولاسیون صریح عبارتند از:

- الف) این روش پایداری مشروط دارد ($\alpha < \frac{1}{2}$).
- ب) از نظر خطا و ارزیابی آن، مستقیم تر است.
- ج) از نظر محاسباتی کم حجم تر و کم هزینه تر است.
- د) خصوصیت سازگاری (همگرایی) دارد $FDE \leftrightarrow PDE$.
- ه) مرتبه دقت آن برای متغیر مکانی و زمانی به ترتیب از درجه $O(h^2)$ و $O(\Delta t)$ است.
- و) این روش برای ارزیابی مجهولات در هر گام زمانی بسیار سریع است (زیرا مجهولات، جداگانه محاسبه می شوند).



فصل سوم: شبیه سازی یک بعدی جریان سیال

فرمولاسیون صریح و ضمنی

مثال ۳-۲) معادله ساده $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{\partial U}{\partial t}$ جریان سیال در یک بعد را در نظر بگیرید برای این مسئله تقریب تفاضل محدود با روش فرمولاسیون صریح به صورت $U_i^{n+1} = \alpha [U_{i+1}^n - (2 - \frac{1}{\alpha}) U_i^n + U_{i-1}^n]$ است. که در آن $\alpha = \frac{\Delta t}{h^2}$. از طرفی، حل تحلیلی این معادله دیفرانسیلی جزئی به شکل $U(x, t) = \frac{8}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} (\sin \frac{k\pi}{2}) (\sin k\pi x) \frac{e^{-k^2 \pi^2 t}}{k^2}$ داده شده است. از روش عددی با گام‌های $\alpha = 0.1, h = 0.1$ برای مقایسه جواب روش عددی با روش تحلیلی برای نقطه $x=0.3$ و در زمان‌های $t=0.01, 0.02, 0.1$ استفاده کنید. در صورتی که $\alpha = 1$ باشد حل عددی چگونه است؟ توزیع فشار U در زمان‌های مختلف و در مکان‌های مختلف رسم نمایید. در اینجا شرایط

مرزی به صورت $U(x=0) = U(x=1) = 0$ تعریف شده و شرط اولیه مسئله به صورت خطی زیر تعریف شده است:

$$U(t=0) = \begin{cases} 2x & \text{if } x < 0.5 \\ 2 - 2x & \text{if } x > 0.5 \end{cases}$$



فصل سوم: شبیه سازی یک بعدی جریان سیال

فرمولاسیون صریح و ضمنی

روش حل:

با استفاده از $\alpha = 0.1$ و با مقدار $h=0.1$ گام زمانی $\Delta t = 0.001$ است. بنابراین در این حالت $\alpha < \frac{1}{2}$ بوده و لذا شرط پایداری برقرار است. جدول زیر خلاصه مقادیر محاسبه شده در دو روش عددی و تحلیلی را نشان می دهد.

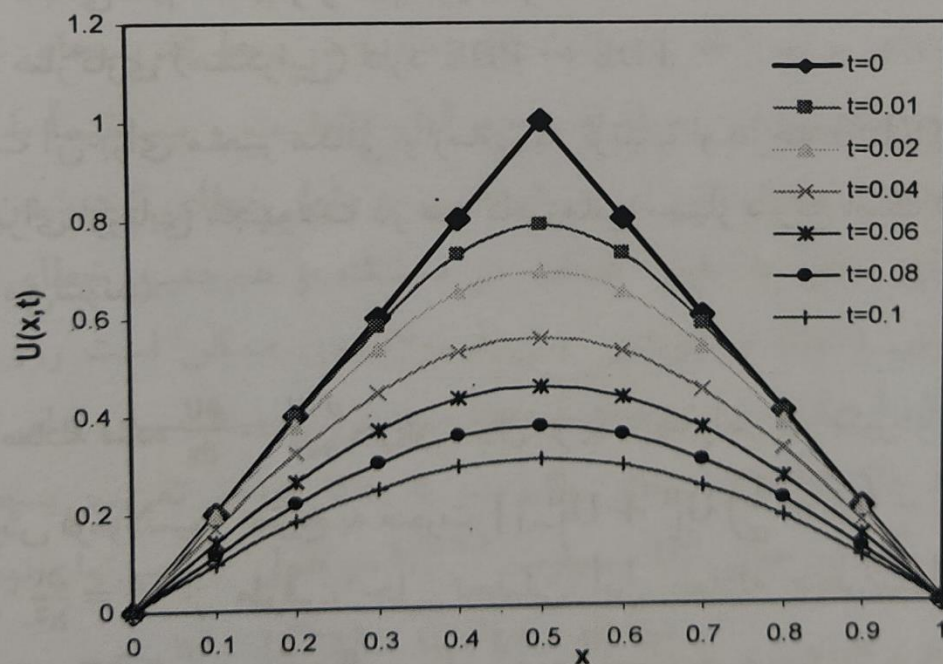
زمان	تفاضل محدود	حل تحلیلی	قدر مطلق خطا
۰/۰۱	۰/۵۸۲۲۱	۰/۵۷۹۹	۰/۰۰۲۳۱
۰/۰۲	۰/۵۳۷۲۷	۰/۵۳۳۴	۰/۰۰۳۸۷
۰/۱	۰/۲۴۷۲۳	۰/۲۴۴۴	۰/۰۰۲۸۳



فصل سوم: شبیه سازی یک بعدی جریان سیال

فرمولاسیون صریح و ضمنی

اگر $\alpha = 1$ باشد و $h=0.1$ آنگاه گام زمانی $\Delta t = 0.01$ بوده و $\alpha > \frac{1}{2}$ بنابراین ناپایداری در جواب را خواهیم دید. توزیع فشار در این دو حالت پایدار و ناپایدار در شکل (۳-۴) نشان داده شده است.

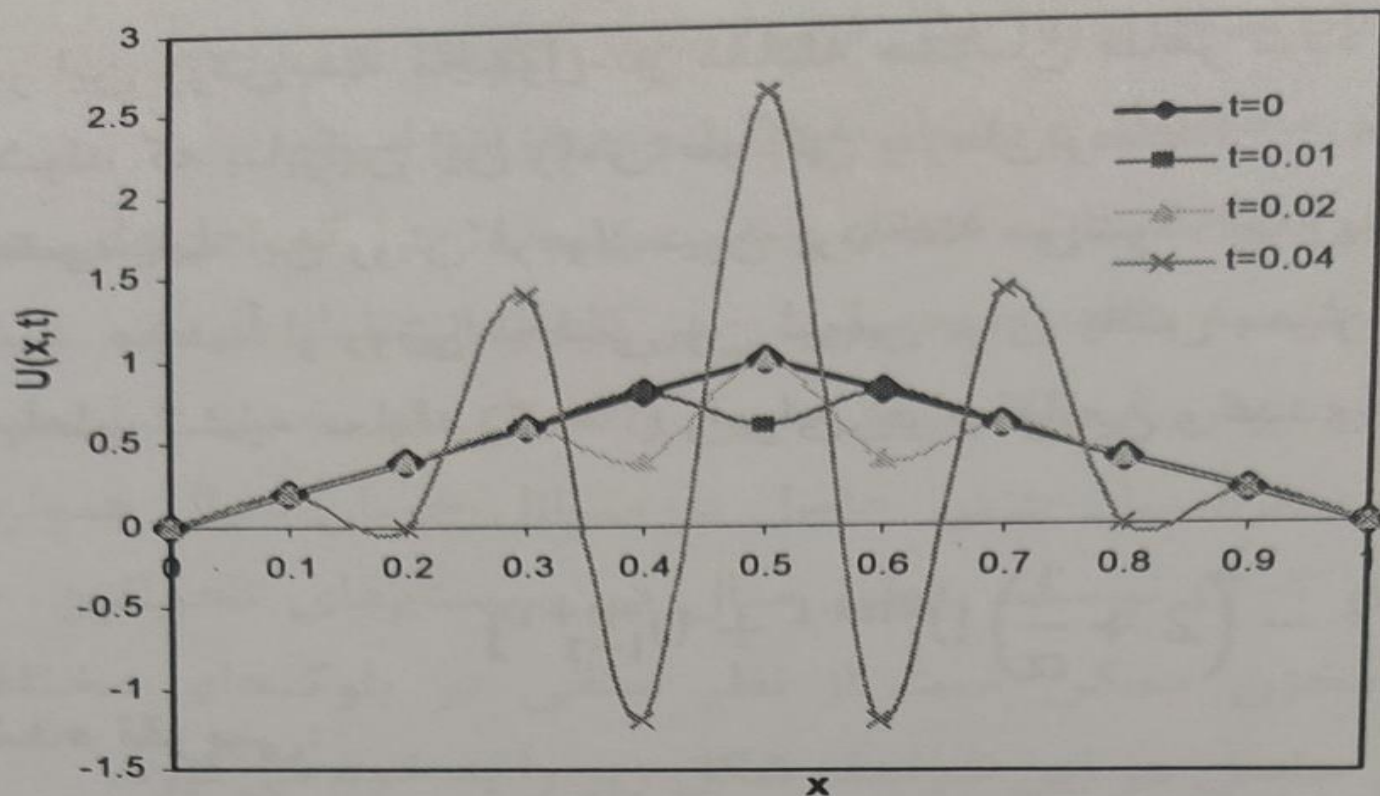


شکل ۳-۴-الف: توزیع فشار در سیستم در حالت پایدار



فصل سوم: شبیه سازی یک بعدی جریان سیال

فرمولاسیون صریح و ضمنی

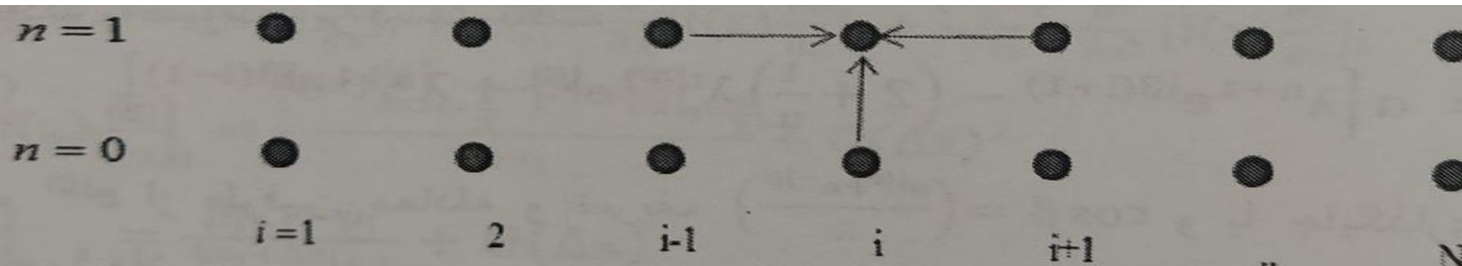


شکل ۳-۴-ب: توزیع فشار در سیستم در حالت ناپایدار



فصل سوم: شبیه سازی یک بعدی جریان سیال

فرمولاسیون صریح و ضمنی



شکل ۳-۵: وضعیت ارتباط نقاط/بلوک های همجوار در روش فرمولاسیون ضمنی

در روش فرمولاسیون ضمنی اجزاء مشتق مکانی در مرتبه زمانی $n+1$ در نظر گرفته می شوند. بنابراین معادله (۳-۱۵) به صورت زیر نوشته می شود:

$$\frac{U_{i-1}^{n+1} - 2U_i^{n+1} + U_{i+1}^{n+1}}{h^2} = \frac{U_i^{n+1} - U_i^n}{\Delta t} \quad (۳-۲۹)$$

که در این رابطه $n = 0, 1, \dots$ و $i = 1, 2, \dots, N$ می باشد. دوباره با فرض $\alpha = \frac{\Delta t}{h^2}$ ، معادله (۳-۲۹) به شکل زیر تبدیل می شود:

$$-U_i^n = \alpha \left[U_{i+1}^{n+1} - \left(2 + \frac{1}{\alpha} \right) U_i^{n+1} + U_{i-1}^{n+1} \right] \quad (۳-۳۰)$$



فصل سوم: شبیه سازی یک بعدی جریان سیال

فرمولاسیون صریح و ضمنی

حل واقعی:

$$-U_i^{*n} = \alpha [U_{i+1}^{*n+1} - \left(2 + \frac{1}{\alpha}\right) U_i^{*n+1} + U_{i-1}^{*n+1}] \quad (31-3)$$

حل محاسبه شده تقریبی:

$$-U_i^n = \alpha [U_{i+1}^{n+1} - \left(2 + \frac{1}{\alpha}\right) U_i^{n+1} + U_{i-1}^{n+1}] \quad (32-3)$$

از آنجایی که اختلاف این دو جواب مقدار خطا می باشد $(U_i^n = \varepsilon_i^n + U_i^{*n})$ لذا پس از جایگزینی و ساده سازی می توان معادله خطا را به طور خلاصه نوشت:

$$-\varepsilon_i^n = \alpha [\varepsilon_{i+1}^{n+1} - \left(2 + \frac{1}{\alpha}\right) \varepsilon_i^{n+1} + \varepsilon_{i-1}^{n+1}] \quad (33-3)$$

با جایگذاری مولفه های فوریه توابع خطای $\varepsilon_i^n = \lambda^n e^{j\beta i}$ در رابطه (33-3) می توان به شکل ساده این معادله به صورت زیر دست یافت:

$$-\lambda^n e^{j\beta i} = \alpha [\lambda^{n+1} e^{j\beta(i+1)} - \left(2 + \frac{1}{\alpha}\right) \lambda^{n+1} e^{j\beta i} + \lambda^{n+1} e^{j\beta(i-1)}] \quad (34-3)$$

با حذف $e^{j\beta i}$ از طرفین معادله و تعریف $\cos \beta = \left(\frac{e^{j\beta} + e^{-j\beta}}{2}\right)$ و با جایگذاری در رابطه (34-3) خواهیم داشت.

$$-\lambda^n = \alpha \lambda^{n+1} \left[2 \cos \beta - \left(2 + \frac{1}{\alpha}\right)\right] \quad (35-3)$$

لذا از این رابطه نسبت $\frac{\lambda^{n+1}}{\lambda^n}$ قابل دستیابی است که پس از ساده سازی و به کارگیری روابط مثلثاتی این نسبت به صورت زیر خلاصه می شود.

$$\frac{\lambda^{n+1}}{\lambda^n} = \frac{1}{4\alpha \sin^2 \frac{\beta}{2} + 1} \quad (36-3)$$



موسسه آموزش
عالی
اقبال لاهوری
مهندس حاجی قاسمی

فصل سوم: شبیه سازی یک بعدی جریان سیال

فرمولاسیون صریح و ضمنی

برخی از خصوصیات روش فرمولاسیون ضمنی عبارتند از:
(الف) این روش بدون هیچ گونه شرطی همواره پایدار است.

(ب) این روش از لحاظ صحت به روش فرمولاسیون صریح نمی‌رسد.

(ج) این روش از نظر محاسباتی، بسیار طولانی و پرهزینه است.

(د) در هر گام زمانی، محاسبات کندتر پیش می‌رود (چرا که حل‌های همزمان یک سری معادلات جبری برای محاسبه مقادیر مجهول در هر گام زمانی نیاز دارد).



فصل سوم: شبیه سازی یک بعدی جریان سیال

فرمولاسیون صریح و ضمنی

* معادله جریان در سیستم های نا همگون

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(f(x) \frac{\partial p}{\partial x} \right) = \frac{\partial p}{\partial t} \quad (3-37)$$

با استفاده از روش صریح با تقریب اختلاف مرکزی برای مشتق مکانی مرتبه اول بین بلوک های $i-1/2, i, i+1/2$ مقادیر تقریبی تفاضل محدود برای معادله (3-37)، به شکل ذیل به دست می آیند:

$$\left[f(x) \frac{\partial p}{\partial x} \right]_{i+1/2} = \left[f(x) \frac{\partial p}{\partial x} \right]_i + \frac{\Delta x_i/2}{1!} \frac{\partial}{\partial x} \left[f(x) \frac{\partial p}{\partial x} \right]_i + \frac{(\Delta x_i/2)^2}{2!} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[f(x) \frac{\partial p}{\partial x} \right]_i + \dots \quad (3-38)$$

$$\left[f(x) \frac{\partial p}{\partial x} \right]_{i-1/2} = \left[f(x) \frac{\partial p}{\partial x} \right]_i + \frac{-\Delta x_i/2}{1!} \frac{\partial}{\partial x} \left[f(x) \frac{\partial p}{\partial x} \right]_i + \frac{(-\Delta x_i/2)^2}{2!} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[f(x) \frac{\partial p}{\partial x} \right]_i \quad (3-39)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[f(x) \frac{\partial p}{\partial x} \right]_i = \frac{\left[f(x) \frac{\partial p}{\partial x} \right]_{i+1/2} - \left[f(x) \frac{\partial p}{\partial x} \right]_{i-1/2}}{\Delta x_i} + O(\Delta x)^2 \quad (3-40)$$

$$\left[\frac{\partial p}{\partial x} \right]_{i+1/2} = \frac{p_{i+1} - p_i}{\frac{\Delta x_i + \Delta x_{i+1}}{2}} + O(\Delta x) \quad (3-41)$$

$$\left[\frac{\partial p}{\partial x} \right]_{i-1/2} = \frac{p_i - p_{i-1}}{\frac{\Delta x_i + \Delta x_{i-1}}{2}} + O(\Delta x) \quad (3-42)$$

با استفاده از معادلات (3-38) تا (3-42) معادله تقریب تفاضل محدود برای مشتق مکانی

برای یک سیستم بلوک یکنواخت با خواص متغیر به صورت زیر نوشته می شود:

$$\left[f_{i+1/2} (p_{i+1}^n - p_i^n) - f_{i-1/2} (p_i^n - p_{i-1}^n) \right] \quad (3-43)$$



فصل سوم: شبیه سازی یک بعدی جریان سیال

فرمولاسیون صریح و ضمنی

برای کاربردی بودن معادلات در مسائل شبیه سازی مخازن، معادله حاکم برای جریان کمی تراکم پذیر یک فازی در سیستم مختصاتی کارتزین یک بعدی را در نظر بگیرید. با استفاده از واحدهای میدانی، معادله جریان سیال به صورت زیر نوشته می شود:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{0.001127 A_x K_x}{\mu B} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) \right) \Delta x = \frac{V_b}{5.615} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\Phi}{B} \right) + q_{sc} \quad (44-3)$$

که در آن پتانسیل جریان $\Phi = P - \gamma Z$ می باشد. شکل گسسته سازی شده این رابطه به صورت زیر می باشد:

$$T_{i+\frac{1}{2}} \left[(P_{i+1} - P_i) - \gamma_{i+\frac{1}{2}} (Z_{i+1} - Z_i) \right] - T_{i-\frac{1}{2}} \left[(P_i - P_{i-1}) - \gamma_{i-\frac{1}{2}} (Z_i - Z_{i-1}) \right] \\ = \frac{V_b}{5.615 \Delta t} \left[\frac{\Phi}{B} \right]_{i+1}^{n+1} - \left[\frac{\Phi}{B} \right]_i^n + q_{sci} \quad (45-3)$$

$$T_{i-\frac{1}{2}} = \frac{0.001127 A_x k_x}{\mu B \Delta x_{i-\frac{1}{2}}} \Big|_{i-\frac{1}{2}} \quad \text{و} \quad T_{i+\frac{1}{2}} = \frac{0.001127 A_x k_x}{\mu B \Delta x_{i+\frac{1}{2}}} \Big|_{i+\frac{1}{2}}$$

می باشد.



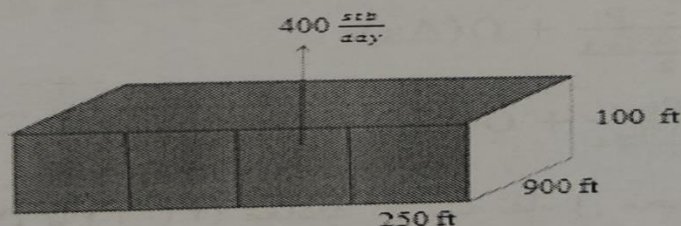
فصل سوم: شبیه سازی یک بعدی جریان سیال

فرمولاسیون صریح و ضمنی

مثال ۳-۳) برای جریان سیال در مخزن با مشخصات

$$\phi = 12\%, S_{wc} = 10\%, B = 1.1 \frac{rb}{stb}, K = 270 \text{ md}, \mu = 2 \text{ cp}$$

معادله جریان به صورت تفاضل محدود در بلوک ۳ را بنویسید



روش حل:

برای بلوک ۳ معادله جریان در فرم معادله تفاضل محدود به صورت زیر نوشته می شود:

$$T_{3+\frac{1}{2}}[(P_4 - P_3) - \gamma(Z_4 - Z_3)] - T_{3-\frac{1}{2}}[(P_3 - P_2) - \gamma(Z_3 - Z_2)]$$

$$= \frac{V_{b3}}{5.615 \Delta t} \left[\left(\frac{\phi}{B} \right)^{n+1} - \left(\frac{\phi}{B} \right)^n \right] + 400$$

با توجه به یکسان بودن مشخصات بلوکها مقادیر انتقال پذیری و حجم هر بلوک به صورت

$$V_{b3} = 900 \times 100 \times 250 = 22.5 \times 10^6 \text{ ft}^3 \text{ و } T = 0.001127 \frac{KA}{\mu B \Delta x} = 54.77 \frac{\text{stb}}{\text{D.psi}}$$

محاسبه می شوند که می تواند در رابطه معادله جریان جایگزین گردد.



