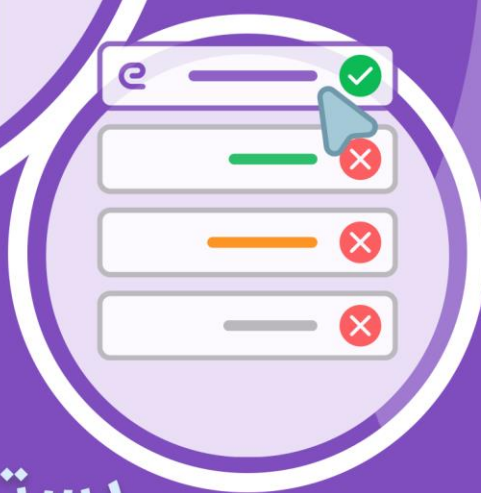
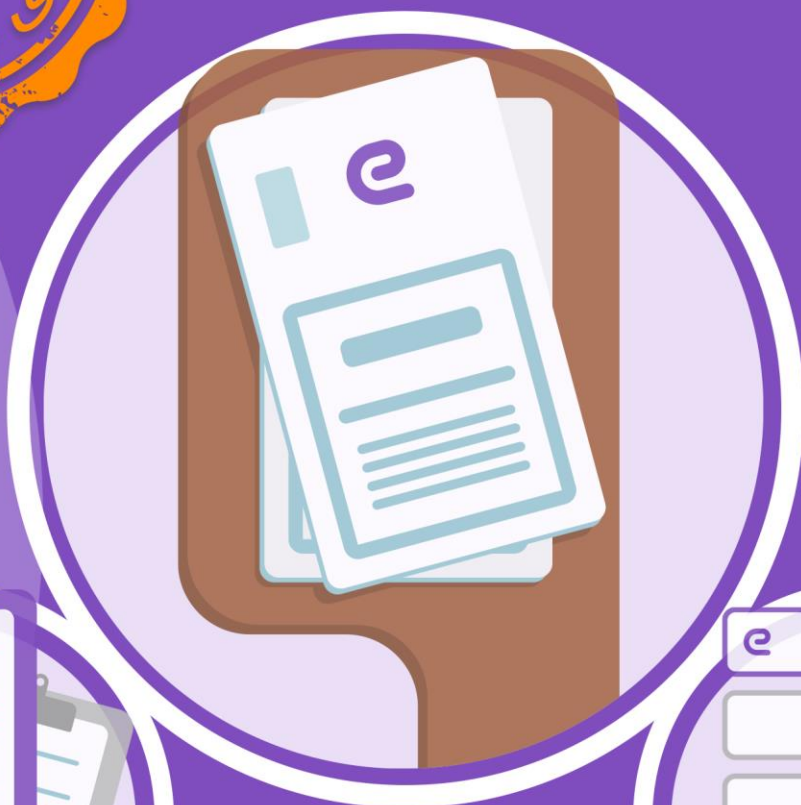


ایکاستخدام
e-estekhdam



بسته درسنامه و تست ریاضی و آمار مقدماتی

حیطه عمومی با پاسخ نامه تشریحی

ویژه آمادگی
برای آزمون های
جدید

درسنامه جامع آموزشی حیطه عمومی
اصل سوالات آزمون های استخدامی
سوالات چهارگزینه ای با پاسخ نامه تشریحی

مقدمه

بسته‌ای که در دستان شماست، «درسنامه و تست‌های مبحث ریاضی و آمار مقدماتی» یک راهنمای جامع و کاملاً عملی برای آمادگی و پیشرفت در بخش مهم و اجتناب‌ناپذیر ریاضی و آمار مقدماتی در آزمون‌های استخدامی است. هدف ما این است تا بتوانیم یک منبعی مفید، روشن و کاربردی ارائه دهیم که با آن، شما عزیزان بتوانید بر تمامی جوانب این بخش از آزمون‌های استخدامی مسلط شوید.

ریاضی و آمار مقدماتی یکی از مهم‌ترین عناصر آزمونی است که سازمان‌ها، شرکت‌ها و ادارات دولتی در فرایند استخدام به آن توجه می‌کنند.

ما در تهیه این کتاب سعی کرده‌ایم تا مطالب را با زبانی ساده و روان، همراه با مثال‌های واقعی و متنوع ارائه کنیم، تا شما بتوانید به راحتی با این مفاهیم آشنا شوید و آن‌ها را درک کنید. همچنین، برای ارتقا کیفیت یادگیری، تست‌های متعددی در اختیار شما قرار داده‌ایم تا بتوانید در حین مطالعه، دانش خود را به چالش بکشید و مهارت‌های خود را افزایش دهید.