فصل سوم: شبیه سازی یک بعدی جریان سیال

فرمولاسیون صریح و ضمنی

سمت راست معادله جریان رابطه ۳-۴۴ (یعنی عبارت مشتق زمانی $(\frac{V_b}{5.615} \frac{\partial}{\partial t} (\frac{\phi}{B}))$ می تواند به صورت های زیر گسسته و در نظر گرفته شود:

الف) حالت کلی برای هر نوع سیال

$$\frac{V_b}{5.615 \Delta t} \left[\left(\frac{\phi}{B} \right)_i^{n+1} - \left(\frac{\phi}{B} \right)_i^n \right] \quad (3-46)$$

ب) برای سیال کمی تراکم پذیر

$$\frac{V_b \phi (C_f + C_o)}{5.615 \Delta t B} [P_i^{n+1} - P_i^n] \quad (3-47)$$

ج) برای سیال تراکم پذیر

$$\frac{V_b}{5.615 \Delta t} \left(\frac{\phi}{B_g} \right)_i' [P_i^{n+1} - P_i^n] \quad (3-48)$$

توجه شود که در این رابطه $\left(\frac{\phi}{B_g} \right)_i' = \frac{\left(\frac{\phi}{B} \right)_i^{n+1} - \left(\frac{\phi}{B} \right)_i^n}{P_i^{n+1} - P_i^n}$ می باشد.



فصل سوم: شبیه سازی یک بعدی جریان سیال

فرمولاسیون صریح و ضمنی

نحوه به دست آوردن رابطه گسسته سازی شده معادل مشتق زمانی سمت راست معادله جریان (۳-۴۴) برای سیال کمی تراکم پذیر با به کارگیری تعاریف ضریب تراکم پذیری سنگ C_r و سیال C_f به صورت زیر می باشد:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\phi}{B} \right) = \frac{1}{\Delta t} \left[\frac{\phi}{B} \right]^{n+1} - \frac{\phi}{B} \Big|_n = \frac{1}{\Delta t} \left[\frac{\phi}{B} \right]^{n+1} - \frac{\phi}{B} \Big|_n + \frac{\phi^n}{B^{n+1}} - \frac{\phi^n}{B^{n+1}} \Big| =$$

$$\frac{1}{\Delta t} \left[\frac{\phi^{n+1} - \phi^n}{B^{n+1}} + \left(\frac{1}{B^{n+1}} - \frac{1}{B^n} \right) \phi^n \right] = \frac{1}{\Delta t} \left[\frac{\phi^o C_r}{B^{n+1}} + \frac{\phi^n C_f}{B^o} \right] (p^{n+1} - p^n)$$

(۳-۴۹)

پس از گسسته شدن عبارت سمت راست معادله جریان، معادله تفاضل محدود در حالت سیال کمی تراکم پذیر و با تراوایی بر حسب داری به شکل زیر ارائه می شود:

$$\frac{1}{\Delta x_i} \left[\frac{1.127 A_x k_x}{\mu B \Delta x_{i+\frac{1}{2}}} \Big|_{i+\frac{1}{2}} (p_{i+1} - p_i) - \frac{1.127 A_x k_x}{\mu B \Delta x_{i-\frac{1}{2}}} \Big|_{i-\frac{1}{2}} (p_i - p_{i-1}) \right] =$$

$$\frac{A_x}{5.615 \Delta t} \left[\frac{\phi^o C_r}{B^{n+1}} + \frac{\phi^n C_f}{B^o} \right] (p_i^{n+1} - p_i^n) + q_{sci}$$

(۳-۵۰)



فصل سوم: شبیه سازی یک بعدی جریان سیال

فرمولاسیون صریح و ضمنی

این معادله کلی جریان ممکن است تحت شرایط متفاوتی مانند موارد زیر، ساده تر بیان شود:

الف) فرض شود سنگ و سیال تراکم ناپذیر هستند (یعنی $c_r = c_f = 0$). در این حالت مشتق زمانی صفر و جریان پایدار است و لذا سمت راست معادله کلی (۵۰-۳) صفر می شود و تقریب تفاضل محدود حاصل، به صورت زیر ساده می گردد.

$$\frac{1}{\Delta x_i} \left[\frac{1.127 A_x k_x}{\mu B \Delta x_{i+\frac{1}{2}}} \right]_{i+\frac{1}{2}} (p_{i+1} - p_i) - \frac{1.127 A_x k_x}{\mu B \Delta x_{i-\frac{1}{2}}} \left[\right]_{i-\frac{1}{2}} (p_i - p_{i-1}) = q_{sci} \quad (51-3)$$

ب) سیال کمی تراکم پذیری را با خواص سنگ و سیال ثابت فرض کنید ($c_t = c_f + c_r$) و بلوک های یکنواخت). در این حالت تقریب تفاضل محدود به صورت زیر نوشته می شود:

$$\left[\frac{1.127 A_x k_x}{\mu B \Delta x_i} \right]_{i+\frac{1}{2}} (p_{i+1} - p_i) - \frac{1.127 A_x k_x}{\mu B \Delta x_i} \left[\right]_{i-\frac{1}{2}} (p_i - p_{i-1}) = \frac{V_{pore} c_t}{5.615 B \Delta t} (p_i^{n+1} - p_i^n) + q_{sci} \quad (52-3)$$



فصل سوم: شبیه سازی یک بعدی جریان سیال

فرمولاسیون صریح و ضمنی

ج) مخزن شیب داری را در نظر بگیرید. در این مورد باید عبارت $\frac{\partial z}{\partial x}$ را در معادله جریان گسسته سازی نمود. به عنوان نمونه، معادله تفاضل محدود حاصل برای یک مسئله جریان سیال تراکم ناپذیر در یک بعد به صورت زیر تبدیل می شود:

$$\frac{1}{\Delta x_i} \left[\frac{1.127 A_x k_x}{\mu B \Delta x_{i+\frac{1}{2}}} \bigg|_{i+\frac{1}{2}} (p_{i+1} - p_i) - \frac{1.127 A_x k_x}{\mu B \Delta x_{i-\frac{1}{2}}} \bigg|_{i-\frac{1}{2}} (p_i - p_{i-1}) \right] - \frac{1}{\Delta x_i} \left[\frac{1.127 A_x k_x \gamma}{\mu B \Delta x_{i+\frac{1}{2}}} \bigg|_{i+\frac{1}{2}} (Z_{i+1} - Z_i) - \frac{1.127 A_x k_x \gamma}{\mu B \Delta x_{i-\frac{1}{2}}} \bigg|_{i-\frac{1}{2}} (Z_i - Z_{i-1}) \right] = q_{sci}$$

(۵۳-۳)



فصل سوم: شبیه سازی یک بعدی جریان سیال

فرمولاسیون صریح و ضمنی

مثال ۳-۴) یک نمونه نفت کمی تراکم پذیر ($c_o = 5 \times 10^{-5} \text{psi}^{-1}$, $\mu = 2 \text{cp}$, $B_o = 1$) در یک مخزن همگون یک بعدی $\Delta x = 200 \text{ft}$ ، $\Delta y = 100 \text{ft}$ و $\Delta z = 100 \text{ft}$ و با $k = 100 \text{md}$, $\phi = 0.2$ در حال جریان است (تراکم پذیری سنگ قابل چشم پوشی است). حداکثر گام زمانی که پایداری روش فرمولاسیون صریح را در بر دارد، بیابید. همچنین برای به دست آوردن توزیع فشار پس از $t = 10 \text{ days}$ روش فرمولاسیون ضمنی را پیاده سازی نمایید. حل مسئله مورد نیاز است.

روش حل:

ابتدا حداکثر گام زمانی برای پایداری روش فرمولاسیون صریح به صورت زیر محاسبه می شود:



فصل سوم: شبیه سازی یک بعدی جریان سیال

فرمولاسیون صریح و ضمنی

$$\Delta t \leq \frac{\mu \phi C}{(1.127 \times 5.615) K_x} \frac{h^2}{2} = 0.63 \text{ days}$$

با شرایط داده شده مسئله، معادله تقریب تفاضل محدود از رابطه (۳-۵۲) به صورت زیر نوشته می شود:

$$\frac{1.127 A_x k_x}{\mu B \Delta x_i} [(p_{i+1} - p_i) - (p_i - p_{i-1})] = \frac{V_{\text{pore}} C_t}{5.615 B \Delta t} (p_i^{n+1} - p_i^n) + q_{\text{sci}}$$

با وارد کردن مقادیر عددی برای پارامترها، معادله جبری حاصل عبارت است از:

$$p_{i-1}^{n+1} - (2 + \frac{1.264}{\Delta t}) p_i^{n+1} + p_{i+1}^{n+1} = \frac{-1.264}{\Delta t} p_i^n$$

برای گام زمانی $\Delta t = 10 \text{ days}$ ، معادله به صورت زیر نوشته می شود:

$$p_{i-1}^{n+1} - 2.1264 p_i^{n+1} + p_{i+1}^{n+1} = -0.1264 p_i^n$$

با اعمال این معادله برای همه بلوک ها و با توجه به شرایط مرزی و شرایط اولیه جواب به دست می آید.



فصل سوم: شبیه سازی یک بعدی جریان سیال

فرمولاسیون صریح و ضمنی

تاکنون با دو روش فرمولاسیون صریح و ضمنی آشنا شدید، روش مابین این دو روش به نام روش کرنک نیکلسون^۱ است که می تواند درجه دقت جواب را بهبود بخشد (هافمن^۲). معادله جریانی $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}$ را در نظر بگیرید، تقریبی برای مشتق مکانی (سمت چپ معادله) در سطح زمانی $(n+1/2)$ با روش تفاضل مرکزی برای مشتق زمانی به صورت زیر اعمال می شود:

$$\frac{U_{i-1}^{n+1/2} - 2U_i^{n+1/2} + U_{i+1}^{n+1/2}}{h^2} = \frac{U_i^{n+1} - U_i^n}{\Delta t} \quad (54-3)$$

از آنجایی که داده های مربوط به سطح زمانی فوق $(n+1/2)$ در دسترس نیست، از میانگین مقادیر به دست آمده با روش های صریح و ضمنی بهره می بریم و لذا این روش را روش نیمه ضمنی هم می گویند.

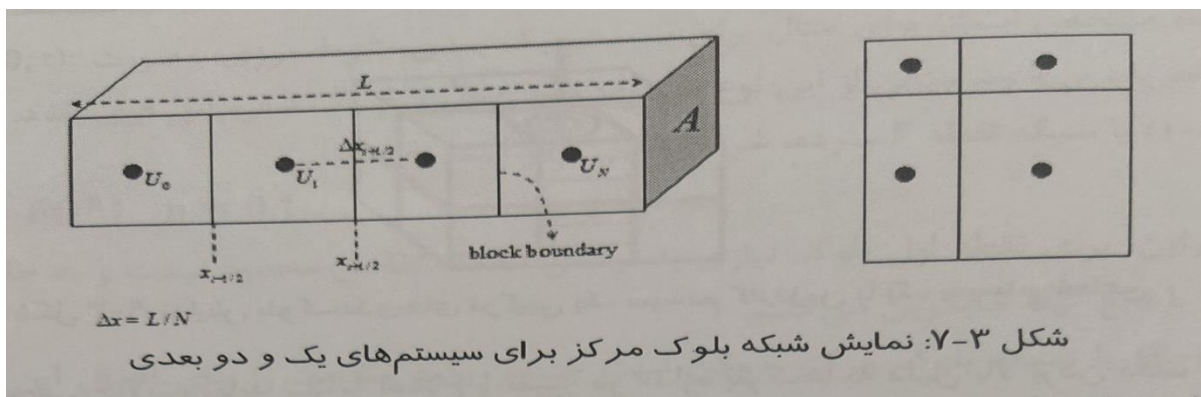
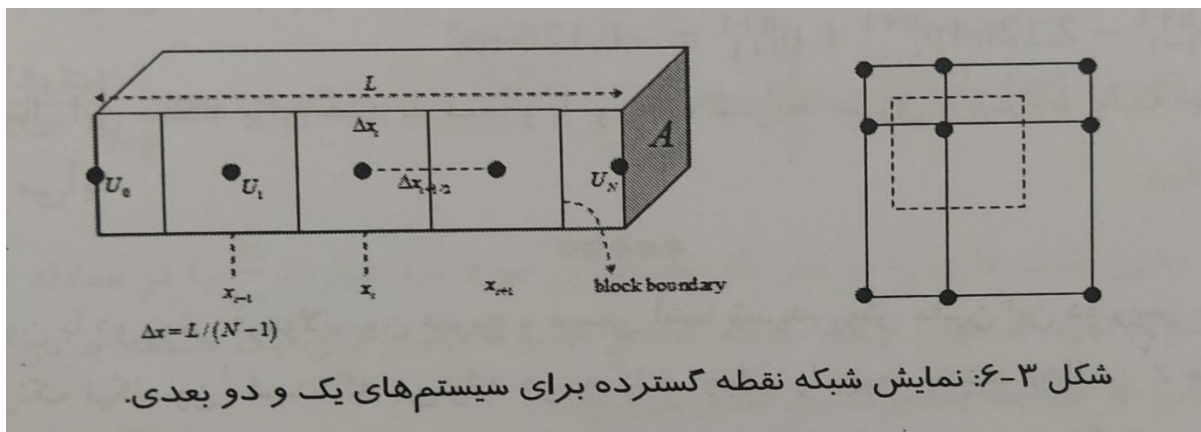
$$\frac{1}{2} \left[\frac{U_{i-1}^{n+1} - 2U_i^{n+1} + U_{i+1}^{n+1}}{h^2} + \frac{U_{i-1}^n - 2U_i^n + U_{i+1}^n}{h^2} \right] = \frac{U_i^{n+1} - U_i^n}{\Delta t}$$

$$-\alpha U_{i-1}^{n+1} + 2(\alpha + 1)U_i^{n+1} - \alpha U_{i+1}^{n+1} = \alpha U_{i-1}^n + 2(1 - \alpha)U_i^n + \alpha U_{i+1}^n \quad (55-3)$$



فصل سوم: شبیه سازی یک بعدی جریان سیال

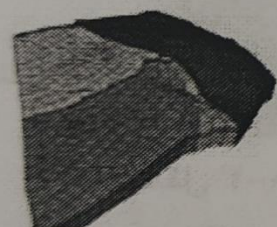
شبکه بندی و شرایط مرزی





فصل سوم: شبیه سازی یک بعدی جریان سیال

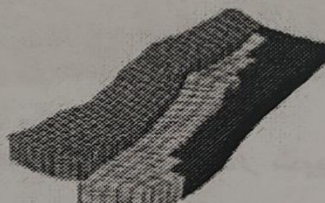
شبکه بندی و شرایط مرزی



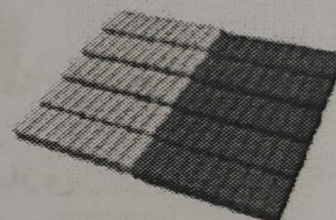
شبکه بدون ساختار



شبکه شعاعی

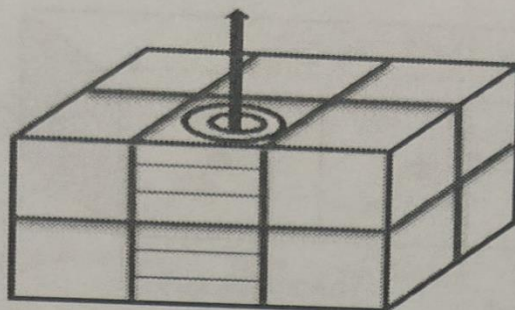


شبکه نقطه گسترده



شبکه مرکز بلوکی

شکل ۳-۸: نمایش شبکه بندی های مختلف مانند مدل شبکه بلوک مرکز، نقطه گسترده، شعاعی و بدون ساختار

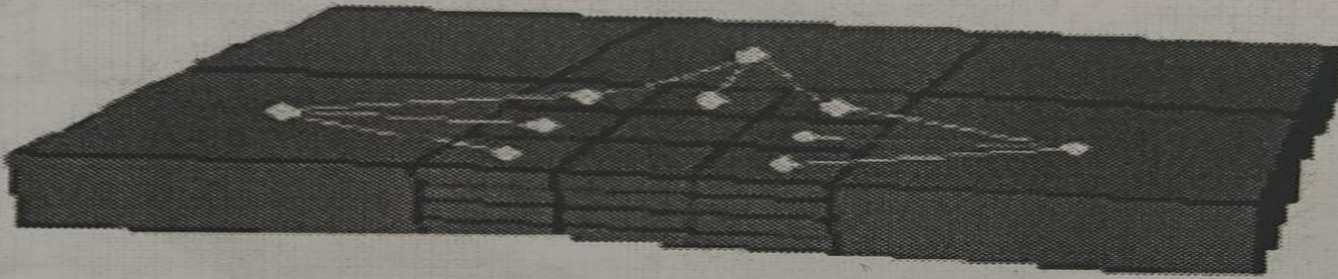


شکل ۳-۹: نمایش بلوک بندی های ترکیبی یک سیستم کارتیزین با یک سیستم شعاعی



فصل سوم: شبیه سازی یک بعدی جریان سیال

شبکه بندی و شرایط مرزی



شکل ۳-۱۰: نمایش اصلاح محلی بلوک‌ها در شبیه‌سازی

بعد از توضیح در خصوص سیستم‌های گوناگون بلوکی، باید شرایط مرزی مختلف را نیز در نظر بگیریم. ارتباط بین مخزن با ناحیه محیط اطراف آن، در قالب شرایط مرزی دیده می‌شود که نیاز به فرمولاسیون دارد. چهار نوع شرایط مرزی می‌تواند در نظر گرفته شود که عبارتند از: شرط مرزی دیریکله^۲، نیومن^۳، ترکیبی^۴ و سیکلی^۵.

الف) شرط مرزی دیریکله: مقدار متغیر U در مرز معلوم است (فشار در مرزهای مخزن

یا در چاه مشخص است) برای مثال برای سیستم یک بعدی، شرط مرزی به صورت $U(x=0, t) = f_1(t)$ تعریف می‌شود. مثالی از این نوع می‌تواند مخزن در کنار یک سفره آبی قوی باشد.



فصل سوم: شبیه سازی یک بعدی جریان سیال

شبکه بندی و شرایط مرزی

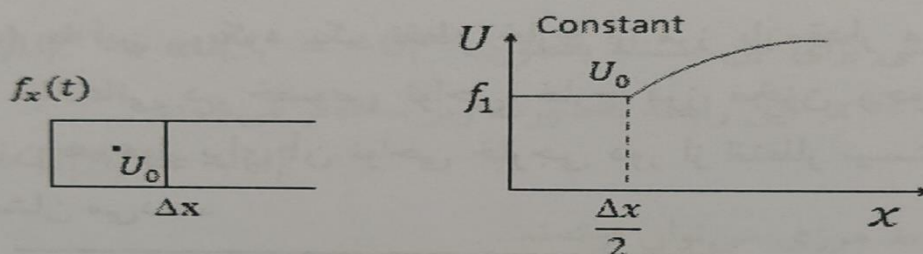
شرط مرزی دیریکله

الف-۱) با شبکه نقطه گسترده، شرط معادل برابر است با:

$$U_0^n = f_1(t^n) \quad n = 0, 1, \dots$$

بنابراین، برای نقطه اول بلوک نیازی به نوشتن معادله تفاضل محدود نیست و به جای آن $f_1(t)$ را با تابع U_0^n جایگزین می‌کنیم.

الف-۲) با شبکه بلوک مرکز، ممکن است چند رویکرد متفاوت را برای اعمال این شرط مرزی بکار برد. در روش تقریبی اول از این حقیقت که مرکز بلوک در واقع روی مرز نیست صرف‌نظر می‌شود بنابراین، می‌توان نوشت $U_0^n = f_1(t^n)$ (به شکل ۳-۱۱ توجه شود).



شکل ۳-۱۱: نمایش تصویری روش تقریبی اول برای اعمال شرط مرزی دیریکله در شبکه بلوک مرکز

روش تقریبی دوم در بکارگیری بلوک‌های کوچکتر نزدیک مرز است - یا به عبارتی بلوک ریز شده. توجه کنید که در این روش دقت بهبود می‌یابد اما مقدار محاسبات نیز به دلیل تعداد بلوک بیشتر، زیاد می‌شود.



فصل سوم: شبیه سازی یک بعدی جریان سیال

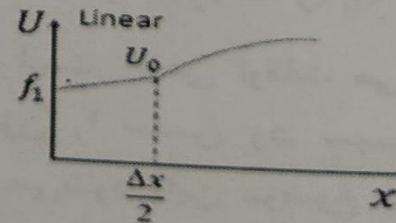
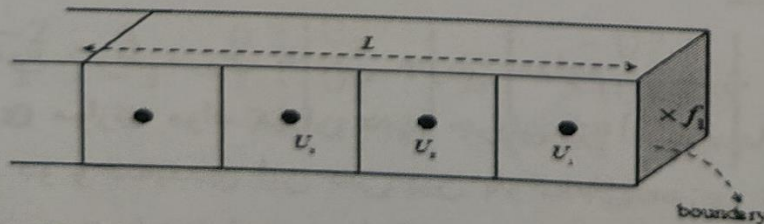
شبکه بندی و شرایط مرزی

شرط مرزی دیریکله

در روش تقریبی سوم، مرز به بیرون و جایی که تاثیر آنها هنوز محسوس نیست حرکت داده می شود. سپس با استفاده از برون یابی خطی، شرط معادل مرزی به صورت

$$\frac{1}{2}(3U_1^n - U_2^n) = f_1(t^n)$$

نوشته می شود که باید در معادلات تفاضل محدود وارد شود (عزیز و ستاری ۱۹۷۹).



شکل ۳-۱۲: نمایش تصویری روش تقریبی برون یابی برای اعمال شرط مرزی دیریکله در شبکه بلوک مرکز

در روش تقریبی چهارم، شرط مرزی در خود معادله جریان تفاضل محدود وارد می شود که البته با توجه به فاصله ها و با تغییر مقدار انتقال پذیری، معادله به صورت زیر تبدیل می شود:

$$\frac{T}{1/2}(f_1 - U_1) - T(U_1 - U_2) = \frac{Vb_1}{5.615\Delta t} \left(\left. \frac{\phi}{B} \right|_1^{n+1} - \left. \frac{\phi}{B} \right|_1^n \right) \quad (۵۶-۳)$$

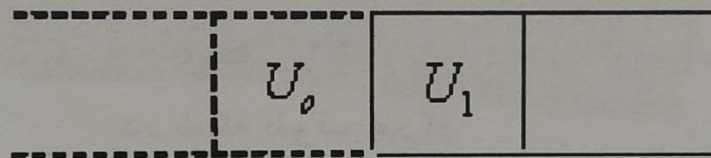


فصل سوم: شبیه سازی یک بعدی جریان سیال

شبکه بندی و شرایط مرزی

شرط مرزی نیومن

ب) شرط مرزی نیومن: با این شرط مرزی مشتق متغیر U در مرز سیستم معلوم است (از قبیل نرخ تولید یا شار آبدی معلوم در مرز مخزن)، برای مثال، فرض کنید که $\dot{U}(x=0, t) = f_2(t)$ باشد سپس تقریب مشتق را با استفاده از نقاط درونی و به صورت $f_2(t^n) = (U_2^n - U_1^n)/h$ می نویسیم. این تقریب، تقریبی ضعیف است لذا روش مرتبه دوم که روش انعکاسی^۱ خوانده شده، به کار گرفته می شود (در اینجا از بلوک انعکاسی مجاور با بلوک اصلی استفاده می شود). با این رویکرد یک نقطه خارج از مرز با مقدار مجهول U_0 فرض می شود، از آنجایی که اطلاعاتی در خصوص نواحی خارج مرز مخزن وجود ندارد بنابراین به کارگیری خواص مخزن همجوار برای آن نواحی خارجی دور از انتظار نیست. شکل (۳-۱۳) ساختار این رویکرد را نشان می دهد.



شکل ۳-۱۳: نمایش تصویری روش انعکاسی برای اعمال شرط مرزی نیومن



فصل سوم: شبیه سازی یک بعدی جریان سیال

شبکه بندی و شرایط مرزی

شرط مرزی نیومن

ب-۱) برای یک بلوک در شبکه نقطه گسترده با فرمولاسیون تفاضل مرکزی برای مشتق مکانی، می‌توانیم تقریب زیر را بنویسیم:

$$\dot{U}(x=0, t) = f_2(t^n) = (U_2^n - U_0^n)/2h \quad (3-57)$$

ب-۲) برای یک بلوک در شبکه بلوک مرکز با فرمولاسیون تفاضل پیش رو برای مشتق مکانی داریم:

$$\dot{U}(x=0, t) = f_2(t^n) = \frac{U_1^n - U_0^n}{h} \quad (3-58)$$

این نوع شرط مرزی با دبی جریان معلوم در مرز، مطابق است. گاهی اوقات می‌توان به کارگیری موازنه مواد میزان دبی جریان از آبدۀ مجاور مخزن را حدس زد. سپس برای مدل‌های دو و سه بعدی این دبی بین بلوک‌های مرزی تقسیم می‌شود (این موضوع در فصل بعدی تشریح می‌شود). از روش انعکاسی برای زمانی که جریان نداشته باشیم یا نرخ تولید ثابت

باشد هم استفاده می‌شود. در این حالت $q = 0$ و $\frac{dp}{dx} = 0$ که در نتیجه $U_1 = U_0$ و انتقال پذیری $T_{01} = 0$ می‌باشد.

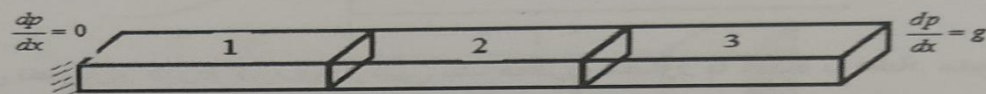


موسسه آموزش
عالی
اقبال لاهوری
مهندس حاجی قاسمی

فصل سوم: شبیه سازی یک بعدی جریان سیال

شبکه بندی و شرایط مرزی

مثال ۳-۵) معادلات تفاضل محدود را با روش فرمولاسیون ضمنی برای معادله جریان تک فاز و یک بعدی $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{\partial U}{\partial t}$ بنویسید. شرایط مرزی مسئله در شکل زیر نشان داده شده است.



روش حل:

فرمولاسیون ضمنی برای این مسئله به صورت $\alpha U_{i+1}^{n+1} - (2\alpha + 1)U_i^{n+1} + \alpha U_{i-1}^{n+1} = -U_i^n$ می باشد با فرض $\alpha = 1$ این رابطه به صورت زیر ساده تر می شود:

$$U_{i-1}^{n+1} - 3U_i^{n+1} + U_{i+1}^{n+1} = -U_i^n$$

با توجه به شرایط مرزی می توان نوشت:

$$\frac{\partial p}{\partial x}|_{x=0} = \frac{U_1 - U_0}{h} = 0 \Rightarrow U_1 = U_0$$

$$\frac{\partial p}{\partial x}|_{x=1} = \frac{U_4 - U_3}{h} = g \Rightarrow U_4 = U_3 + gh$$

پس از اعمال این شرایط برای بلوک ها، سری معادلات حاصل می توانند به شکل زیر نوشته

شوند:

$$\begin{cases} -2U_1^{n+1} + U_2^{n+1} + (0)U_3^{n+1} = -U_1^n \\ U_1^{n+1} - 3U_2^{n+1} + U_3^{n+1} = -U_2^n \\ (0)U_1^{n+1} + U_2^{n+1} - 2U_3^{n+1} = -U_3^n - gh \end{cases}$$

به شکل ماتریس این معادلات به صورت زیر خلاصه می شود. سپس با حل معادلات می توان

مقادیر فشارها را به دست آورد.

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1^{n+1} \\ U_2^{n+1} \\ U_3^{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -U_1^n \\ -U_2^n \\ -U_3^n - gh \end{bmatrix}$$



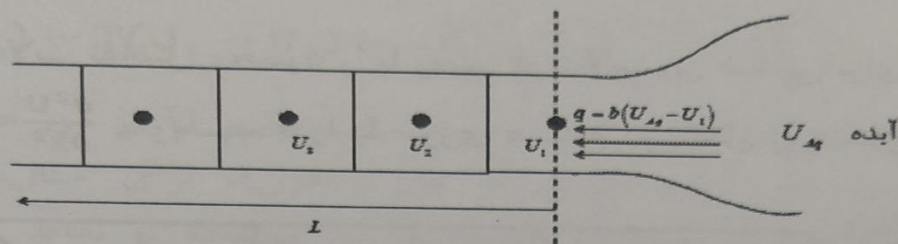
فصل سوم: شبیه سازی یک بعدی جریان سیال

شبکه بندی و شرایط مرزی

شرط مرزی ترکیبی

ج) شرط مرزی ترکیبی: این شرط مرزی، ترکیبی از شرایط مرزی دیریکله و نیومن است. برای مثال شرط مرزی $f_3(t) = a\bar{U} + bU$ را می توان نام برد. این شرط ممکن است یک

مخزن را توضیح دهد که با شار آب از آبدۀ مجاور با فشار متوسط U_{Aq} مواجه باشد $(a\bar{U} + bU = bU_{Aq})$ در این حالت تا حدی فشار مخزن توسط آبدۀ تأمین می شود.



شکل ۳-۱۴: نمایش تصویری شرط مرزی ترکیبی یک مخزن مجاور با آبدۀ با فشار متوسط U_{Aq}

ج-۱) برای بلوک در شبکه نقطه گسترده، با استفاده از روش انعکاسی، معادله تقریب تفاضلی به صورت زیر تبدیل می شود:

$$a \left(\frac{U_2^n - U_{Aq}^n}{2h} \right) + bU_1^n = bU_{Aq}^n \quad (۵۹-۳)$$

ج-۲) برای شبکه بلوک مرکز به دلیل مشکل بودن تقریب زدن عبارت bU ، معادلات حاصل پیچیده تر می شوند.



فصل سوم: شبیه سازی یک بعدی جریان سیال

شبکه بندی و شرایط مرزی

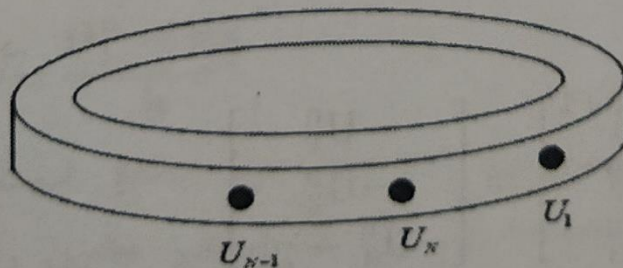
شرط مرزی سیکلی

(د) شرط مرزی سیکلی^۱: این شرط مرزی مناسب با مخزن با مختصات استوانه‌ای است. برای مثال، جریان چرخشی در جهت θ (شکل ۳-۱۵) را در نظر بگیرید. پیوستگی فشار و معادله جریان باعث ایجاد شرایط مرزی زیر می‌شوند:

$$U(x = 0, t) = U(x = L, t) \quad (۳-۶۰ \text{ الف})$$

$$\dot{U}(x = 0, t) = \dot{U}(x = L, t) \quad (۳-۶۰ \text{ ب})$$

در این مدل فشار مرز بین بلوک اول و آخر برابر می‌شود چرا که در کنار هم قرار می‌گیرند. نتیجه این شرط این است که ماتریس ضرایب کمی تغییر می‌کند.



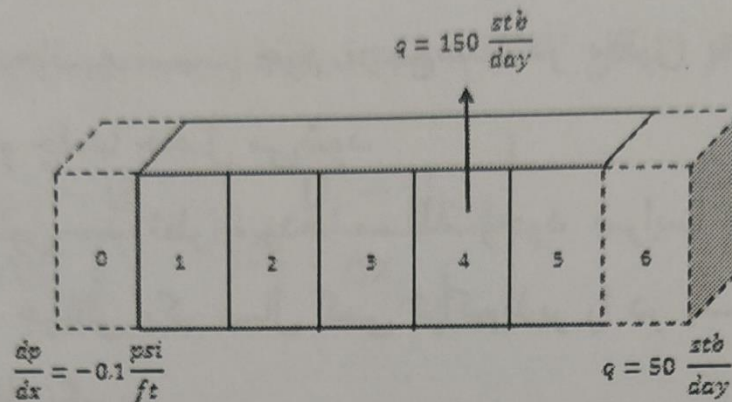
شکل ۳-۱۵: نمایش شرایط مرزی سیکلی در مخزن با مختصات استوانه‌ای



فصل سوم: شبیه سازی یک بعدی جریان سیال

شبکه بندی و شرایط مرزی

مثال ۳-۶ جریان یک فازی در یک مخزن یک بعدی به ابعاد $\Delta x = 1000ft$ ، $\Delta y = 1200ft$ ، $\Delta z = 75ft$ با شرایط مرزی در شکل زیر در حال حرکت به سمت چاه تولیدی واقع در بلوک ۴ را در نظر بگیرید. سایر اطلاعات موجود شامل $k = 15md$ ، $\phi = 0.18$ ، $B = 1^{rb}/_{STB}$ ، $\mu = 10cp$ می باشد. معادله جریان تفاضل محدود برای بلوک ۱ و بلوک ۵ را بنویسید و شرایط مرزی را اعمال نمایید.





فصل سوم: شبیه سازی یک بعدی جریان سیال

شبکه بندی و شرایط مرزی

روش حل: معادله جریان برای یک مخزن افقی به صورت زیر نوشته می شود.

$$T_{i+\frac{1}{2}}[(P_{i+1} - P_i)] - T_{i-\frac{1}{2}}[(P_i - P_{i-1})] = \frac{V_b}{5.615 \Delta t} \left[\left| \frac{\phi}{B} \right|_i^{n+1} - \left| \frac{\phi}{B} \right|_i^n \right] + q_{sci}$$

مقادیر عبارت انتقال پذیری و حجم توده سیال به صورت زیر محاسبه می شود:

$$T = 0.001127 \frac{KA}{\mu B \Delta x} = 0.1521 \frac{\text{stb}}{D. \text{psi}}$$

$$V_B = 90 \times 10^6 \text{ft}^3$$

برای اعمال شرایط مرزی بلوک های اول و آخر از روش انعکاسی (بلوک های انعکاسی ۰ و ۶) استفاده می شود.

معادله بلوک ۱:

$$0.1521[(P_2 - P_1) - (P_1 - P_0)] = \frac{90 \times 10^6}{5.615 \times \Delta t} \left[\left| \frac{\phi}{B} \right|_1^{n+1} - \left| \frac{\phi}{B} \right|_1^n \right]$$

توجه شود که شرط مرزی بلوک اول به صورت $\frac{p_1 - p_0}{\Delta x} = -0.1$ بوده که از این رابطه $p_1 - p_0 = -100$ حاصل می شود.

معادله بلوک ۵:

$$0.1521[(P_6 - P_5) - (P_5 - P_4)] = \frac{90 \times 10^6}{5.615 \times \Delta t} \left[\left| \frac{\phi}{B} \right|_5^{n+1} - \left| \frac{\phi}{B} \right|_5^n \right]$$

توجه شود که شرط مرزی بلوک ۵ به صورت زیر اعمال می شود:

$$0.001127 \frac{KA}{\mu B} \frac{P_6 - P_5}{\Delta x} = 0.1521(P_6 - P_5) = 50$$



فصل سوم: شبیه سازی یک بعدی جریان سیال

سایر موارد

مورد دیگری که تاکنون مد نظر نبوده، مسئله وجود ضرایب متغیر و شبکه بلوک غیریکنواخت است. معادله جریانی یک سیال کمی تراکم‌پذیر را در یک مخزن افقی یک‌بعدی در مختصات کارتیزین در نظر بگیرید.

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{k(x)}{B\mu(p)} \frac{\partial p}{\partial x} \right] = \left(\phi(x) \frac{c_f}{B^0} + \phi^0 \frac{c_R}{B(p)} \right) \frac{\partial p}{\partial t} + q(x, p) \quad (۶۱-۳)$$

در اینجا عبارت تحرک پذیری را به صورت $\lambda(x, U) = \frac{k(x)}{B\mu(U)}$ تعریف کرده و عبارات مربوط به تراکم‌پذیری‌ها به صورت زیر تجمیع و تعریف می‌شود:

$$c(x, U) = \phi(U) \frac{c_f}{B^0} + \phi^0 \frac{c_R}{B(U)} \quad (۶۲-۳)$$

با به کارگیری این تعریف‌ها بنابراین عملگری^۳ که معادله جریان را معین می‌کند، عبارت است از:

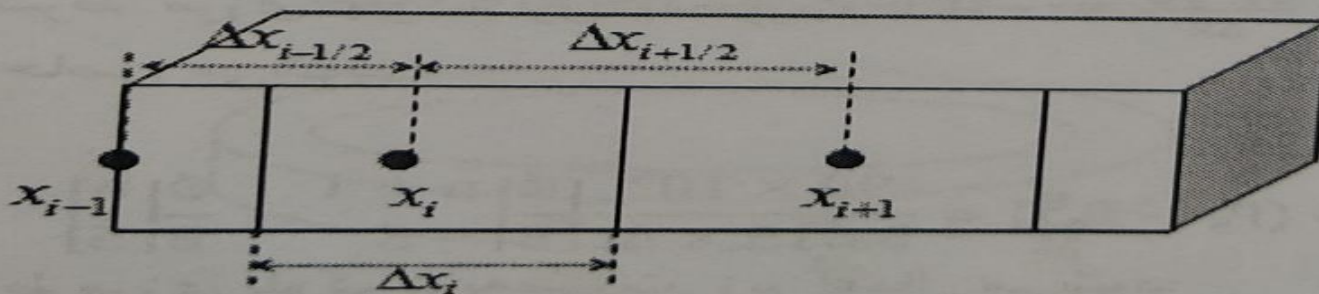
$$LU = \frac{\partial}{\partial x} \left[\lambda(x, U) \frac{\partial U}{\partial x} \right] - c(x, U) \frac{\partial U}{\partial t} - q(x, U) \quad (۶۳-۳)$$

حال این شرایط را می‌توان برای دو نوع شبکه بلوک اعمال نمود. ابتدا این را برای شبکه بلوک غیریکنواخت در شبکه نقطه گسترده به کار می‌بریم (شکل ۳-۱۶).



فصل سوم: شبیه سازی یک بعدی جریان سیال

سایر موارد



شکل ۳-۱۶: شبکه بلوک غیریکنواخت نقطه گسترده

تقریب تفاضل محدود زمانی که فواصل یکی نیستند به صورت زیر نوشته می شود:

$$L_2 U_i = \frac{1}{\frac{\Delta x_{i-\frac{1}{2}} + \Delta x_{i+\frac{1}{2}}}{2}} \left[\lambda_{i+\frac{1}{2}} \frac{U_{i+1} - U_i}{\Delta x_{i+\frac{1}{2}}} - \lambda_{i-\frac{1}{2}} \frac{U_i - U_{i-1}}{\Delta x_{i-\frac{1}{2}}} \right], \quad (۶۴-۳)$$

که در این جا $\lambda_{i\pm\frac{1}{2}} = \frac{\lambda_i + \lambda_{i\pm 1}}{2}$ و $\Delta x_i = \frac{\Delta x_{i-\frac{1}{2}} + \Delta x_{i+\frac{1}{2}}}{2}$ می باشد.

برای شبکه بلوک مرکز (شکل ۳-۱۷)، تقریب تفاضل محدود این گونه نوشته می شود:

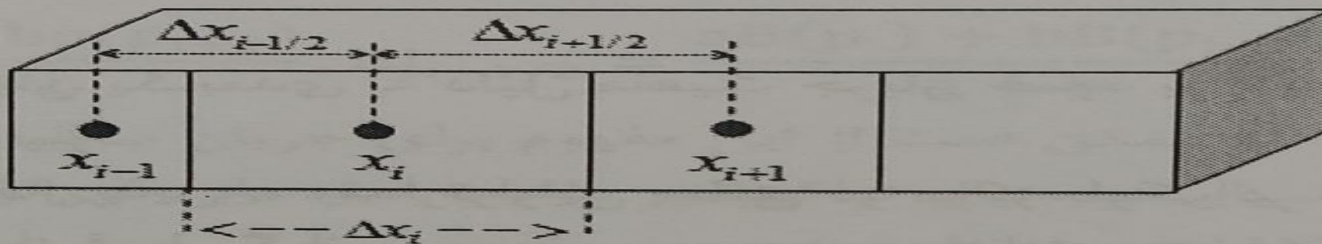
$$L_1 U_i = \frac{1}{\Delta x_i} \left[\lambda_{i+\frac{1}{2}} \frac{U_{i+1} - U_i}{\Delta x_{i+\frac{1}{2}}} - \lambda_{i-\frac{1}{2}} \frac{U_i - U_{i-1}}{\Delta x_{i-\frac{1}{2}}} \right] \quad (۶۵-۳)$$

که در ان $\lambda_{i\pm\frac{1}{2}} = \frac{\lambda_i + \lambda_{i\pm 1}}{2}$ و $\Delta x_i = \frac{\Delta x_i + \Delta x_{i+1}}{2}$ می باشد.



فصل سوم: شبیه سازی یک بعدی جریان سیال

سایر موارد



شکل ۳-۱۷: شبکه غیریکنواخت در شبکه بلوک مرکز

$$T = \frac{A_x k_x}{\mu B \Delta x} = \frac{1}{\mu(p) B(p)} \times \frac{A_x k_x}{\Delta x} \quad (3-66)$$

یک روش ساده متوسط گیری برای جریان عمود بر بلوک‌ها در یک بعد، به کارگیری متوسط هارمونیک^۱ است، تعریف این روش به صورت زیر می باشد:

$$\lambda_{i+\frac{1}{2}} = \frac{\delta_i + \delta_{i+1}}{\frac{\delta_i}{\lambda_i} + \frac{\delta_{i+1}}{\lambda_{i+1}}} \quad (3-67)$$



فصل سوم: شبیه سازی یک بعدی جریان سیال

سایر موارد

روش‌های دیگر متوسط گیری از قبیل متوسط حسابی^۲ (برای مخزن لایه‌ای و جریان به موازات لایه‌ها) و متوسط هندسی^۳ (برای مخزن با ساختار ناشناخته تصادفی یا پیچیده) نیز وجود دارند. تعریف روش متوسط حسابی وزنی به صورت:

$$\lambda_{i+\frac{1}{2}} = \frac{\delta_i \lambda_i + \delta_{i+1} \lambda_{i+1}}{\delta_i + \delta_{i+1}} \quad (۶۸-۳)$$

و متوسط هندسی به صورت:

$$\lambda_{i+\frac{1}{2}} = \sqrt{\lambda_i \lambda_{i+1}} \quad (۶۹-۳)$$

می‌باشد. معمولاً در جریان یک‌بعدی به دلیل ماهیت جریان عمود بر لایه‌ها از روش متوسط هارمونیک می‌توان استفاده نمود.