امیدواریم که این کتاب بتواند راهنمایی مفیدی برای شما باشد و شما را در آزمون‌های استخدامی به موفقیت برساند. با این امید که روزی دنیای کاری ایران شاهد حضور فعال و موثر شما باشد، از شما برای انتخاب این کتاب تشکر می‌کنیم. موفق و پیروز باشید.

با آرزوی موفقیت برای شما، تیم آموزشی ای استخدا

نسخه 1,1,1: همراهان گرامی، هیچ کتابی و بسته‌ای خالی از اشکال نیست و «ای استخدا» از داوطلبان گرامی خواهشمند است که ما را از انتقادات و پیشنهادات خود بهره‌مند سازند. بنابراین انتقادات و پیشنهادات ارزنده خود را به این ایمیل ارسال نمایید:

info@e-estekhdam.com

فهرست مطالب

۱۱	فصل اول، محاسبات توان، رادیکال‌ها و اتحادها
۱۱	بخش اول: توان و رادیکال
۱۱	قواعد محاسبه با توان
۱۲	ریشه n ام
۱۲	قواعد
۱۲	بخش دوم: اتحادهای جبری
۱۴	تقسیم چندجمله‌ای بر چندجمله‌ای
۱۷	پرسش‌های چهارگزینه‌ای فصل اول، محاسبات توان، رادیکال‌ها و اتحادها
۲۵	پاسخ پرسش‌های چهارگزینه‌ای فصل اول، محاسبات توان، رادیکال‌ها و اتحادها
۳۵	فصل دوم، مجموعه‌ها
۳۵	بخش اول: مفهوم مجموعه
۳۶	زیرمجموعه
۳۷	مجموعه مرجع
۳۷	نمودار ون
۳۷	بخش دوم: چند مطلب ساده
۳۹	جبر مجموعه‌ها
۴۰	اجتماع دو مجموعه
۴۰	چند مطلب ساده
۴۱	اشتراک دو مجموعه
۴۲	بخش سوم: قانون‌های توزیع‌پذیری
۴۲	چند مطلب ساده
۴۳	اجتماع و اشتراک چند مجموعه
۴۴	تفاضل دو مجموعه
۴۴	متکم یک مجموعه
۴۵	قانون‌های دمورگان
۴۵	تفاضل متقارن دو مجموعه
۴۷	پرسش‌های چهارگزینه‌ای فصل دوم، مجموعه‌ها
۵۴	پاسخ پرسش‌های چهارگزینه‌ای فصل دوم، مجموعه‌ها
۶۲	فصل سوم: دنباله‌ها
۶۲	بخش اول: آشنایی با دنباله‌ها

۶۳	دنباله حسابی
۶۷	مجموع جملات دنباله حسابی
۶۸	دنباله هندسی
۷۲	مجموع جملات دنباله هندسی
۷۴	حد مجموع جملات دنباله هندسی
۷۷	پرسش‌های چهارگزینه‌ای فصل سوم، دنباله‌ها
۹۱	فصل چهارم، معادله و نامعادله درجه دوم
۹۱	بخش اول: معادله درجه دوم
۹۱	حل معادله درجه دوم به روش تجزیه
۹۱	روش کلی حل معادله‌های درجه دوم
۱۰۱	پرسش‌های چهارگزینه‌ای فصل چهارم، معادله و نامعادله درجه دوم
۱۱۱	پاسخ پرسش‌های چهارگزینه‌ای فصل چهارم، معادله و نامعادله درجه دوم
۱۲۹	فصل پنجم: تابع نمایی و لگاریتمی
۱۲۹	بخش اول: تابع
۱۲۹	تابع لگاریتمی
۱۳۱	قاعده تغییر پایه
۱۳۲	ویژگی‌هایی دیگر از تابع لگاریتمی
۱۳۳	پرسش‌های چهارگزینه‌ای فصل پنجم: تابع نمایی و لگاریتمی
۱۳۹	فصل ششم، مثلثات
۱۳۹	بخش اول: مثلث قائم الزاویه
۱۴۱	بخش دوم: دایره مثلثاتی
۱۴۲	روابط بین نسبت‌های مثلثاتی
۱۴۳	مقیاس رادیان
۱۴۳	نسبت‌های مثلثاتی زوایای ۴۵° ، ۳۰° و ۶۰°
۱۴۴	محاسبه نسبت‌های مثلثاتی زاویه ۹۰°
۱۴۶	قوانین جمع
۱۴۸	فرمول‌های زاویه مضاعف
۱۴۹	پرسش‌های چهارگزینه‌ای فصل ششم، مثلثات
۱۵۳	پاسخ پرسش‌های چهارگزینه‌ای فصل ششم، مثلثات
۱۵۸	فصل هفتم، تابع
۱۵۸	بخش اول: مفهوم تابع