بطور مشابه، مقادیر تراکم‌پذیری مربوط به عبارت q_i و c_i به صورت مقدار میانگین و از طریق زیر لحاظ می‌شوند.

$$c_i V_i = \int_{\Delta x_i} A c(x) dx \quad (۷۰-۳)$$

$$q_i V_i = \int_{\Delta x_i} A q(x) dx \quad (۷۱-۳)$$



فصل سوم: شبیه سازی یک بعدی جریان سیال

سایر موارد

حال در اینجا فرمولاسیون روش ضمنی را برای معادله جریان تک فاز و یک بعدی آن هم در مختصات کارتزین به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$\frac{Ak_x}{\mu B} \Big|_{i+1/2}^n \left(\frac{p_{i+1}^{n+1} - p_i^{n+1}}{\Delta x_{i+1/2}} \right) - \frac{Ak_x}{\mu B} \Big|_{i-1/2}^n \left(\frac{p_i^{n+1} - p_{i-1}^{n+1}}{\Delta x_{i-1/2}} \right) = \left(\frac{A\phi c \Delta x}{B^0} \right)_i \frac{p_i^{n+1} - p_i^n}{\Delta t} + q_i \quad (72-3)$$

$$\mu B \Big|_{i+1/2} = \mu \Big|_{p_{int} = \frac{p_{i+1} + p_i}{2}} B \Big|_{p_{int} = \frac{p_{i+1} + p_i}{2}} \quad (73-3)$$

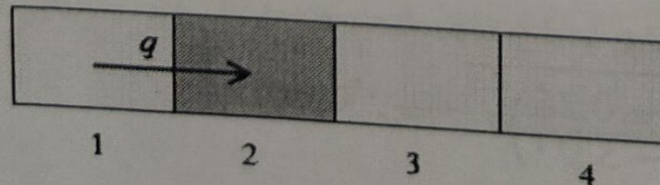
$$\mu \Big|_{i\pm 1/2} = \frac{a\mu(p_i) + b\mu(p_{i\pm 1})}{a + b}, B \Big|_{i\pm 1/2} = \frac{aB(p_i) + bB(p_{i\pm 1})}{a + b}$$



فصل سوم: شبیه سازی یک بعدی جریان سیال

سایر موارد

مثال ۳-۷) یک مخزن یک بعدی با بلوک بندی شکل زیر و دارای یک چاه تزریقی در بلوک ۱ را در نظر بگیرید. معادله حاکم بر جریان نفت در این سیستم به صورت $-qf_o = ds_o/dt$ نوشته می شود که در آن $q = 100 \text{ bbl/d}$ دبی جریان سیال خارج شده از بلوک ۱ و عبارت f_o کسری از نفت جریان یافته به خارج از همان بلوک است. حجم فضای حفره های بلوک ۱ مقدار $v_p = 10000 \text{ bbl}$ و اشباع آب اولیه $S_{wi} = 0.25$ و رابطه کسر جریان نفت به صورت $\frac{1}{f_o} = \left[\frac{S_w - 0.25}{0.75 - S_w} \right]^{2.5} + 1$ می باشد. با استفاده از فرمولاسیون صریح، نیمه-ضمنی و کاملاً ضمنی و با در نظر گرفتن روش های متوسط وزنی بالادستی برای خواص سنگ و سیال در فصل مشترک بین دو بلوک ۱ و ۲، مقادیر اشباع آب در بلوک ۱ بعد از گذشت ۵۰ روز تزریق و با گام های زمانی $\Delta t = 0.1, 1, 10, 25, 50$ روز را محاسبه کنید.





فصل سوم: شبیه سازی یک بعدی جریان سیال

سایر موارد

روش حل:

ابتدا فرمولاسیون روش صریح در نظر گرفته می شود و مشتق زمانی ds_o/dt به صورت زیر گسسته سازی و با توجه به اینکه مجموع اشباع آب و نفت یک می باشد از اشباع آب استفاده می گردد.

$$-qf_o^n = \frac{S_o^{n+1} - S_o^n}{\Delta t} = -\frac{S_w^{n+1} - S_w^n}{\Delta t}$$

با جایگذاری کسر جریانی نفت $f_o^n = \frac{1}{1 + \left(\frac{S_w^n - 0.25}{0.75 - S_w^n}\right)^{2.5}}$ در معادله فوق و نوشتن رابطه

براساس اشباع آب در گام زمانی جدید رابطه زیر حاصل می گردد:

$$S_w^{n+1} = S_w^n + \frac{q \cdot \Delta t}{1 + \left(\frac{S_w^n - 0.25}{0.75 - S_w^n}\right)^{2.5}}$$

حال با به کارگیری این رابطه مقادیر اشباع آب و نفت با استفاده از گام های زمانی متفاوت خواسته شده قابل محاسبه می گردد که خلاصه برخی نتایج در جداول زیر آورده شده اند.



فصل سوم: شبیه سازی یک بعدی جریان سیال

سایر موارد

گام زمانی ۰/۱ روز

n	Time(day)	Sw	So
0	0	0.2500	0.7500
1	0.1	0.2510	0.7490
.	.	.	.
499	49.9	0.5656	0.4344
500	50	0.5658	0.4342

گام زمانی ۱ روز

n	Time(day)	Sw	So
0	0	0.2500	0.7500
1	1	0.2600	0.7400
.	.	.	.
49	49	0.5652	0.4348
50	50	0.5673	0.4327

گام زمانی ۲۵ روز

n	Time(day)	Sw	So
0	0	0.2500	0.7500
1	25	0.5000	0.5000
2	50	0.6250	0.3750

گام زمانی ۵۰ روز

n	Time(day)	Sw	So
0	0	0.2500	0.7500
1	50	0.7500	0.2500



فصل سوم: شبیه سازی یک بعدی جریان سیال

سایر موارد

در بخش دوم برای فرمولاسیون ضمنی، معادله تفاضل محدود جریان به صورت زیر نوشته می شود:

$$S_w^{n+1} = S_w^n + \frac{q \cdot \Delta t}{1 + \left(\frac{S_w^{n+1} - 0.25}{0.75 - S_w^{n+1}} \right)^{2.5}}$$

از آنجایی که عبارت اشباع آب در سمت راست معادله نیز وجود دارد بنابراین برای حل این معادله، به حدس اولیه ای برای اشباع آب نیاز است تا به کمک آن اشباع آب از معادله فوق قابل محاسبه باشد. سپس مقادیر محاسبه شده با مقدار حدس زده شده اولیه مقایسه و در صورت مناسب بودن این کار ادامه داده می شود. نتایج محاسبات اشباع آب و نفت با استفاده از گام های زمانی متفاوت خواسته شده در مسئله در جداول زیر آورده شده اند.



فصل سوم: شبیه سازی یک بعدی جریان سیال

سایر موارد

گام زمانی ۱ روز			
n	Time(day)	Sw	So
0	0	0.2500	0.7500
1	1	0.2600	0.7400
.	.	.	.
49	49	0.5652	0.4348
50	50	0.5673	0.4327

گام زمانی ۱۰ روز			
n	Time(day)	Sw	So
0	0	0.2500	0.7500
1	10	0.3472	0.6528
.	.	.	.
4	40	0.5238	0.4762
5	50	0.5503	0.4497

گام زمانی ۲۵ روز			
n	Time(day)	Sw	So
0	0	0.2500	0.75
1	25	0.4416	0.5584
2	50	0.5300	0.4700

گام زمانی ۵۰ روز			
n	Time(day)	Sw	So
0	0	0.2500	0.7500
1	50	0.5000	0.5000

تمرین: مثال بالا را با روش نیمه ضمنی حل کنید.

در فرمولاسیون روش نیمه-ضمنی (یا روش کرانک-نیکلسون)، معادله تفاضل محدود جریان به صورت زیر توسعه داده می شود:

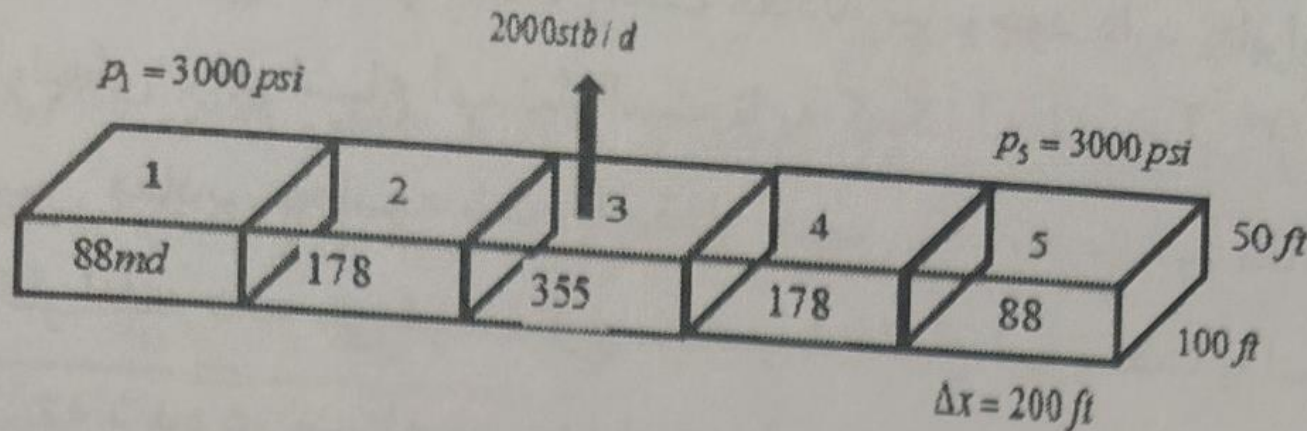
$$S_w^{n+1} = S_w^n + \frac{0.5(q \cdot \Delta t)}{1 + \left(\frac{S_w^n - 0.25}{0.75 - S_w^n} \right)^{2.5}} + \frac{0.5(q \cdot \Delta t)}{1 + \left(\frac{S_w^{n+1} - 0.25}{0.75 - S_w^{n+1}} \right)^{2.5}}$$



فصل سوم: شبیه سازی یک بعدی جریان سیال

سایر موارد

مثال ۳-۸) جریان تک فازی سیال تراکم ناپذیر با گرانیوی ۱ سانتی پواز و $B = 0.8874 \frac{rb}{STB}$ در یک مخزن افقی با توزیع تراوایی نشان داده شده در شکل زیر و سایر اطلاعات آورده شده را در نظر بگیرید. توزیع فشار را در این مخزن تعیین کنید.





فصل سوم: شبیه سازی یک بعدی جریان سیال

سایر موارد

روش حل:

از آنجایی که در جریان تک فازی سیال تراکم ناپذیر عبارت وابسته به زمان حذف می شود بنابراین معادله تفاضل محدود به صورت ساده زیر نوشته می شود.

$$T_{x_{i-\frac{1}{2}}} P_{i-1} - \left(T_{x_{i-\frac{1}{2}}} + T_{x_{i+\frac{1}{2}}} \right) P_i + T_{x_{i+\frac{1}{2}}} P_{i+1} = q_i$$

که در آن عبارت انتقال پذیری به صورت زیر محاسبه می شود.

$$T_{x_{i\pm\frac{1}{2}}} = 1.127 \frac{A_x k_x}{\mu B \Delta x} |_{i\pm\frac{1}{2}} = 1.127 \frac{A_x}{\mu B \Delta x} \cdot k_{xi\pm\frac{1}{2}} = 31.75 k_{xi\pm\frac{1}{2}} \frac{\text{stb}}{\text{d. psi}}$$

این رابطه نشان می دهد که برای محاسبه عبارت انتقال پذیری نیاز به محاسبه تراوایی در فصل مشترک دو بلوک مجاور است. برای این کار می توان از روش متوسط هارمونیک استفاده کرد. بنابراین تراوایی در فصل مشترک بلوک ها به صورت زیر تعیین می شود. برای فصل مشترک دو بلوک ۱ و ۲ یا دو بلوک ۴ و ۵ تراوایی از رابطه:

$$\frac{2}{k_{x1+1/2}} = \frac{1}{88} + \frac{1}{178}$$



فصل سوم: شبیه سازی یک بعدی جریان سیال

سایر موارد

محاسبه می شود که پس از محاسبه مقادیر $k_{x1+\frac{1}{2}} = k_{x4+\frac{1}{2}} = 118md$ به دست می آید. همچنین برای فصل مشترک دو بلوک ۲ و ۳ یا دو بلوک ۳ و ۴ تراوایی به مقدار $k_{x2+\frac{1}{2}} = k_{x3+\frac{1}{2}} = 237md$ محاسبه می شود. پس از محاسبه مقادیر تراوایی، مقادیر انتقال پذیری ها در فصل مشترک بلوک ها قابل محاسبه می باشد به طور مثال، برای فصل مشترک دو بلوک ۲ و ۳ یا دو بلوک ۳ و ۴ مقدار انتقال پذیری برابر $T_{x2+1/2} = T_{x3+1/2} = 7.53 \frac{stb}{d.psi}$ می باشد.

از آنجایی که فشار در بلوک های اول و پنجم معلوم است و به دلیل تقارن در مسئله، تنها نیاز به پیدا کردن فشار بلوک های دوم و سوم می باشد. با حل معادله تفاضل محدود برای بلوک های سوم و دوم مقادیر فشارها در این دو بلوک برابر $p_2 = 2699psi$, $p_3 = 2549psi$ حاصل می شود. در انتها اشاره به این نکته مفید است که با محاسبه میزان تبادل جریان بین بلوک اول و دوم $T_{x1+\frac{1}{2}}(p_1 - p_2) = 1128.7$ یا بین بلوک دوم و سوم $T_{x2+\frac{1}{2}}(p_2 - p_3) = 1129.5$ و مقایسه آنها با دبی چاه، صحت فرمولاسیون بررسی شده که به این فرآیند کنترل موازنه جرم

در مخزن گفته می شود.

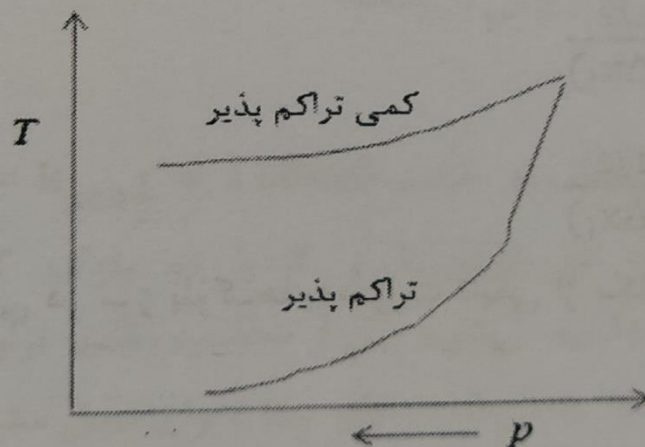


فصل سوم: شبیه سازی یک بعدی جریان سیال

اثرات غیرخطی در معادلات جریان

$$T_{i+\frac{1}{2}}(P_{i+1}^{n+1} - P_i^{n+1}) - T_{i-\frac{1}{2}}(P_i^{n+1} - P_{i-1}^{n+1}) = \frac{V_b}{5.615 \Delta t} \left[\left. \frac{\phi}{B} \right|_i^{n+1} - \left. \frac{\phi}{B} \right|_i^n \right] + q_{sci}$$

(۷۴-۳)



شکل ۳-۱۸: تغییرات مقدار انتقال پذیری بین دو بلوک مجاور به صورت تابعی از فشار برای سیالات از نوع تراکم پذیر و کمى تراکم پذیر



فصل سوم: شبیه سازی یک بعدی جریان سیال

اثرات غیرخطی در معادلات جریان

مثال ۳-۱۰) برای ارزیابی تغییر مقدار انتقال پذیری بین دو بلوک مجاور در اثر خصوصیات سیال دو حالت زیر را در نظر بگیرید:

	جریان گاز		جریان نفت	
	1	2	1	2
شماره بلوک				
فشار (Psi)	2014.7	1614.7	2014.7	1614.7
تراکم پذیری z	0.838	0.853	-	-
گرانروی μ (cp)	0.0156	0.0145	3	3
C_o (1/psi)	-	-	0.0000016	-

سایر داده های این مثال عبارتند از:

$$\gamma_g = 0.61, B_o(p_b = 1014.7) = 1.22, T = 580R, T_{sc} = 520R,$$

$$p_{sc} = 14.7\text{psia}, k = 4.2\text{md}, \Delta x = \Delta y = 100\text{ft}, \Delta z = 10\text{ft}$$

تغییرات مقدار انتقال پذیری بین دو بلوک در دو جریان نفت و گاز را محاسبه و مقایسه کنید.



فصل سوم: شبیه سازی یک بعدی جریان سیال

اثرات غیرخطی در معادلات جریان

در ابتدا جریان مایع در مخزن بین دو بلوک ۱ و ۲ را در نظر بگیرید. ضریب حجمی به صورت $B_o = B_{ob} \exp(-c_o(p - p_b))$ نوشته می شود. برای دو بلوک مجاور به ترتیب $B_{o1} = 1.218 \frac{\text{bbl}}{\text{stb}}$ و $B_{o2} = 1.219 \frac{\text{bbl}}{\text{stb}}$ می باشد. بنابراین مقدار عددی انتقال پذیری این دو بلوک به صورت زیر محاسبه می شوند:

$$T_{o1} = 1.127 \frac{A_x k_x}{\mu_{o1} B_{o1} \Delta x} = 0.01295 \frac{\text{stb}}{\text{D. psi}}$$

$$T_{o2} = 1.127 \frac{A_x k_x}{\mu_{o2} B_{o2} \Delta x} = 0.012943 \frac{\text{stb}}{\text{D. psi}}$$

با مقایسه این دو مقدار تغییرات انتقال پذیری بین دو بلوک به صورت $\frac{\Delta T_o}{T_o} = 0.05\%$ محاسبه می گردد که مقدار ناچیزی است. به طور مشابه برای جریان گاز نیز می توان این بررسی را انجام داد. مقدار ضریب حجمی گاز از رابطه $B_g = 0.00503 \frac{Z_g T_g}{P_g}$ محاسبه می شود که برای بلوک اول $B_{g1} = 0.001213 \frac{\text{bbl}}{\text{scf}}$ و برای بلوک دوم $B_{g2} = 0.00154 \frac{\text{bbl}}{\text{scf}}$ می باشد. لذا مقدار عددی انتقال پذیری این دو بلوک به صورت زیر محاسبه می شوند:

$$T_{g1} = 1.127 \frac{A_x k_x}{\mu_{g1} B_{g1} \Delta x} = 2501.4 \frac{\text{stb}}{\text{D. psi}}$$

$$T_{g2} = 1.127 \frac{A_x k_x}{\mu_{g2} B_{g2} \Delta x} = 2118.3 \frac{\text{stb}}{\text{D. psi}}$$

با مقایسه این دو مقدار تغییرات انتقال پذیری بین دو بلوک به صورت $\frac{\Delta T_g}{T_g} = 15.3\%$ می باشد که مقدار قابل توجهی است.



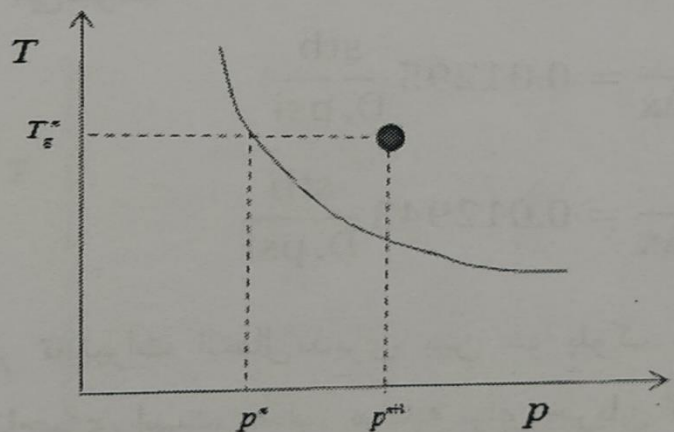
فصل سوم: شبیه سازی یک بعدی جریان سیال

خطی سازی عبارت انتقال پذیری در معادله جریان

الف) رویکرد صریح: در این حالت عبارت انتقال پذیری در فصل مشترک در سطح زمانی قدیم ارزیابی می شود (شکل ۳-۱۹). از لحاظ ریاضی این رویکرد به صورت زیر نوشته می شود:

$$T_{i+1/2}^{n+1} \approx T_{i+1/2}^n = 1.127 \left(\frac{A_x k_x}{\Delta x} \right)_{i+1/2} \left(\frac{1}{\mu_g B_g} \right)_{i+1/2} \quad (3-75)$$

که در این رابطه می توان از میانگین هارمونیک برای مقادیر تراوایی در فصل مشترک دو بلوک استفاده نمود.



شکل ۳-۱۹: نمایش استفاده از رویکرد صریح برای مواجهه با ماهیت غیرخطی عبارت انتقال پذیری



فصل سوم: شبیه سازی یک بعدی جریان سیال

خطی سازی عبارت انتقال پذیری در معادله جریان

$$\begin{aligned}
 & T_{i+\frac{1}{2}}^n \left[\left(P_{i+1}^{(v+1)} - P_i^{(v+1)} \right) - \gamma_{i+\frac{1}{2}}^n (Z_{i+1} - Z_i) \right] \\
 & - T_{i-\frac{1}{2}}^n \left[\left(P_i^{(v+1)} - P_{i-1}^{(v+1)} \right) - \gamma_{i-\frac{1}{2}}^n (Z_i - Z_{i-1}) \right] \\
 & = \frac{V_{bi}}{5.615 \Delta t} \left(\frac{\partial}{\partial B} \right)'_i \left(P_i^{(v+1)} - P_i^n \right) + q_i^{(n)}
 \end{aligned}$$

(۷۶-۳)

که در این رابطه مشتق $\left(\frac{\partial}{\partial B} \right)'_i$ به صورت $\frac{\left(\frac{\partial}{\partial B} \right)^{(v)} - \left(\frac{\partial}{\partial B} \right)^{(n)}}{P_i^{(v)} - P_i^{(n)}}$ لحاظ می گردد و در آن نیاز به روش تکرار می باشد.

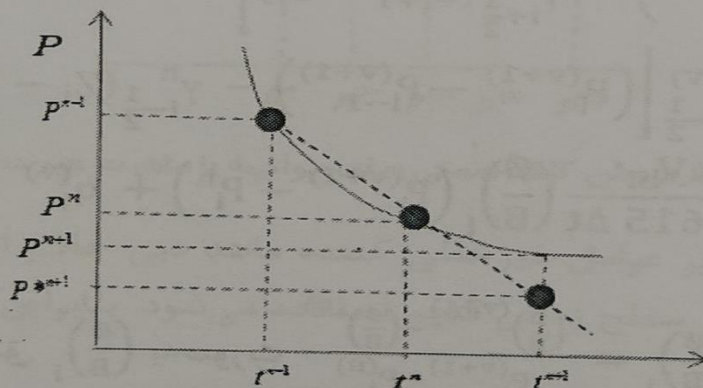


فصل سوم: شبیه سازی یک بعدی جریان سیال

خطی سازی عبارت انتقال پذیری در معادله جریان

(ب) روش برونابی^۱: در این روش عبارت انتقال پذیری در سطح زمانی جدید در فشار به دست آمده از روش برونابی زیر محاسبه می شود (شکل ۳-۲۰).

$$P_{i+1/2}^{*n+1} = P_{i+1/2}^{*n} + \frac{t^{n+1} - t^n}{t^n - t^{n-1}} (p^n - p^{n-1}) \quad (3-77)$$



شکل ۳-۲۰: نمایش استفاده از روش برونابی برای مواجهه با ماهیت غیرخطی عبارت انتقال پذیری

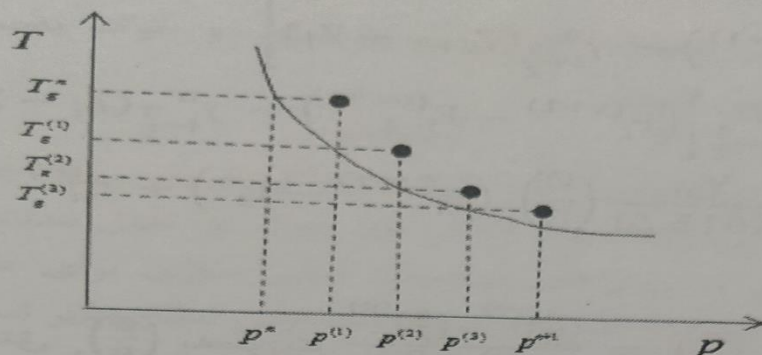
(ج) روش تکرار ساده^۲: مقدار انتقال پذیری با روش تکرار در یک مرحله تکرار قبل از زمان زمان محاسبه ارزیابی می گردد (در این روش محاسبات بسیار طولانی می شود).

$$T_{i+1/2}^{n+1(v+1)} \approx T_{i+1/2}^{n+1(v)} = 1.127 \left(\frac{A_x k_x}{\Delta_x} \right)_{i+1/2} \left(\frac{1}{\mu_g B_g} \right)_{i+1/2}^{(v)} \quad (3-78)$$



فصل سوم: شبیه سازی یک بعدی جریان سیال

خطی سازی عبارت انتقال پذیری در معادله جریان



شکل ۳-۲۱: نمایش استفاده از روش تکرار ساده برای بررسی با ماهیت غیرخطی عبارت انتقال پذیری
همچنین در این رویکرد برای سایر عوامل غیرخطی مانند دبی چاه و نیروی ثقلی یا اثر
مرزها از یک سطح تکرار زمانی قبل استفاده می شود. بنابراین معادله جریان گاز به صورت زیر
نوشته می شود.

$$\begin{aligned} & T_{i+\frac{1}{2}}^{(v)} \left[\left(P_{i+1}^{(v+1)} - P_i^{(v+1)} \right) - \gamma_{i+\frac{1}{2}}^n (Z_{i+1} - Z_i) \right] \\ & - T_{i-\frac{1}{2}}^{(v)} \left[\left(P_i^{(v+1)} - P_{i-1}^{(v+1)} \right) - \gamma_{i-\frac{1}{2}}^n (Z_i - Z_{i-1}) \right] \\ & = \frac{V_{bi}}{5.615 \Delta t} \left(\frac{\phi}{B} \right)_i' (P_i^{(v+1)} - P_i^n) + q_i^{(v)} \end{aligned} \quad (79-3)$$

که در این رابطه مشتق $\left(\frac{\phi}{B} \right)_i'$ به صورت $\left(\frac{\phi}{B} \right)_i' = \frac{\left(\frac{\phi}{B} \right)^{(v+1)} - \left(\frac{\phi}{B} \right)^{(n)}}{P_i^{(v+1)} - P_i^{(n)}}$ لحاظ می گردد و خود
نیاز به روش تکرار دارد. در این رویکرد تکرارها تا زمانی ادامه می یابد که شرط $\left| \frac{p_i^{v+1} - p_i^v}{p_i^v} \right|$
کمتر از ۰/۰۰۱ برقرار گردد.



فصل سوم: شبیه سازی یک بعدی جریان سیال

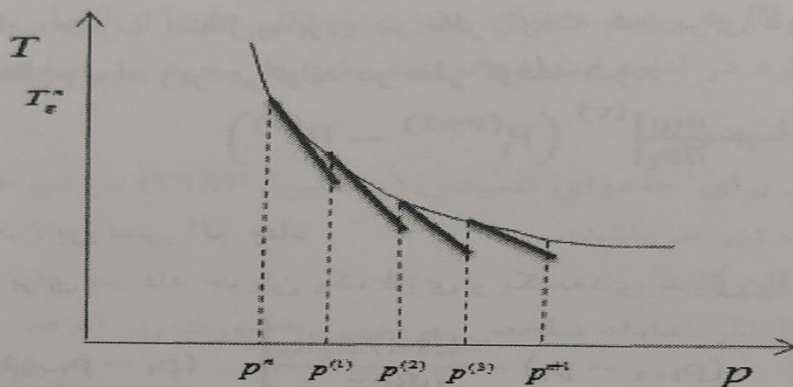
خطی سازی عبارت انتقال پذیری در معادله جریان

(د) رویکرد کاملاً ضمنی^۱: از آنجایی که فشارها در گام زمانی جدید هنوز معلوم نیست در این روش از یک تقریبی بر مبنای بسط تیلور و به صورت زیر استفاده می شود (شکل ۳-۲۲).

$$T_{i+1/2}^{n+1} \approx T_{i+1/2}^{n+1(v+1)} \approx T_{i+1/2}^{n+1(v)} + \left. \frac{\partial T_{i+1/2}}{\partial p_{i\pm 1}} \right|^{(v)} \Delta p_{i\pm 1}^{n+1(v+1)} + \left. \frac{\partial T_{i+1/2}}{\partial p_i} \right|^{(v)} \Delta p_i^{n+1(v+1)}$$

$$p_{i\pm 1}^{n+1(v+1)} = p_{i\pm 1}^{n+1(v)} + \Delta p_{i\pm 1}^{n+1(v+1)}, \quad p_i^{n+1(v+1)} = p_i^{n+1(v)} + \Delta p_i^{n+1(v+1)}$$

(۳-۸۰)



شکل ۳-۲۲: نمایش استفاده از روش کاملاً ضمنی برای مواجه با ماهیت غیرخطی عبارت انتقال پذیری



فصل سوم: شبیه سازی یک بعدی جریان سیال

خطی سازی عبارت انتقال پذیری در معادله جریان

در این رویکرد برای سایر عوامل غیرخطی کننده مانند دبی چاه و اثر مرزها از سطح زمانی جدید و برای نیروی ثقلی از سطح زمانی قدیم استفاده می شود. بنابراین معادله جریان به صورت زیر نوشته می شود.

$$T_{i+\frac{1}{2}}^{(v+1)} \left[\left(P_{i+1}^{(v+1)} - P_i^{(v+1)} \right) - \gamma_{i+\frac{1}{2}}^n (Z_{i+1} - Z_i) \right] \\ - T_{i-\frac{1}{2}}^{(v+1)} \left[\left(P_i^{(v+1)} - P_{i-1}^{(v+1)} \right) - \gamma_{i-\frac{1}{2}}^n (Z_i - Z_{i-1}) \right] \\ = \frac{V_{bi}}{5.615 \Delta t} \left(\frac{\partial}{\partial B} \right)_i \left(P_i^{(v+1)} - P_i^n \right) + q_i^{(v+1)}$$

(۸۱-۳)



فصل سوم: شبیه سازی یک بعدی جریان سیال

خطی سازی عبارت انتقال پذیری در معادله جریان

$$T_{i+\frac{1}{2}}^{(v+1)} \left[(P_{i+1}^{(v)} - P_i^{(v)}) - \gamma_{i+\frac{1}{2}}^n (Z_{i+1} - Z_i) \right] + \left[(P_{i+1}^{(v)} - P_i^{(v)}) - \gamma_{i+\frac{1}{2}}^{(n)} (Z_{i+1} - Z_i) \right] \times$$

$$\left[\frac{\partial T_{i+\frac{1}{2}}}{\partial P_i} \right]^{(v)} (P_i^{(v+1)} - P_i^{(v)}) + \frac{\partial T_{i+\frac{1}{2}}}{\partial P_{i+1}} \left[(P_{i+1}^{(v+1)} - P_{i+1}^{(v)}) \right]$$

$$+ T_{i+\frac{1}{2}}^{(v)} \left[(P_{i+1}^{(v+1)} - P_{i+1}^{(v)}) - (P_i^{(v+1)} - P_i^{(v)}) \right]$$

(۸۲-۳)

روش مشابه با آنچه برای عبارت انتقال پذیری در نظر گرفته شد برای دبی جریان سیال نیز باید لحاظ شود؛ به عنوان مثال رابطه زیر می تواند در نظر گرفته شود:

$$q_i^{(v+1)} \cong q_i^{(v)} + \frac{\partial q_i}{\partial P_i} \left[(P_i^{(v+1)} - P_i^{(v)}) \right]$$

(۸۳-۳)



فصل سوم: شبیه سازی یک بعدی جریان سیال

بلوک شامل یک چاه / بررسی اثر چاه

معادله تفاضل محدود برای مسئله جریان یک فازی و یک بعدی سیال را در نظر بگیرید.

$$\frac{1}{\Delta x_i} \left[\frac{1.127 A_x k_x}{\mu B \Delta x_{i+\frac{1}{2}}} \right]_{i+\frac{1}{2}} (p_{i+1} - p_i) - \frac{1.127 A_x k_x}{\mu B \Delta x_{i-\frac{1}{2}}} \left[\right]_{i-\frac{1}{2}} (p_i - p_{i-1})$$
$$= \frac{A_x}{5.615} \left[\frac{\phi^o c_r}{B^{n+1}} + \frac{\phi^n c_f}{B^o} \right] (p_i^{n+1} - p_i^n) + q_{sci}$$

(۸۴-۳)



فصل سوم: شبیه سازی یک بعدی جریان سیال

بلوک شامل یک چاه / بررسی اثر چاه

(۱) اندازه بلوکی که در آن تکمیل چاه وجود دارد در مقایسه با قطر چاه بسیار بزرگ می باشد (به عنوان مثال ۲۰۰ متر در مقابل ۱۰ سانتی متر) بنابراین فشار میانگین بلوک به علت وجود توزیع لگاریتمی فشار در اطراف چاه، تخمین صحیحی از فشار جریانی ته چاه (P_{wf}) نمی باشد.

(۲) لحاظ نمودن نحوه تعامل بسیار پیچیده بین چاه و مخزن (به عنوان مثال چاه هایی که از چند بلوک شبیه سازی عبور می کنند) مهم است که باید با رویکرد مناسب لحاظ شود.

(۳) پیچیدگی در معین کردن و اختصاص دادن میزان دبی تولیدی هر فاز در جریان چند فازی چاه تولیدی وجود دارد.

(۴) نحوه بررسی اثر یک چاه که ممکن است در وسط بلوک شبیه سازی قرار نگرفته باشد.

(۵) در سیستم شبکه نقطه گسترده موقعیت چاه ها بهتر است بر نقاط مش گذاری شده واقع باشند.

(۶) تأثیر وجود چند چاه در یک بلوک شبیه سازی با تعریف یک چاه فرضی معادل با

به کارگیری اصل برهم نهی می تواند بررسی شود.



فصل سوم: شبیه سازی یک بعدی جریان سیال

بلوک شامل یک چاه / بررسی اثر چاه

الف) چاههای عمودی:

شاخص بهره‌دهی برای چاههای عمودی (پیسمن^۱ ۱۹۸۳) در دو حالت رژیم جریان پایدار و شبه پایدار به صورت زیر می‌باشد:

الف-۱) رژیم جریان پایدار:

در شرایط رژیم پایدار معادله شاخص بهره‌دهی به صورت زیر آورده می‌شود.

$$PI = \frac{2\pi kh}{\mu B \left(\ln \frac{r_e}{r_w} + S - 1/2 \right)} \quad (۸۵-۳)$$

الف-۲) رژیم جریان شبه پایدار:

در شرایط رژیم شبه پایدار معادله شاخص بهره‌دهی به صورت زیر آورده می‌شود.

$$PI = \frac{2\pi kh}{\mu B \left(\ln \frac{r_e}{r_w} + S - 3/4 \right)} \quad (۸۶-۳)$$



فصل سوم: شبیه سازی یک بعدی جریان سیال

بلوک شامل یک چاه / بررسی اثر چاه

اغلب بلوک‌های شبیه‌سازی دارای سطح دایره‌ای نبوده بلکه می‌تواند سطح مربع یا مستطیل شکل و منظم داشته باشند. از این رو راه حل تئوری مفهوم شعاع معادل برای سطح بلوک چاهی از طریق رابطه $r_e = \sqrt{\frac{\Delta y \Delta x_i}{\pi}}$ قابل طرح بوده که $\Delta x, \Delta y$ ابعاد سطح بلوک هستند.

گاهی هم در مسائل شبیه‌سازی از معادله پیسمن،

$$r_e = c\sqrt{\Delta y \Delta x_i} \quad \text{where } c=0.2$$

(۸۷-۳)

برای استفاده در مخازن همسانگرد استفاده می‌شود. هم‌چنین برای محاسبه شعاع معادل

بلوک چاهی در سنگهای ناهمسانگرد واقع در یک بلوک شبیه‌سازی به ابعاد Δx و Δy از میانگین هندسی تراوایی $k = \sqrt{k_x k_y}$ استفاده می‌گردد (ابوقاسم و همکاران ۲۰۰۶).

$$r_e = 0.28 \frac{\left(\sqrt{\frac{k_y}{k_x}} \cdot (\Delta x)^2 + \sqrt{\frac{k_x}{k_y}} \cdot (\Delta y)^2 \right)^{1/2}}{\left(\frac{k_y}{k_x} \right)^{1/4} + \left(\frac{k_x}{k_y} \right)^{1/4}}$$

(۸۸-۳)

در حالت سنگ همسانگرد و با چاه واقع در بلوک مربعی شکل ($\Delta x = \Delta y$) رابطه (۸۸-۳) به رابطه ساده (۸۷-۳) تبدیل می‌شود.



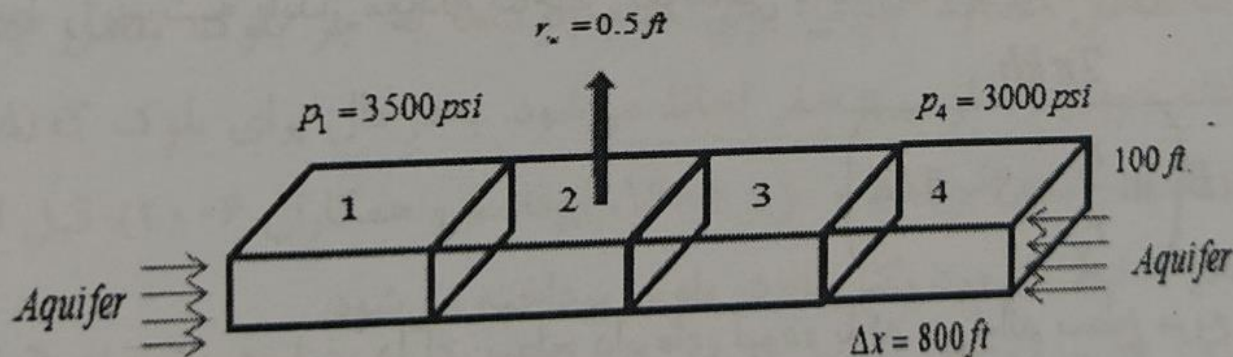
فصل سوم: شبیه سازی یک بعدی جریان سیال

بلوک شامل یک چاه / بررسی اثر چاه

مثال ۳-۱۱) یک مخزن یک بعدی همگون که تحت تاثیر یک سفره آبی (آبده) می باشد را در نظر گرفته که با آب تراکم ناپذیر اشباع شده است ($C_w=0$ و $S_w=100\%$). فشار بلوک های $P_1=3500$ psi و $P_4=3000$ psi و یک چاه عمودی در بلوک ۲ قرار دارد که با فشار ته چاهی $P_{wf}=2000$ psi تولید می کند. سایر اطلاعات موجود از قرار زیر است.

$$A_x = 20000 \text{ ft}^2, k = 36 \text{ md}, \phi = 0.17, S = -2, B = 1, \mu = 1 \text{ cp}$$

توزیع فشار بین بلوک ها و دبی تولیدی چاه را محاسبه نمایید





فصل سوم: شبیه سازی یک بعدی جریان سیال

بلوک شامل یک چاه / بررسی اثر چاه

روش حل:

با توجه به این که سیال تراکم ناپذیر است، معادله تقریب تفاضل محدود چنین سیستمی به صورت زیر نوشته می شود.

$$\left[\frac{1.127 A_x k_x}{\mu B \Delta x_{i+\frac{1}{2}}} \right]_{i+\frac{1}{2}} (p_{i+1} - p_i) - \left[\frac{1.127 A_x k_x}{\mu B \Delta x_{i-\frac{1}{2}}} \right]_{i-\frac{1}{2}} (p_i - p_{i-1}) = q_{sci}$$

که در آن عبارت انتقال پذیری به صورت زیر محاسبه می شود.

$$T_{i\pm 1/2} = \frac{1.127 A_x k_x}{\mu B \Delta x_{i\pm 1/2}} = 1.014 \frac{\text{stb}}{\text{day} \cdot \text{psi}}$$



فصل سوم: شبیه سازی یک بعدی جریان سیال

بلوک شامل یک چاه / بررسی اثر چاه

بنابراین معادله دیفرانسیلی به صورت تفاضل محدود به صورت $p_{i-1} - 2p_i + p_{i+1} =$ خواهد بود. با توجه به شرایط رژیم پایدار، شاخص بهره دهی از رابطه (۳-۸۵) محاسبه می گردد. برای محاسبه این شاخص نیاز به شعاع معادل بلوک چاهی بوده که از رابطه پیسمن مقدار $r_e = 80$ فوت خواهد بود. بنابراین شاخص بهره دهی چاه برابر $PI = 9.897 \text{ stb/d.psi}$ خواهد شد. با توجه به این مقدار معادله دبی تولیدی چاه به صورت زیر تبدیل می گردد.

$$q_{sci} = PI(p_i - p_{sf}) = 9.897(p_i - 2000)$$

بنابراین معادله تفاضل محدود برای بلوک های ۲ و ۳ به صورت زیر نوشته می شود و سپس با حل معادلات فشار بلوک های ۲ و ۳ حاصل می گردد و دبی چاه محاسبه می شود.

$$3500 - 2P_2 + P_3 = \frac{9.897}{1.0143} (P_i - 2000)$$

$$P_2 - 2P_3 + 3000 = 0$$

$$P_2 = 2177 \text{ Psia}$$

$$P_3 = 2588.8 \text{ Psia}$$

$$q_2 = 9.897(2177 - 2000) = 1751 \frac{\text{STB}}{D}$$

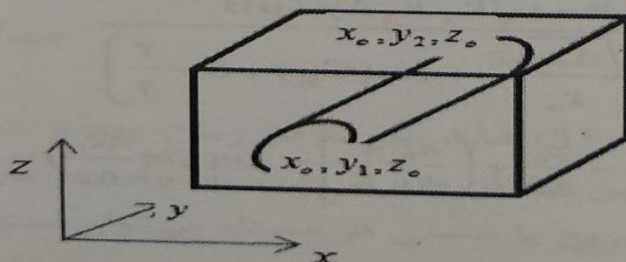


فصل سوم: شبیه سازی یک بعدی جریان سیال

بلوک شامل یک چاه / بررسی اثر چاه

(ب) چاههای افقی:

گاهی در مسائل شبیه سازی مخزن با وجود چاههای افقی در مخزن نیز روبرو هستیم. برای بررسی موضوع چاه افقی که در داخل یکی از بلوکهای شبیه سازی قرار گرفته را در نظر بگیرید (شکل ۳-۲۳).