۱۵۹	نماد تابع
۱۶۲	اعمال بر توابع
۱۶۳	توابع مرکب
۱۶۵	نمودار تابع
۱۶۶	نمودار تابع قدرمطلق
۱۶۶	نمودار تابع درجه دوم
۱۶۶	تابع جزء صحیح
۱۶۷	قضیه: (انتقال نمودار یک تابع)
۱۶۹	تابع وارون
۱۷۰	پرسش‌های چهارگزینه‌ای فصل هفتم، تابع
۱۸۲	پاسخ پرسش‌های چهارگزینه‌ای فصل هفتم، تابع
۱۹۶	فصل هشتم، آنالیز ترکیبی
۱۹۶	بخش اول: اصول
۱۹۶	اصل ضرب
۱۹۷	اصل جمع
۱۹۸	اصل متمم
۱۹۸	اصل شمول و عدم شمول
۱۹۸	فاکتوریل‌ها
۱۹۹	جایگشت
۲۰۰	جایگشت‌های با تکرار
۲۰۱	ترکیب nr
۲۰۳	پرسش‌های چهارگزینه‌ای فصل هشتم، آنالیز ترکیبی
۲۰۷	پاسخ پرسش‌های چهارگزینه‌ای فصل هشتم، آنالیز ترکیبی
۲۱۱	فصل نهم، احتمال
۲۱۱	بخش اول: فضای نمونه و پیشامدها
۲۱۱	اعمال روی پیشامدها
۲۱۲	پیشامدهای ناسازگار
۲۱۵	احتمال شرطی
۲۱۷	قاعده ضرب احتمال
۲۱۸	پیشامدهای مستقل
۲۱۹	خواص پیشامدهای مستقل
۲۲۰	فرمول احتمال کل

- پرسش‌های چهارگزینه‌ای فصل نهم، احتمال ۲۲۲
- پاسخ پرسش‌های چهارگزینه‌ای فصل نهم، احتمال ۲۲۹
- فصل دهم، آمار ۲۳۵
- بخش اول: آمار چیست؟ ۲۳۵
- جامعه و نمونه ۲۳۵
- جمع‌آوری داده‌ها ۲۳۶
- متغیرهای تصادفی ۲۳۷
- نمودارها و تحلیل داده‌ها ۲۴۲
- نمودار هیستوگرام (مستطیلی) ۲۴۳
- نمودار چندبر فراوانی ۲۴۳
- نمودار دایره‌ای ۲۴۴
- نمودار تجمعی (اجایو) ۲۴۵
- نمودار ساقه و برگ ۲۴۵
- شاخص‌های مرکزی ۲۴۶
- شاخص‌های پراکندگی ۲۴۹
- ضریب تغییرات ۲۵۲
- پرسش‌های چهارگزینه‌ای فصل دهم، آمار ۲۵۳
- پاسخ پرسش‌های چهارگزینه‌ای فصل دهم، آمار ۲۸۰
- فصل یازدهم، دستگاه مختصات و معادله خط ۳۰۷
- بخش اول: دستگاه‌های مختصات ۳۰۷
- نقطه در دستگاه مختصات قائم ۳۰۷
- مختصات وسط یک پاره‌خط ۳۰۷
- بخش دوم: معادله خط ۳۰۹
- شیب خط: (ضریب زاویه خط) ۳۱۰
- تعیین معادله خط ۳۱۱
- خطوط هم‌رس (متقارب) ۳۱۲
- خطوط موازی ۳۱۳
- خطوط عمود بر هم ۳۱۳
- فاصله یک نقطه از یک خط ۳۱۴
- فاصله دو خط موازی ۳۱۵
- پرسش‌های چهارگزینه‌ای فصل یازدهم، دستگاه مختصات و معادله خط ۳۱۶
- پاسخ پرسش‌های چهارگزینه‌ای فصل یازدهم، دستگاه مختصات و معادله خط ۳۲۱