شکل ۳-۲۳: نمایش موقعیت و پارامترهای توصیفی برای چاه افقی در داخل یکی از بلوکهای شبیه سازی

یکی از روابطی که برای شاخص بهره دهی (PI) چاه افقی تحت رژیم جریان پایدار پیشنهاد شده معادله ارائه شده توسط گیگر و همکاران^۱ می باشد.

$$PI = \frac{0.00708kL/\mu B}{\frac{L}{h} \ln \left(\frac{1 + \sqrt{1 - \left(\frac{L}{2r_e}\right)^2}}{\left(\frac{L}{2r_e}\right)} \right) + \ln \left(\frac{h}{2\pi r_w} \right)} \quad (۳-۸۹)$$

که در آن r_e شعاع تخلیه چاه (اندازه معادل بلوک شبیه سازی) و L طول چاه افقی واقع در بلوک است.



فصل سوم: شبیه سازی یک بعدی جریان سیال

بلوک شامل یک چاه / بررسی اثر چاه

نصورت زیر تعریف می شود.

$$PI_{p.H} = \frac{q}{P_i - P_{wf}} = \frac{\gamma \cdot \lambda k \Delta y / \mu B}{\ln \left[\frac{\sqrt{\left(\sqrt{\frac{k_x}{k_z}} (\Delta z)^r + \sqrt{\frac{k_z}{k_x}} (\Delta x)^r \right)}}{\left(\frac{k_x}{k_z} \right)^{\frac{1}{r}} + \left(\frac{k_z}{k_x} \right)^{\frac{1}{r}}} \right] - \ln(r_w) + S} \quad (90-3)$$

$$PI_{o.H} = \frac{q}{P_i - P_{wf}} = \frac{\gamma \cdot \lambda \sqrt{k_x \cdot k_z} \Delta y / \mu B}{\left(\ln \frac{\sqrt{\Delta x \Delta z}}{r_w} + \ln(C_H) + S - \frac{3}{4} \right)}$$

$$\ln(C_H) = 6.28 \frac{\Delta x}{\Delta z} \sqrt{\frac{k_z}{k_x}} \left[\frac{1}{3} - \frac{x_0}{\Delta x} + \left(\frac{x_0}{\Delta x} \right)^2 \right] - \ln \left(\sin \frac{\pi z_0}{\Delta z} \right) - \frac{1}{2} \ln \left(\frac{\Delta x}{\Delta z} \sqrt{\frac{k_z}{k_x}} \right) - 1.088 \quad (91-3)$$



فصل سوم: شبیه سازی یک بعدی جریان سیال

بلوک شامل یک چاه / بررسی اثر چاه

$$q_{well} = \sum_{\text{لایه ها}} PI_k (P_k - P_{wfk}) \quad (92-3)$$

$$P_{wf(k)} = P_{wf(ref)} + \gamma (h_{(k)} - h_{(ref)}) \quad (93-3)$$

روش اول) روش پتانسیل: در این روش نسبت جریان از هر بلوک به چاه بستگی به پتانسیل جریان در آن بلوک دارد و از رابطه (94-3) می توان مقدار جریان ورودی از طرف یک بلوک به چاه را محاسبه نمود.

$$q_k = \frac{PI_k (P_k - P_{wfk})}{\sum_{\text{لایه ها}} PI_k (P_k - P_{wfk})} q_{well} \quad (94-3)$$

روش دوم) روش نسبت شاخص های بهره دهی: در این روش نسبت جریان از هر بلوک به چاه بستگی به شاخص بهره دهی چاه در آن بلوک دارد و از رابطه (95-3) می توان مقدار جریان ورودی از طرف یک بلوک به چاه را محاسبه نمود

$$q_k = \frac{PI_k}{\sum_{\text{لایه ها}} PI_k} q_{well} \quad (95-3)$$

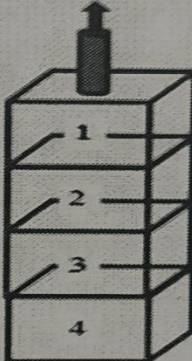


فصل سوم: شبیه سازی یک بعدی جریان سیال

بلوک شامل یک چاه / بررسی اثر چاه

مثال ۳-۱۲) یک چاه با شعاع ۰/۲۷ فوت نشان داده شده در شکل زیر که در چندین لایه مشبک کاری شده را در نظر بگیرید. شاخص بهره‌دهی را برای تکمیل این چاه محاسبه کنید. فشار جریانیه ته چاه برای سیال تراکم‌ناپذیر و با چگالی 53 lbm/ft^3 برابر 1643 پام می‌باشد. فشار جریانیه چاه را در موقعیت بلوک‌های میانی ۱ تا ۴ محاسبه کنید. فرض کنید با یک شبیه‌ساز جریان فشار بلوک‌های مختلف محاسبه و به ترتیب برای بلوک‌های ۴ تا ۱ مقادیر $250.3 - 2479 - 2443 - 2400$ پام گزارش شده باشد. سایر اطلاعات موجود شامل اثر پوسته ناچیز و ضریب حجمی سیال $B = 1 \frac{rb}{stb}$ و گرانشی سیال 1 cp می‌باشد. با به‌کارگیری مفهوم شعاع معادل بلوک چاهی (با روش پیسمن) و محاسبه شاخص بهره‌دهی برای هر بلوک میزان جریان چاه را محاسبه نمایید.

$k_z (md)$	$k_r (md)$	$h (ft)$
200	40	7
142	113	8
80	93	11
93	101	23





موسسه آموزش
عالی
اقبال لاهوری
مهندس حاجی قاسمی

فصل سوم: شبیه سازی یک بعدی جریان سیال

بلوک شامل یک چاه / بررسی اثر چاه

روش حل:

ابتدا شعاع معادل بلوک چاهی یا روش پیسمن و از رابطه زیر برای هر چهار بلوک مدل مخزن محاسبه می شود:

$$r_{ei} = 0.28 \frac{\sqrt{\left(\sqrt{\frac{k_{xi}}{k_{yi}}} (\Delta y)^2 + \sqrt{\frac{k_{yi}}{k_{xi}}} (\Delta x)^2 \right)}}{\left(\frac{k_{xi}}{k_{yi}} \right)^{1/4} + \left(\frac{k_{yi}}{k_{xi}} \right)^{1/4}}$$

مقادیر محاسبه شده شعاع معادل بلوک عبارتند از:

$$\begin{aligned} r_{e1} &= 211.942 \text{ ft} \\ r_{e2} &= 198.312 \text{ ft} \\ r_{e3} &= 198.130 \text{ ft} \\ r_{e4} &= 198.032 \text{ ft} \end{aligned}$$

سپس مقدار شاخص بهره دهی از رابطه

$$PI_i = \frac{\gamma / 0.8 \sqrt{k_{xi} \cdot k_{yi}} h_i}{(\mu B) \left(\ln \frac{r_{ei}}{r_w} + S - \frac{1}{2} \right)}$$

برای هریک از

بلوک ها به صورت ذیل به دست می آید:

$$\begin{aligned} PI_1 &= 0.719 \text{ STB/D.Psi} \\ PI_2 &= 1.176 \text{ STB/D.Psi} \\ PI_3 &= 1.102 \text{ STB/D.Psi} \\ PI_4 &= 2.588 \text{ STB/D.Psi} \end{aligned}$$



فصل سوم: شبیه سازی یک بعدی جریان سیال

بلوک شامل یک چاه / بررسی اثر چاه

برای محاسبه فشار جریانی ته چاه نیاز به چگالی مخصوص سیال بوده که برابر $\gamma = \frac{\rho}{144} = 0.368 \frac{\text{psi}}{\text{ft}}$ می باشد. با این مقدار فشار جریانی چاه در موقعیت مرکز بلوک های مختلف از رابطه $P_{wf(k)} = P_{wf(ref)} + \gamma(h_{(k)} - h_{(ref)})$ به صورت زیر محاسبه می شود.

$$P_{wf(1)} = 1643 - 0.368 \times 45 / 5 = 1626 / 5 \text{ psi}$$

$$P_{wf(2)} = 1643 - 0.368 \times 38 = 1629 / 1 \text{ psi}$$

$$P_{wf(3)} = 1643 - 0.368 \times 28 / 5 = 1632 / 5 \text{ psi}$$

$$P_{wf(4)} = 1643 - 0.368 \times 11 / 5 = 1638 / 7 \text{ psi}$$

حال با توجه به مقادیر فشار جریانی ته چاه در بلوک ها، فشار هر بلوک، شاخص بهره دهی محاسبه شده برای هریک از بلوک ها و دبی ورودی از طرف هر بلوک از رابطه $q_i = PI_i (\bar{P}_i - P_{wf(i)})$ به صورت زیر تعیین می شود:

$$q_1 = 557.25 \text{ STB/D}$$

$$q_2 = 959.26 \text{ STB/D}$$

$$q_3 = 934.69 \text{ STB/D}$$

$$q_4 = 2247.74 \text{ STB/D}$$

و در پایان دبی کل چاه از جمع جریان ورودی از هر یک از بلوک ها به چاه به دست می آید.

$$q_{\text{total}} = \sum q_i = q_1 + q_2 + q_3 + q_4 = 4698.98 \text{ STB/Day}$$



فصل سوم: شبیه سازی یک بعدی جریان سیال

سایر مختصات

در بخش‌های قبلی، مسئله مدل‌سازی جریان برای جریان یک فازی در سیستم کارتیزین تشریح شد. در این قسمت، این موضوع برای سیستم مختصات جریان شعاعی در مختصات استوانه‌ای بررسی می‌شود. فرم گسسته معادله یک بعدی جریان در جریان شعاعی به صورت زیر می‌باشد:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \lambda(r, U) \frac{\partial U}{\partial r} \right) = c(r) \frac{\partial U}{\partial t} + q(r, t) \quad (96-3)$$

برای چنین سیستمی شعاع مرز داخلی r_w ، شعاع مرز خارجی r_e و تعداد بلوک‌ها برابر n فرض می‌شود. بنابراین با تعریف پارامتر $\alpha = \left(\frac{r_e}{r_w} \right)^{\frac{1}{n}}$ شعاع مرکز بلوک‌های مختلف بین مرز داخلی و خارجی به صورت زیر محاسبه می‌شود (عزیز و ستاری ۱۹۷۹ و ارتکین ۲۰۰۱).

$$r_i = \alpha^{i-1} \times r_1 \quad \text{و} \quad r_1 = \left[\frac{\alpha \ln \alpha}{\alpha - 1} \right] \times r_w \quad (97-3)$$

اگر متغیر جدید $\rho = r^2$ تعریف شود، می‌توان معادله جریان (۹۶-۳) را به صورت زیر نوشت:

$$4 \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \lambda(r, U) \frac{\partial U}{\partial \rho} \right) = c(r) \frac{\partial U}{\partial t} + q(r, t) \quad (98-3)$$



فصل سوم: شبیه سازی یک بعدی جریان سیال

سایر مختصات

$$\frac{4}{\Delta \rho_i} \left[\rho \lambda \Big|_{i+\frac{1}{2}} \frac{U_{i+1}^{n+1} - U_i^{n+1}}{\Delta \rho_{i+1/2}} - \rho \lambda \Big|_{i-\frac{1}{2}} \frac{U_i^{n+1} - U_{i-1}^{n+1}}{\Delta \rho_{i-1/2}} \right] = c_i \frac{U_i^{n+1} - U_i^n}{\Delta t} + q_i \quad (99-3)$$

حجم بلوک‌ها برای این چنین سیستمی می‌تواند به صورت،

$$V_i = \pi (r^2|_{i+1/2} - r^2|_{i-1/2}) \Delta z = \pi (\rho|_{i+1/2} - \rho|_{i-1/2}) \Delta z = \pi \Delta \rho_i \Delta z \quad (100-3)$$

محاسبه و در معادله تفاضل محدود به شکل زیر لحاظ شود.

$$4\pi \Delta z \left[\rho \lambda \Big|_{i+\frac{1}{2}} \frac{U_{i+1}^{n+1} - U_i^{n+1}}{\Delta \rho_{i+1/2}} - \rho \lambda \Big|_{i-\frac{1}{2}} \frac{U_i^{n+1} - U_{i-1}^{n+1}}{\Delta \rho_{i-1/2}} \right] = V_i \cdot c_i \frac{U_i^{n+1} - U_i^n}{\Delta t} + V_i \cdot q_i \quad (101-3)$$

حال با فرض تحرک پذیری ثابت و از معادله دارسی در هندسه جریان شعاعی می‌توان متوسط لگاریتمی شعاع مرز بلوک‌ها را به صورت زیر تعریف نمود.

$$\rho|_{i+\frac{1}{2}} = \frac{\rho_{i+1} - \rho_i}{\ln \frac{\rho_{i+1}}{\rho_i}}, \quad \rho|_{i-\frac{1}{2}} = \frac{\rho_i - \rho_{i-1}}{\ln \frac{\rho_i}{\rho_{i-1}}} \quad (102-3)$$



فصل سوم: شبیه سازی یک بعدی جریان سیال

سایر مختصات

$$4r\pi\lambda.\Delta z \left[\frac{U_{i+1}^{n+1} - U_i^{n+1}}{\ln \frac{\rho_{i+1}}{\rho_i}} - \frac{U_i^{n+1} - U_{i-1}^{n+1}}{\ln \frac{\rho_i}{\rho_{i-1}}} \right] = V_i \cdot c_i \frac{U_i^{n+1} - U_i^n}{\Delta t} + V_i \cdot q_i$$

$$4r\pi\lambda.\Delta z \left[\frac{U_{i+1}^{n+1} - U_i^{n+1}}{2 \ln \frac{r_{i+1}}{r_i}} - \frac{U_i^{n+1} - U_{i-1}^{n+1}}{2 \ln \frac{r_i}{r_{i-1}}} \right] = V_i \cdot c_i \frac{U_i^{n+1} - U_i^n}{\Delta t} + V_i \cdot q_i$$

(۱۰۳-۳)

برای چنین سیستمی انتقال پذیری به صورت زیر نشان داده می شود:

$$T \Big|_{i+\frac{1}{2}} = \frac{2\pi\lambda\Delta z}{\ln \frac{r_{i+1}}{r_i}}, \quad T \Big|_{i-\frac{1}{2}} = \frac{2\pi\lambda\Delta z}{\ln \frac{r_i}{r_{i-1}}}$$

(۱۰۴-۳)

همچنین با استفاده از عبارت انتقال پذیری و با به کارگیری معادله دبی چاه (از ضریب بهره دهی چاه $q = PI(U_i - U_{wf})$) معادله جریان به صورت تفاضل محدود زیر نوشته می شود:

$$T_{i+1/2} (U_{i+1}^{n+1} - U_i^{n+1}) - T_{i-1/2} (U_i^{n+1} - U_{i-1}^{n+1}) = V_i \cdot c_i \frac{U_i^{n+1} - U_i^n}{\Delta t} + V_i \cdot PI(U_i^{n+1} - U_{wf})$$

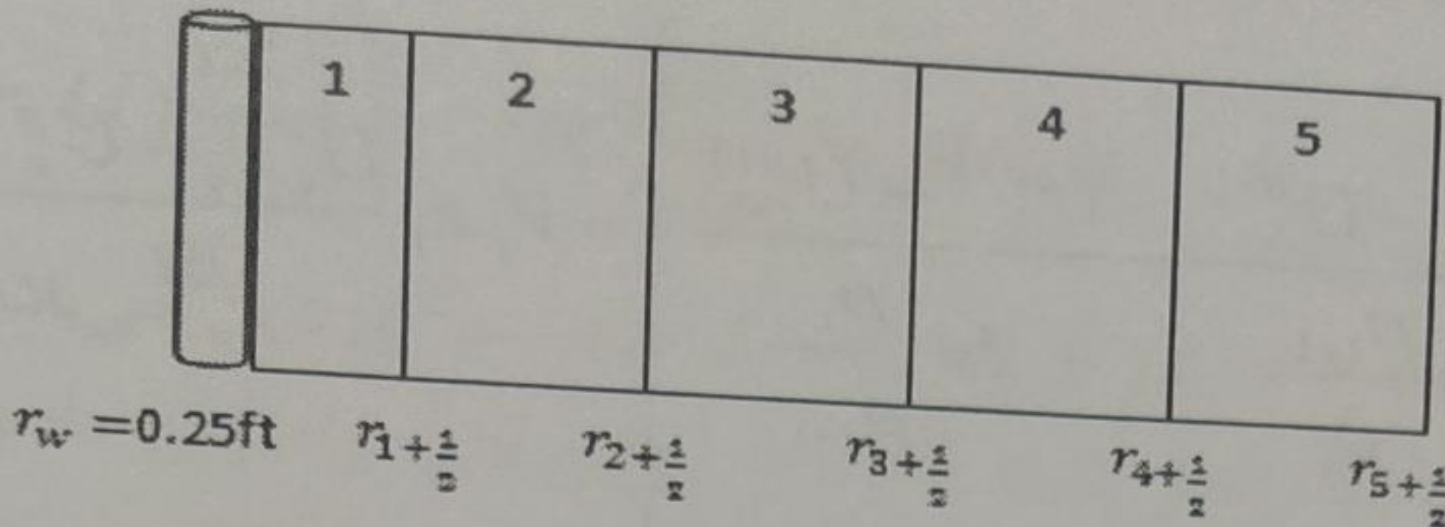
(۱۰۵-۳)



فصل سوم: شبیه سازی یک بعدی جریان سیال

سایر مختصات

مثال ۳-۱۴) یک چاه عمودی به شعاع $r_w = 0.25 \text{ ft}$ واقع در یک مخزن به شعاع خارجی $r_e = 744.7 \text{ ft}$ و ضخامت $\Delta z = 100 \text{ ft}$ با جریان شعاعی در مختصات استوانه‌ای که به ۵ بلوک در جهت شعاعی تقسیم شده را در نظر بگیرید. شعاع مرکز و مرز هر یک از بلوک‌ها و همچنین حجم بلوک‌ها را محاسبه نمایید.





فصل سوم: شبیه سازی یک بعدی جریان سیال

سایر مختصات

روش حل:

ابتدا پارامتر $\alpha = \left(\frac{r_e}{r_w}\right)^{\frac{1}{5}} = 4.95$ را محاسبه و از طریق آن شعاع مرکز بلوکها به صورت زیر

محاسبه می شود:

$$r_1 = \frac{\alpha \ln \alpha}{\alpha - 1} \times r_w = 0.5012 \text{ ft}$$

$$r_2 = r_1 \alpha^{2-1} = 2.48 \text{ ft}$$

$$r_3 = r_1 \alpha^{3-1} = 12.29 \text{ ft}$$

$$r_4 = r_1 \alpha^{4-1} = 60.87 \text{ ft}$$

$$r_5 = r_1 \alpha^{5-1} = 301.45 \text{ ft}$$

همچنین شعاع مرز بین بلوکها از طریق رابطه $r_{i+\frac{1}{2}} = \frac{r_{i+1} - r_i}{\ln \frac{r_{i+1}}{r_i}}$ به صورت زیر محاسبه

می شود:

$$r_{1+\frac{1}{2}} = 1.23 \text{ ft}; \quad r_{1-\frac{1}{2}} = 0.25 \text{ ft}$$

$$r_{2+\frac{1}{2}} = 6.13 \text{ ft}; \quad r_{2-\frac{1}{2}} = 1.23 \text{ ft}$$

$$r_{3+\frac{1}{2}} = 30.36 \text{ ft}; \quad r_{3-\frac{1}{2}} = 6.13 \text{ ft}$$

$$r_{4+\frac{1}{2}} = 150.38 \text{ ft}; \quad r_{4-\frac{1}{2}} = 30.36 \text{ ft}$$

$$r_{5+\frac{1}{2}} = r_e; \quad r_{5-\frac{1}{2}} = 150.38 \text{ ft}$$



فصل سوم: شبیه سازی یک بعدی جریان سیال

سایر مختصات

برای اطمینان از اینکه جریان شعاعی در هر مرز بلوک در تطابق با سرعت جریان از معادله داری باشد، مرز بلوک‌ها برای محاسبه حجم هر یک از بلوک‌ها از رابطه $r_{i+\frac{1}{2}}^2 = \frac{r_{i+1}^2 - r_i^2}{\ln\left(\frac{r_{i+1}^2}{r_i^2}\right)}$ و به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\begin{aligned} r_{1+\frac{1}{2}} &= 1.358 \text{ ft}; & r_{1-\frac{1}{2}} &= 0.274 \text{ ft} \\ r_{2+\frac{1}{2}} &= 6.73 \text{ ft}; & r_{2-\frac{1}{2}} &= 1.358 \text{ ft} \\ r_{3+\frac{1}{2}} &= 33.32 \text{ ft}; & r_{3-\frac{1}{2}} &= 6.73 \text{ ft} \\ r_{4+\frac{1}{2}} &= 165.06 \text{ ft}; & r_{4-\frac{1}{2}} &= 33.32 \text{ ft} \\ r_{5+\frac{1}{2}} &= r_e; & r_{5-\frac{1}{2}} &= 165.06 \text{ ft} \end{aligned}$$

بنابراین حجم بلوک‌ها از رابطه $v_{bi} = (r_{i+\frac{1}{2}}^2 - r_{i-\frac{1}{2}}^2) \Delta z_i \times \pi$ و به صورت زیر محاسبه می‌شود.
 $v_{b1} = 556.5 \text{ ft}^3, v_{b2} = 13648.5 \text{ ft}^3, v_{b3} = 334739.9 \text{ ft}^3, v_{b4} = 8209770 \text{ ft}^3, v_{b5} = 165681140 \text{ ft}^3$



فصل سوم: شبیه سازی یک بعدی جریان سیال

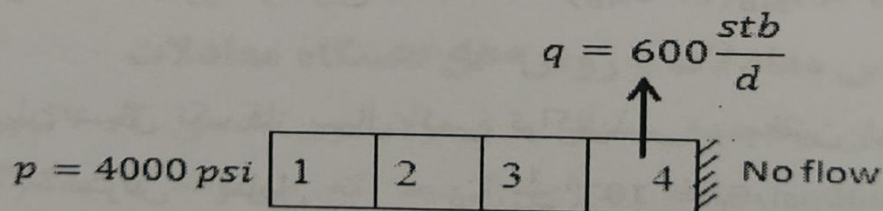
کنترل موازنه جرمی

با انجام محاسبات و به دست آوردن فشار بلوک‌ها نیاز به کنترل کردن موازنه جرمی سیستم می‌باشد. روش این کنترل بسته به نوع سیال متفاوت است.