- ۳۲۸..... فصل دوازدهم: هندسه
- ۳۲۸..... متوازی‌الاضلاع
- ۳۲۸..... مربع
- ۳۲۹..... مستطیل
- ۳۲۹..... لوزی
- ۳۳۰..... ذوزنقه
- ۳۳۱..... مثلث‌ها
- ۳۳۱..... مثلث قائم‌الزاویه
- ۳۳۳..... مثلث قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین
- ۳۳۴..... مثلث متساوی‌الاضلاع
- ۳۳۴..... شش ضلعی منتظم
- ۳۳۶..... دایره
- ۳۳۶..... قضیه تالس و تشابه مثلث‌ها
- ۳۳۷..... مثلث‌های متشابه
- ۳۴۱..... پرسش‌های چهارگزینه‌ای فصل دوازدهم، هندسه
- ۳۴۵..... فصل سیزدهم، ماتریسها
- ۳۴۵..... بخش اول: آشنایی با ماتریس
- ۳۴۶..... بخش دوم: جبر ماتریسها
- ۳۴۶..... جمع ماتریسها
- ۳۴۶..... ضرب یک عدد حقیقی در یک ماتریس
- ۳۴۷..... قرینه یک ماتریس
- ۳۴۸..... ضرب ماتریسها
- ۳۵۲..... ماتریس همانی
- ۳۵۳..... دترمینان
- ۳۵۵..... ماتریسهای وارون‌پذیر

به دلیل ثبت قانونی مالکیت حقوق کتاب و بسته حاضر و نشر الکترونیک اثر برای صاحب امتیاز آن، شرکت توسعه‌گران آرمانگر پردازش (سامانه ای استخدام) محفوظ بوده و به موجب ماده ۵ و ۲۳ قانون حمایت از حقوق مؤلفان، مصنفان و هنرمندان مصوب 1343/10/11 هیچ شخص حقیقی و حقوقی حق کپی‌برداری و بهره‌برداری (کل یا بخشی) از آن را ندارد. بدیهی است متخلفان به مستند این قانون تحت پیگرد و اقدامات قانونی و قضایی مالک اثر قرار خواهند گرفت.

خرید نسخه قانونی از
«ای استخدام»



عضویت در وبسایت «ای استخدام» 	ثبت نام در «ای استخدام» و دریافت آگهی استخدامی
جستجو در آگهی‌های «ای استخدام» 	جستجوی مشاغل در «ای استخدام»
دریافت برنامه موبایل «ای استخدام» 	دریافت برنامه موبایل «ای استخدام»
عضویت در کانال تلگرام «ای استخدام» 	کانال‌های تلگرامی «ای استخدام»
دنبال کردن اینستاگرام «ای استخدام» 	اینستاگرام رسمی «ای استخدام»
رزومه‌ساز آنلاین «ای استخدام» 	رزومه‌ساز آنلاین و رایگان «ای استخدام»
سوالات عمومی و تخصصی استخدامی 	سوالات عمومی و تخصصی آزمون‌های استخدامی
کتاب جامع آزمون‌های استخدامی 	خرید کتاب جامع درس و نکات «ای استخدام»

کاربران و استفاده‌کنندگان محترم؛

همانطور که از نام این محصول مشخص است، سوالاتی مشابه شرایط روز آزمون بر حسب تجربیات آزمون‌های ادوار قبلی و بر اساس تالیف تیم آموزشی «ای استخدام» جهت تخمین و تقریب سطح آمادگی، تقدیم حضور شده است. از منابع مطالعاتی، بسته‌ها، دفترچه‌های شبیه‌ساز و ... صرفاً انتظار منابع کمک آموزشی و یاری‌رسان در جهت شناخت نقاط ضعف و قوت می‌توان داشت و به هیچ عنوان به معنای تکرار عینی و شکلی این نمونه سوالات و تست‌ها در روز آزمون نیست. خواهشمندیم با مطالعه کامل منابع اصلی آزمون، از این ابزارها و محصولات نهایت استفاده لازم را معمول فرمایید.

محصولات مرتبط:

کاربران گرامی؛

شما می‌توانید به منظور تهیه بسته‌های سوالات عمومی و اختصاصی مرتبط با «آزمون‌های استخدامی وزارتخانه‌ها و سازمان‌ها» از طریق کلید زیر اقدام فرمایید. به این منظور کافیست پس از لمس کلید زیر، در صفحه باز شده بسته مورد نظرتان را انتخاب و تهیه فرمایید:

برای مشاهده و خرید
سوالات کلیک کنید



این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و داندود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

فصل اول، محاسبات توان، رادیکال ها و اتحادها

بخش اول: توان و رادیکال

فرض کنیم a یک عدد حقیقی و $n > 1$ یک عدد طبیعی باشد، در این صورت:

$$a^n = \overbrace{a \times a \times \dots \times a}^{\text{تا } n}$$

به عنوان مثال:

$$3^4 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 \quad \text{و} \quad (\sqrt{5})^6 = \sqrt{5} \times \sqrt{5} \times \sqrt{5} \times \sqrt{5} \times \sqrt{5} \times \sqrt{5}$$

بنا به تعریف واضح است که $a^1 = a$ ، ضمناً به ازای $a \neq 0$ ، حاصل a^0 را برابر ۱ در نظر می گیریم.