الف) سیال تراکم ناپذیر: در این شرایط، عبارت تجمع جرمی در معادله جریان صفر بوده و بنابراین مجموع جبری جریان سیال جابجا شده در مرزهای مخزن و چاه باید برابر صفر باشد.

مثال ۳-۱۶) جریان سیال تراکم ناپذیر در مخزن با مشخصات نشان داده در شکل زیر را

در نظر بگیرید. اطلاعات در دسترس شامل $B = 1 \frac{rb}{stb}$, $r_w = 7 \text{ in}$, $\rho = 50 \frac{lbm}{ft^3}$, $\mu = 0.5 \text{ cp}$, $S = +5.1$, $\Delta x = 300 \text{ ft}$, $\Delta y = 350 \text{ ft}$, $\Delta z = 40 \text{ ft}$, $k = 270 \text{ md}$, $\phi = 0.27$ می‌باشد.



جواب فشار در بلوک‌های مختلف به شرح زیر محاسبه شده است
 $P_1 = 3989.4$, $P_2 = 3986.3$, $P_3 = 3947.2$, $P_4 = 3926.1 \text{ psi}$
 در این مخزن را انجام دهید.



فصل سوم: شبیه سازی یک بعدی جریان سیال

کنترل موازنه جرمی

روش حل:

ابتدا عبارت انتقال پذیری به صورت زیر محاسبه می شود.

$$T = 0.001127 \frac{KA}{\mu B \Delta x} = 28.4 \frac{\text{stb}}{\text{D. psi}}$$

میزان دبی جریان جابجا شده در مرز سمت چپ سیستم از رابطه زیر محاسبه می شود.

$$q_{\text{left}} = \frac{T}{1} (4000 - P_1) = 599.82 \frac{\text{stb}}{\text{d}}$$

از طرفی چون مرز سمت راست سیستم بسته می باشد، بنابراین مجموع جبری جریان عبوری مرزها و چاه به صورت زیر خواهد بود.

$$\sum \Delta q = 599.82 - 600 = -0.184 \frac{\text{stb}}{\text{d}}$$

که این مقدار کمی بوده و صحت موازنه جرمی را نشان می دهد.



فصل سوم: شبیه سازی یک بعدی جریان سیال

کنترل موازنه جرمی

(ب) سیال کمی تراکم پذیر: در این شرایط دو روش یکی موازنه مقطعی برای هر گام زمانی (I_{MB}) با تعریف:

$$I_{MB} = \frac{\sum \frac{V_b}{5.615 \Delta t} \left[\left| \frac{\phi}{B} \right|^{n+1} - \left| \frac{\phi}{B} \right|^n \right]}{\sum (q_{wells} + q_{boundaries})} \text{ یا } \frac{\sum \frac{V_b \phi_{ct}}{5.615 B^0 \Delta t} [p^{n+1} - p^n]}{\sum (q_{wells} + q_{boundaries})} \quad (۱۰۶-۳)$$

و دوم موازنه تجمعی برای تمام دوره شبیه سازی (C_{MB}) با تعریف:

$$C_{MB} = \frac{\sum \frac{V_b}{5.615 \Delta t} \left[\left| \frac{\phi}{B} \right|^{n+1} - \left| \frac{\phi}{B} \right|^0 \right]}{\sum_{m=1}^{n+1} \Delta t_m \sum (q_{wells} + q_{boundaries})} \text{ یا } \frac{\sum \frac{V_b \phi_{ct}^0}{5.615 B^0 \Delta t} [p^{n+1} - p^0]}{\sum_{m=1}^{n+1} \Delta t_m \sum (q_{wells} + q_{boundaries})} \quad (۱۰۷-۳)$$

می تواند به کار رود. شرط صحت موازنه از طریق $0.995 < I_{MB} \text{ (or } C_{MB}) < 1.005$ بررسی می شود.



فصل سوم: شبیه سازی یک بعدی جریان سیال

ماتریس معادلات و روش حل دستگاه معادلات

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{B^o \mu q}{1.127 k V_b} = \frac{\phi \mu c}{1.127 \times 5.615 k} \frac{\partial p}{\partial t}$$

$$\frac{1}{\Delta x^2} P_{i-1}^{n+1} - \left[\frac{2}{\Delta x^2} + \frac{\phi \mu c}{1.127 \times 5.615 k \Delta t} \right] P_i^{n+1} + \frac{1}{\Delta x^2} P_{i+1}^{n+1} = - \left(\frac{B^o \mu q}{1.127 k V_b} - \frac{\phi \mu c}{1.127 \times 5.615 k \Delta t} \right) P_i^n$$

(۱۰۸-۳)

این معادله دارای سه متغیر فشار سه بلوک مجاور بوده و به صورت زیر می تواند ساده گردد:

$$c_i P_{i-1}^{n+1} - a_i P_i^{n+1} + b_i P_{i+1}^{n+1} = d_i$$

(۱۰۹-۳)

بطوریکه ضرایب آن عبارتند از:

$$c_i = \frac{1}{\Delta x^2}$$

$$a_i = \frac{2}{\Delta x^2} + \frac{\phi \mu c}{1.127 \times 5.615 k \Delta t} \Big|_i$$

$$b_i = \frac{1}{\Delta x^2}$$

$$d_i = - \left(\frac{B^o \mu q}{1.127 k V_b} - \frac{\phi \mu c}{1.127 \times 5.615 k \Delta t} \right) P_i^n$$

(۱۱۰-۳)



فصل سوم: شبیه سازی یک بعدی جریان سیال

ماتریس معادلات و روش حل دستگاه معادلات

برای چنین حالتی، می توان معادلات جبری در سیستم یک بعدی را به طور مثال به صورت زیر نوشت:

$$\begin{cases} a_1 U_1 + b_1 U_2 = d_1 \\ c_i U_{i-1} + a_i U_i + b_i U_{i+1} = d_i \quad \text{for } i = 2, 3, \dots, N-1 \\ c_N U_{N-1} + a_N U_N = d_N \end{cases} \quad (111-3)$$

در حالی که ضرایب a_i, b_i, c_i و d_i معلوم بوده و در شکل ماتریس رابطه (111-3) به عنوان درایه های ماتریس ضرایب (A) محسوب می شوند.

$$AU = d \quad (112-3)$$

هم چنین در این رابطه ماتریس های A، U و d به ترتیب ماتریس ضرایب (یا ساختار سه قطری)، ماتریس مجهولات و ماتریس مقادیر معلوم خواص سنگ و سیال هستند. درایه های ماتریس ضرایب A در واقع مقادیری می باشند که مقدار آن را می دانیم. فرم کلی ماتریس ضرایب برای یک مسئله جریان یک بعدی به شکل (رابطه 3-113) آورده شده است.

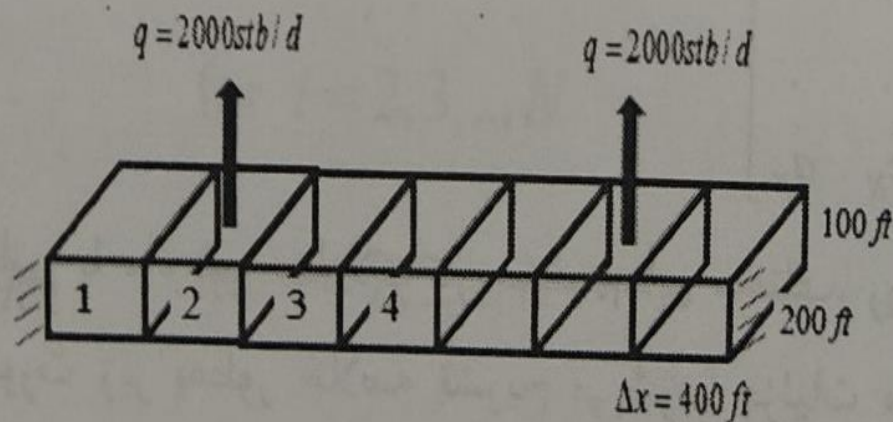
$$A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & & & \\ c_2 & a_2 & b_2 & & \\ & . & . & . & \\ & & . & . & . \\ & & & c_N & a_N \end{bmatrix} \quad (113-3)$$



فصل سوم: شبیه سازی یک بعدی جریان سیال

ماتریس معادلات و روش حل دستگاه معادلات

مثال ۳-۱۸) جریان در یک مخزن یک بعدی با فشار اولیه ۴۰۰۰ پام از طریق دو چاه موجود در بلوک های ۲ و ۶ برقرار است (شکل زیر). اطلاعات در دسترس از خصوصیات سنگ و سیال شامل $\mu = 1 \text{ cp}$, $c = 5 \times 10^{-5} \text{ psi}^{-1}$, $B = 1$, $k = 178 \text{ md}$, $\phi = 30\%$ می باشد. با به کارگیری گام زمانی ۱۰ روز و با فرمولاسیون ضمنی ماتریس معادلات حاکم برای چنین مخزنی را به دست آورید.





فصل سوم: شبیه سازی یک بعدی جریان سیال

ماتریس معادلات و روش حل دستگاه معادلات

روش حل:

معادله تفاضل محدود برای جریان یک بعدی به صورت رابطه (۳-۱۰۹) می باشد. در حالی که ضرایب معادله از رابطه (۳-۱۱۰) محاسبه می شود.

با محاسبه این ضرایب برای بلوک های ۱ تا ۴ (توجه شود که با وجود تقارن در شکل مخزن و

مشخصات مخزنی یکسان تنها نیاز به محاسبات فشار ۴ بلوک اول می باشد) دستگاه معادلات به فرم ماتریس به صورت زیر خواهد بود که نشان می دهد ماتریس ضرایب یک ماتریس سه قطری است.

$$\begin{bmatrix} -1.021 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2.021 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2.021 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -2.021 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{bmatrix}^{n+1} = \begin{bmatrix} -84 \\ 116 \\ -84 \\ -84 \end{bmatrix}$$



فصل سوم: شبیه سازی یک بعدی جریان سیال

ماتریس معادلات و روش حل دستگاه معادلات

ساختار ماتریس معادلات نشان داده شده در رابطه (۱۱۱-۳) مربوط به سیستم کارتزین بود در یک مخزن با مختصات هندسه استوانه‌ای فرم معادله تفاضل محدود همانند آنچه در مختصات کارتزین دیده شد می‌باشد و با اعمال آن برای بلوک‌های مختلف معادلات جبری (۱۱۴-۳) حاصل می‌شود.

$$\begin{cases} c_1 U_N + a_1 U_1 + b_1 U_2 = d_1 \\ c_i U_{i-1} + a_i U_i + b_i U_{i+1} = d_i \quad \text{for } i = 2, 3, \dots, N-1 \\ c_N U_{N-1} + a_N U_N + b_N U_1 = d_N \end{cases} \quad (114-3)$$

در صورتیکه دستگاه معادلات جبری (۱۱۴-۳) به فرم ماتریسی نوشته شود ماتریس ضرایب به صورت زیر خواهد شد که کمی با ماتریس ضرایب به دست آمده برای سیستم مخازن با مختصات کارتزین متفاوت است. علت این تفاوت در شرایط مرزی سیکلی در حالت مختصات استوانه‌ای است.

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & & c_1 \\ c_2 & a_2 & b_2 & \\ & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & \cdot & \cdot \\ b_N & & c_N & a_N \end{bmatrix} \quad (115-3)$$



فصل سوم: شبیه سازی یک بعدی جریان سیال

ماتریس معادلات و روش حل دستگاه معادلات

اولین روش ساده حذف مستقیم، روش توماس است. فرض کنید ماتریس ضرایب سه قطری A به صورت حاصل ضرب دو ماتریس $A=WQ$ که به فرم‌های زیر تعریف می‌شوند تفکیک گردند.

$$W = \begin{bmatrix} w_1 & & & & \\ c_2 & w_2 & & & \\ & . & . & & \\ & & . & . & \\ & & & c_N & w_N \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} 1 & q_1 & & & \\ & 1 & q_2 & & \\ & & . & . & \\ & & & . & q_{N-1} \\ & & & & 1 \end{bmatrix} \quad (3-116)$$

با جایگذاری ماتریس A در معادله جریان $AU=d$ روابط $(WQ)U=d$ یا $W(QU)=d$ به دست می‌آید. حال با تعریف ماتریس جدید $g=QU$ می‌توان رابطه $Wg=d$ را نوشت و از طریق آن مسئله را حل نمود. برای شروع الگوریتم، ابتدا ماتریس A به صورت زیر تفکیک می‌شود:

$$\begin{cases} w_1 = a_1 \\ q_{i-1} = \frac{b_{i-1}}{w_{i-1}} & \text{for } i = 2, 3, \dots, N \\ w_i = a_i - c_i \cdot q_{i-1} & \text{for } i = 2, 3, \dots, N \end{cases}$$

(3-117)



فصل سوم: شبیه سازی یک بعدی جریان سیال

ماتریس معادلات و روش حل دستگاه معادلات

$$\begin{cases} g_1 = \frac{d_1}{w_1} \\ g_i = \frac{d_i - c_i \cdot g_{i-1}}{w_i} \end{cases} \quad \text{for } i = 2, 3, \dots, N$$

(۱۱۸-۳)

مرحله آخر هم جایگذاری برای حل معادله $QU=g$ به طریق زیر است:

$$\begin{cases} U_N = g_N \\ U_i = g_i - q_i U_{i+1} \end{cases} \quad \text{for } i = N-1, N-2, \dots, 1$$

(۱۱۹-۳)

توجه شود که برای مسائل دارای شرایط مرزی سیکلی الگوریتم تانگ^۱ به جای الگوریتم توماس استفاده می شود.



فصل سوم: شبیه سازی یک بعدی جریان سیال

جریان چند فاز سیال

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\lambda_w \left(\frac{\partial p_w}{\partial x} - \gamma_w \frac{\partial z}{\partial x} \right) \right] = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\phi S_w}{B_w} \right) + q_w \quad (120-3)$$

فرم تفاضل محدود رابطه (120-3) با به کارگیری عبارت انتقال پذیری به صورت زیر نوشته می شود.

$$\begin{aligned} T_{w_{i+\frac{1}{2}}} \left[(P_{w_{i+1}} - P_{w_i}) - \gamma_{w_{i+\frac{1}{2}}} (Z_{i+1} - Z_i) \right] \\ - T_{w_{i-\frac{1}{2}}} \left[(P_{w_i} - P_{w_{i-1}}) - \gamma_{w_{i-\frac{1}{2}}} (Z_i - Z_{i-1}) \right] \\ = \frac{V_{bi}}{5.615 \Delta t} \left[\left. \frac{\phi S_w}{B_w} \right|_i^{n+1} - \left. \frac{\phi S_w}{B_w} \right|_i^n \right] + q_{wi} \end{aligned} \quad (121-3)$$

معادله جریان برای جزء نفت به صورت زیر نوشته می شود:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\lambda_o \left(\frac{\partial p_o}{\partial x} - \gamma_o \frac{\partial z}{\partial x} \right) \right] = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\phi S_o}{B_o} \right) + q_o \quad (122-3)$$

فرم تفاضل محدود رابطه (122-3) با به کارگیری عبارت انتقال پذیری به صورت ذیل نوشته می شود.

$$\begin{aligned} T_{o_{i+\frac{1}{2}}} \left[(P_{o_{i+1}} - P_{o_i}) - \gamma_{o_{i+\frac{1}{2}}} (Z_{i+1} - Z_i) \right] \\ - T_{o_{i-\frac{1}{2}}} \left[(P_{o_i} - P_{o_{i-1}}) - \gamma_{o_{i-\frac{1}{2}}} (Z_i - Z_{i-1}) \right] \\ = \frac{V_{bi}}{5.615 \Delta t} \left[\left. \frac{\phi S_o}{B_o} \right|_i^{n+1} - \left. \frac{\phi S_o}{B_o} \right|_i^n \right] + q_{oi} \end{aligned} \quad (123-3)$$



فصل سوم: شبیه سازی یک بعدی جریان سیال

جریان چند فازی سیال

هم چنین معادله جریان برای جزء گاز به صورت زیر نوشته می شود:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[R_s \lambda_o \left(\frac{\partial p_o}{\partial x} - \gamma_o \frac{\partial z}{\partial x} \right) + \lambda_g \left(\frac{\partial p_o}{\partial x} - \gamma_g \frac{\partial z}{\partial x} \right) \right] = \frac{\partial}{\partial t} \left[\phi \left(\frac{R_s}{B_o} S_o + \frac{S_g}{B_g} \right) \right] + q_{fg} + q_o R_s \quad (3-124)$$

فرم تفاضل محدود این رابطه با به کارگیری عبارت انتقال پذیری به صورت زیر نوشته می شود.

$$\begin{aligned} & R_s T_{o_{i+\frac{1}{2}}} (P_{o_{i+1}} - P_{o_i}) - R_s T_{o_{i-\frac{1}{2}}} (P_{o_i} - P_{o_{i-1}}) + T_{g_{i+\frac{1}{2}}} (P_{g_{i+1}} - P_{g_i}) \\ & - T_{g_{i-\frac{1}{2}}} (P_{g_i} - P_{g_{i-1}}) \\ & = \frac{V_{bi}}{5.615 \Delta t} \left[\left. \frac{\phi S_g}{B_o} \right|_i^{n+1} - \left. \frac{\phi S_g}{B_o} \right|_i^n \right] \\ & + \frac{V_{bi}}{5.615 \Delta t} \left[\left. \frac{\phi S_o R_s}{B_o} \right|_i^{n+1} - \left. \frac{\phi S_o R_s}{B_o} \right|_i^n \right] + q_{gi} + q_{oi} R_{si} \end{aligned} \quad (3-125)$$



فصل سوم: شبیه سازی یک بعدی جریان سیال

جریان چند فاز سیال

$$\lambda_w = \frac{\frac{1.127 K_x \cdot A_x \cdot K_{rw}}{\mu_o B_o}}{\frac{V_b}{5.615 \Delta x}} \quad \text{در این جا عبارت تحرک پذیری ' مثلاً برای جزء آب به صورت}$$

به دست می آید.
معادلات (۳-۱۲۰) تا (۳-۱۲۵) سه معادله حاکم به جریان سه فاز سیال مدل نفت سیاه بوده در حالی که شش مجهول در مسئله شامل مقادیر اشباع و فشار سه جزء وجود دارد. بنابراین علاوه بر این سه معادله نیاز به معادلات کمکی زیر نیز وجود دارد.

$$S_o + S_w + S_g = 1$$

$$P_{cow} = P_o - P_w = f(S_w, S_g) \quad (۳-۱۲۶)$$

$$P_{cog} = P_g - P_o = f(S_w, S_g)$$

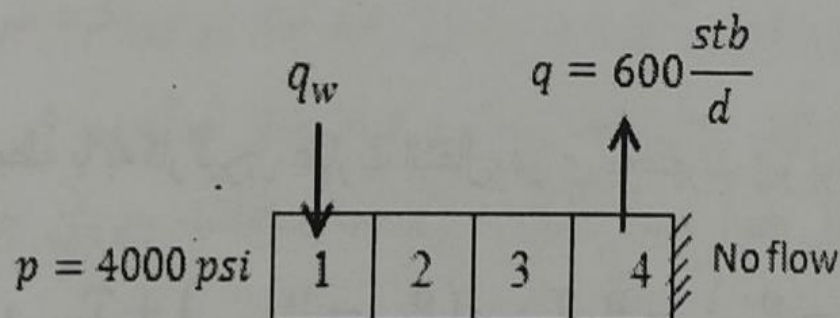
بنابراین، برای هر بلوک شبیه سازی در جریان سه فاز تعداد شش مجهول شامل $(p_w, p_o, p_g, S_w, S_o, S_g)$ وجود دارد که با حل دستگاه معادلات (۳-۱۲۳) تا (۳-۱۲۶) قابل به دست آمدن می باشد.



فصل سوم: شبیه سازی یک بعدی جریان سیال

جریان چند فاز سیال

مثال ۳-۱۹) جریان دوفازی آب و نفت در مخزن با مشخصات و شرایط مرزی در شکل زیر و با تزریق آب در بلوک اول و تولید نفت در بلوک ۴ را در نظر بگیرید. فشار اولیه مخزن $P_i = 4000 \text{ psi}$ می باشد. سایر اطلاعات مخزنی و سیال شامل $S_{wc} = 0.1, B_w = 1, B_o = 1, \mu_o = 0.5 \text{ cp}, \mu_w = 1 \text{ cp}, \Delta x = 300 \text{ ft}, \Delta y = 350 \text{ ft}, \Delta z = 40 \text{ ft}, k = 270 \text{ md}, \phi = 0.27$ می باشد.



معادله جریان به فرم تفاضل محدود را برای بلوک ۳ بنویسید.



فصل سوم: شبیه سازی یک بعدی جریان سیال

جریان چند فازی سیال

روش حل:

از آنجایی که در معادله جریان نیاز به داشتن حجم بلوک و مقادیر انتقال پذیری است ابتدا مقادیر انتقال پذیری نسبت به آب و نفت محاسبه می شود.

$$T_w = 0.001127 \frac{KA}{\mu B \Delta x} = 14.2 \frac{\text{stb}}{\text{D. psi}}$$

$$T_o = 0.001127 \frac{KA}{\mu B \Delta x} = 28.4 \frac{\text{stb}}{\text{D. psi}}$$

حجم بلوک سوم هم به صورت $V_b = 300 \times 350 \times 40 \text{ ft}^3$ محاسبه می شود. بنابراین با به کارگیری این مقادیر معادله جریان نفت به شکل تفاضل محدود برای فاز نفت به صورت زیر می باشد:

$$T_o(P_{o4} - P_{o3}) - T_o(P_{o3} - P_{o2}) = \frac{V_{b3}}{5.615 \Delta t} \left[\frac{\phi(1 - S_w)}{B_o} \Big|_3^{n+1} - \frac{\phi(1 - S_w)}{B_o} \Big|_3^n \right] + 0$$

هم چنین معادله جریان نفت به شکل تفاضل محدود برای فاز آب به صورت زیر می باشد:

$$T_w(P_{w4} - P_{w3}) - T_w(P_{w3} - P_{w2}) = \frac{V_{b3}}{5.615 \Delta t} \left[\frac{\phi S_w}{B_w} \Big|_3^{n+1} - \frac{\phi S_w}{B_w} \Big|_3^n \right] + 0$$

که در این رابطه ارتباط دو فشار از طریق فشار موئینگی ($P_c = P_o - P_w$) می باشد.



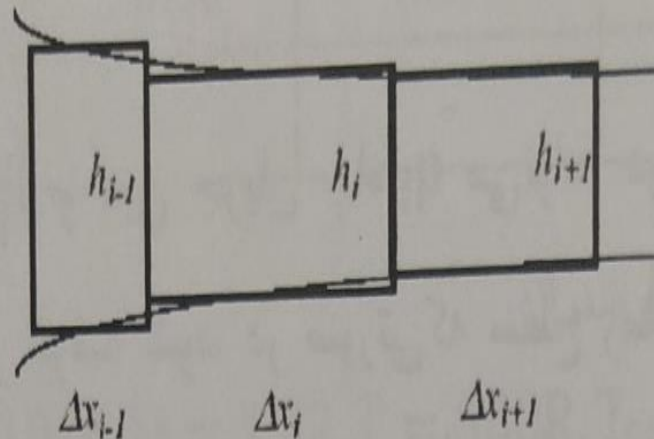
فصل سوم: شبیه سازی یک بعدی جریان سیال

تمرین : (Problems)

(۱)

فرمولاسیون تفاضل محدود برای یک مسئله جریان یک فازی در یک مخزن

افقی با ضخامت مخزنی متفاوت را بنویسید.





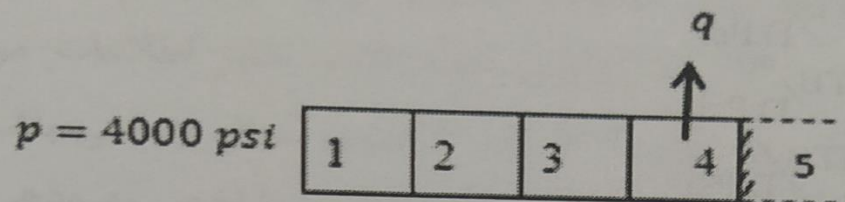
فصل سوم: شبیه سازی یک بعدی جریان سیال

تمرین : (Problems)

(۲)

جریان سیال کمی تراکم پذیر (با چگالی $\rho = 50 \frac{\text{lbm}}{\text{ft}^3}$ و $B = 1 \frac{\text{rb}}{\text{stb}}$ و گرانی $\mu = 0.5 \text{ cp}$) در یک مخزن با فشار اولیه $P_i = 4000 \text{ psi}$ شامل چهار بلوک

شبیه سازی آورده شده در شکل زیر را در نظر بگیرید. یک چاه با شعاع $r_w = 0.35 \text{ ft}$ در بلوک ۴ و با فشار جریانی ته چاهی $P_{wf4} = 3927 \text{ psi}$ در حال تولید است. سایر اطلاعات موجود شامل $S = 1, C_o = 10^{-5} \text{ psi}^{-1}, C_f = 10^{-6} \text{ psi}^{-1}, \phi = 0.27, k = 270 \text{ md}$ ، $\Delta x = 300 \text{ ft}, \Delta y = 350, \Delta z = 40 \text{ ft}$ می باشد. با استفاده از فرمولاسیون ضمنی توزیع فشار در بلوک ها را پس از زمان یک روز ($\Delta t = 1 \text{ day}$) محاسبه نمایید.

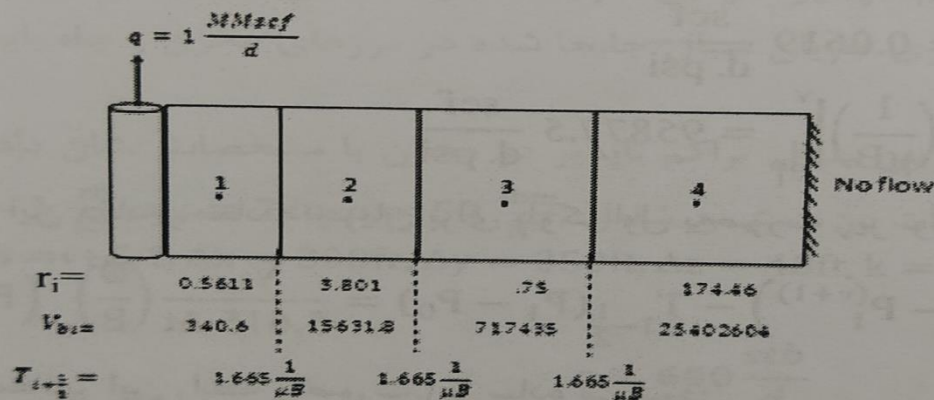




فصل سوم: شبیه سازی یک بعدی جریان سیال

تمرین : (Problems)
(۳)

جریان گاز در یک مدل مخزن تک چاهی با دبی تولیدی $1 \frac{\text{MMScf}}{\text{day}}$ در مختصات استوانه‌ای با ابعاد و حجم بلوک‌های مشخص شده در شکل زیر را در نظر بگیرید. مساحت تحت تخلیه چاه ۲۰ هکتار و سایر اطلاعات شامل $P_{w\min} = 515 \text{ psi}$, $r_w = 6 \text{ in}$, $P_i = 4015 \text{ psi}$, $\Delta t = 30.42 \text{ days}$, $\phi = 0.13$, $k = 15 \text{ md}$, $\Delta z = 30 \text{ ft}$ می‌باشد.



با فرض به کارگیری عبارت انتقال پذیری بالادستی جریان توزیع فشار را در مخزن به دست آورید. مشخصات سیال نسبت به فشار در جدول زیر داده شده است.

P, psi	B _g , rb/scf	μ cp
4015	7.79×10^{-4}	0.0223
3815	8.08×10^{-4}	0.0217
3615	8.4×10^{-4}	0.0211



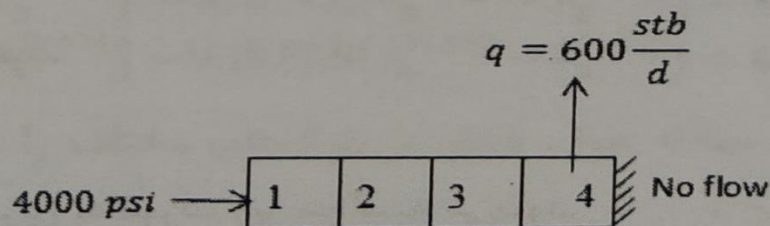
فصل سوم: شبیه سازی یک بعدی جریان سیال

تمرین : (Problems)

(۴)

جریان سیال تک فاز سیال کمی تراکم پذیر در مخزن زیر را در نظر بگیرید.

سایر اطلاعات در دسترس شامل $\rho = 50 \frac{\text{lbm}}{\text{ft}^3}$, $P_i = 4000 \text{ psi}$, $C_r = 10^{-6} \frac{1}{\text{psi}}$, $C_o = 10^{-5} \frac{1}{\text{psi}}$, $B = 1 \frac{\text{rb}}{\text{stb}}$, $r_w = 7 \text{ in}$, $S = 1.5$, $\mu_o = 0.5 \text{ cp}$, $\Delta x = 300 \text{ ft}$, $\Delta y = 350 \text{ ft}$, $\Delta z = 40 \text{ ft}$, $k = 270 \text{ md}$, $\phi = 0.27$ می باشد.



توزیع فشار در دو گام زمانی در جدول زیر آورده شده است.

	$P_1 (\text{psi})$	$P_2 (\text{psi})$	$P_3 (\text{psi})$	$P_4 (\text{psi})$
t_1	3993.7	3980.7	3966.2	3949.1
t_2	3990.9	3972.6	3953.7	3933.7

با استفاده از اطلاعات مسئله صحت موازنه جرمی را بررسی نمایید.

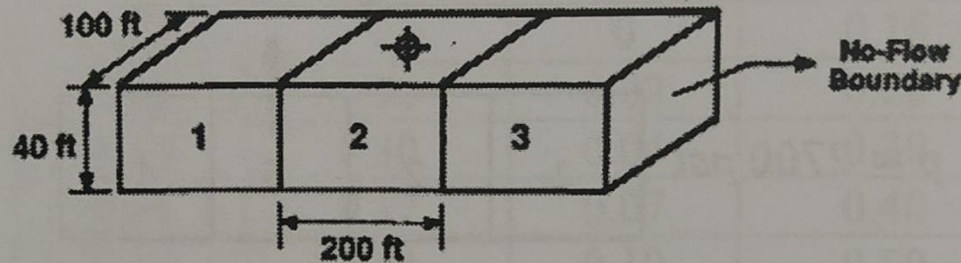


فصل سوم: شبیه سازی یک بعدی جریان سیال

تمرین : (Problems)

(۵)

جریان سیال تراکم ناپذیری با گرانیوی ۲ سانتی پوز در محیط مخزن یک بعدی، همگون و افقی متشکل از ۳ بلوک با مشخصات و شرایط مرزی نشان داده شده در شکل زیر در نظر بگیرید.



اگر چاهی در بلوک ۲ با نرخ ثابت ۴۵۰ (بشکه نفت استاندارد در روز) تولید کند، بطوریکه توزیع فشار در بلوک‌ها $p_1=2400$ psi , $p_2=800$ psi , $p_3=1600$ psi باشد و شرط مرزی در سمت چپ سیستم نامعلوم باشد، تراوایی سیستم را بیابید؟ اگر ابعاد بلوک‌ها با حفظ توزیع فشار بلوک‌ها دو برابر شود، دبی ورودی به چاه چه مقدار خواهد شد؟

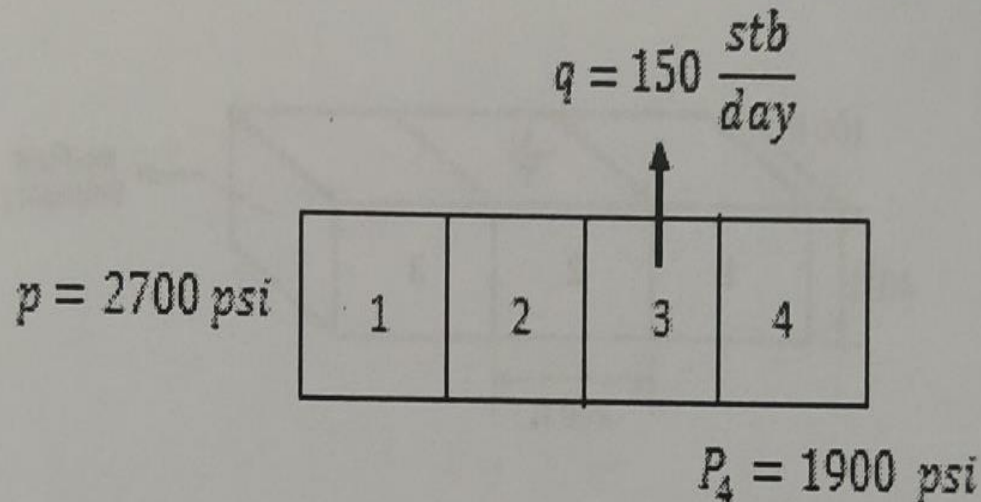


فصل سوم: شبیه سازی یک بعدی جریان سیال

تمرین : (Problems)

(۶)

جریان یک فازی سیال تراکمناپذیر ($C_0 = C_f = 0, B = 1 \frac{rb}{stb}$) با گرانی $\mu = 1.5cp$ در یک مخزن یک بعدی با تراوایی $K = 70 md$ و مشخصات $\Delta x = 400, \Delta y = 660, \Delta z = 10ft$ و شرایط مرزی شکل زیر در حال جریان است. توزیع فشار در مخزن و دبی جریانی در مرز راست مخزن را محاسبه نمایید.





فصل سوم: شبیه سازی یک بعدی جریان سیال

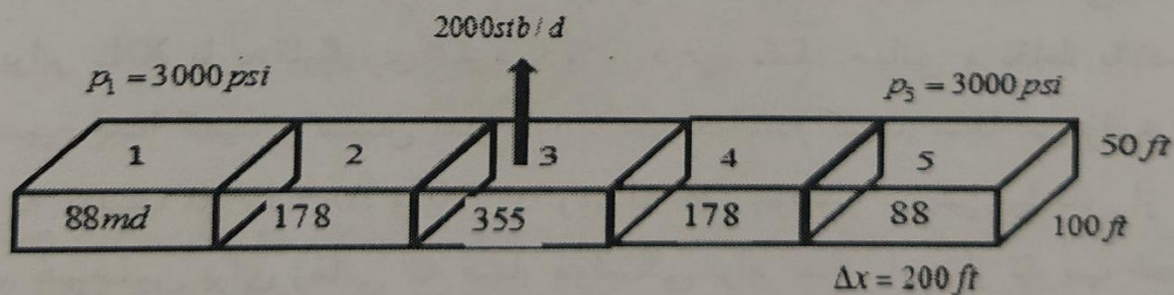
تمرین : (Problems)

(۷)

جریان نفت در یک مخزن یک بعدی افقی متشکل از پنج بلوک با تخلخل ۲۰ درصد و تراوایی ناهمگون (شکل زیر) در حال جریان است. چاه تولیدی در مرکز بلوک ۳ با دبی ۲۰۰۰ STB/day در حال تولید می باشد. مرزهای مخزن توسط آبده قوی محصور شده بطوریکه فشار بلوک های ۱ و ۵ در مقدار ۳۰۰۰ پام ثابت می ماند. سایر اطلاعات شامل $\mu = 1 \text{ cp}$, $Bo = 1 \frac{rb}{stb}$, $c_o = 5 \times 10^{-5} \text{ psi}^{-1}$ می باشد.

(الف) با فرض سیال کمی تراکم پذیر مقدار حداکثری گام زمانی شبیه سازی قابل اعتماد برای پایداری فرمولاسیون صریح را محاسبه نمایید.

(ب) با فرض سیال تراکم ناپذیر توزیع فشار در مخزن را پس از یک و دو گام زمانی معادل ۸۰ درصد مقدار محاسبه شده در بخش (الف) به دست آورید.



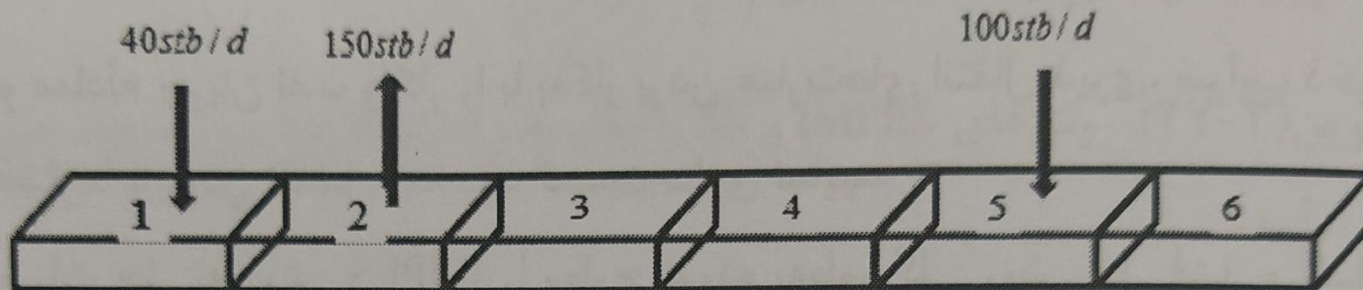


فصل سوم: شبیه سازی یک بعدی جریان سیال

تمرین : (Problems)

(۸)

جریان تک فازی سیال در یک مخزن یک بعدی شامل ۶ بلوک (شکل زیر) با مرزهای بدون جریان در هر دو طرف آن را در نظر بگیرید. ابعاد بلوکها $\Delta x = 1000ft, \Delta y = 750ft, \Delta z = 50ft$ می باشد. سایر داده ها شامل $k_x = 50md, \phi = 0.27, c = 1.6 \times 10^{-6}, \mu = 30cp, p_i = 4500psia, B = 1rb/stb$ می باشد. حداکثر گام زمانی برای اطمینان از پایداری جواب (Δt_m) را برای روش فرمولاسیون صریح محاسبه کنید و محاسبات روش صریح را برای پنج گام زمانی با $\Delta t = 0.8\Delta t_m$ اجرا کنید.





فصل سوم: شبیه سازی یک بعدی جریان سیال

تمرین : (Problems)

(۹)

یک سیال کمی تراکم پذیر با مشخصات $c_0 = 5 \times 10^{-5} \text{psi}^{-1}$, $\mu =$

2cp , $B_0 = 1$ در مخزنی همگون و یک بعدی با تراوایی ۱۵۰ میلی داری و تخلخل ۲۷٪ در

حال جریان است. مخزن شامل ۴ بلوک شبیه سازی با سطح مقطع به مساحت ۲۵۰۰ فوت مربع

و اندازه بلوک ۱۵۰ فوت است. فشار اولیه مخزن ۳۵۰۰ psi و فشار جریانی ته چاه تولیدی در

بلوک چهارم ۱۸۰۰ psi می باشد. همچنین چاه با دبی ۱۰۰ stb/d تولید می کند. حداکثر گام

زمانی که شرایط پایداری را برای روش فرمولاسیون صریح ایجاد کند، بیابید و همچنین توزیع

فشار با فرمولاسیون ضمنی را در زمان $t=8 \text{days}$ به دست آورید.

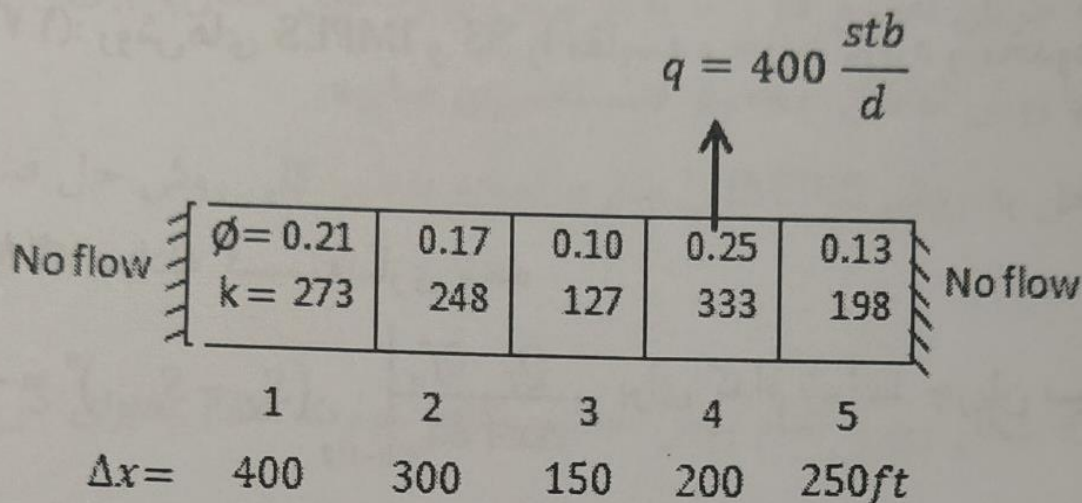


فصل سوم: شبیه سازی یک بعدی جریان سیال

تمرین : (Problems)

(۱۰)

جریان سیال کمی تراکم پذیر در مخزن ناهمگون زیر را در نظر بگیرید.



اطلاعات در دسترس شامل $P_i = 3000 \text{ psi}$, $C_o = 2.5 \times 10^{-5} \frac{1}{\text{psi}}$, $B = 1 \frac{rb}{stb}$, $r_w = 4 \text{ in}$, $S = 0$, $\mu_o = 1.5 \text{ cp}$, $\Delta y = 500$, $\Delta z = 50 \text{ ft}$, $\Delta t = 5 \text{ days}$ می باشد. با استفاده از فرمولاسیون ضمنی توزیع فشار در این مخزن در زمان های ۵، ۱۰، ۲۰ و ۵۰ روز به دست آورید.