در نمایش توانی اعداد، عددی که در خودش ضرب می شود را پایه و تعداد دفعاتی که آن عدد در عمل ضرب نوشته می شود را توان می گوئیم.

قواعد محاسبه با توان

$$1. \quad a^n \times a^m = a^{n+m}$$

$$4. \quad a^n \div b^n = \frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$$

$$2. \quad a^n \div a^m = \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$$

$$5. \quad (a^n)^m = a^{nm}$$

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و داندود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

$$3. \quad a^n \times b^n = (ab)^n$$

$$6. \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n$$

ریشه n اُم

عدد a را ریشه n اُم عدد b ، گوییم هرگاه $a^n = b$ و این طور می نویسیم $a = \sqrt[n]{b}$ ، بنابراین:

$$a = \sqrt[n]{b} \Leftrightarrow a^n = b$$

به عنوان مثال:

$$3^4 = 81 \Leftrightarrow \sqrt[4]{81} = 3$$

در صورتی که n زوج باشد و داشته باشیم $\sqrt[n]{b}$ آن گاه فرض بر این است که b عددی نامنفی است. ضمناً با فرض زوج بودن n ، حاصل $\sqrt[n]{b}$ عددی نامنفی است.

قواعد

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}} \quad 3.$$

$$\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab} \quad 2.$$

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} \quad 1.$$

بخش دوم: اتحادهای جبری

معادله‌ای که به ازای هر عدد حقیقی برقرار باشد، اتحاد نام دارد. اتحادها اغلب برای ساده سازی عبارتهای جبری به کار می‌رود. مهم‌ترین اتحادهای جبری عبارت‌اند از:

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی‌برداری؛ به اشتراک‌گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

۱. اتحاد مربع دو

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

جمله‌ای

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

۲. اتحاد مزدوج

$$(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$$

۳. اتحاد جمله

مشترک

$$\begin{aligned} a^3 + b^3 &= (a + b)(a^2 - ab + b^2) \\ &= (a + b)^3 - 3ab(a + b) \end{aligned}$$

۴. اتحاد مجموع

مکعب‌ها

$$\begin{aligned} a^3 - b^3 &= (a - b)(a^2 + ab + b^2) \\ &= (a - b)^3 + 3ab(a - b) \end{aligned}$$

۵. اتحاد تفاضل

مکعب‌ها

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی‌برداری؛ به اشتراک‌گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

تقسیم چندجمله‌ای بر چندجمله‌ای

به عنوان مثال تقسیم چندجمله‌ای $2x^3 - x^2 + x + 4$ را بر چندجمله‌ای $x + 1$ ، بررسی می‌کنیم. عمل تقسیم را در شکلی مانند شکل مقابل که همانند تقسیم اعداد طبیعی است نشان داده‌ایم. در یک تقسیم، درجه مقسوم باید بزرگ‌تر یا مساوی درجه مقسوم‌علیه باشد.

مقسوم	مقسوم علیه
	خارج قسمت
باقی‌مانده	

مرحله اول: ابتدا مقسوم و مقسوم‌علیه را به شکل استاندارد یعنی از بیشترین توان به کمترین توان متغیر می‌نویسیم.

$$\begin{array}{r|l} 2x^3 - x^2 + x + 4 & x + 1 \\ \hline & 2x^2 \end{array}$$

مرحله دوم: اولین جمله مقسوم را بر اولین جمله مقسوم‌علیه تقسیم می‌کنیم و حاصل را در محل خارج قسمت می‌نویسیم.

$$\begin{array}{r|l} 2x^3 - x^2 + x + 4 & x + 1 \\ -2x^3 - 2x^2 & \hline \hline -3x^2 + x + 4 & 2x^2 \end{array}$$

مرحله سوم: خارج قسمت به‌دست آمده در مرحله قبل را در مقسوم‌علیه ضرب می‌کنیم و قرینه آن را زیر مقسوم می‌نویسیم و با مقسوم جمع می‌کنیم.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

$$\begin{array}{r|l}
 2x^3 - x^2 + x + 4 & x + 1 \\
 \hline
 -2x^3 - 2x^2 & \\
 \hline
 -3x^2 + x + 4 & \\
 3x^2 + 3x & \\
 \hline
 4x + 4 &
 \end{array}$$

مرحله چهارم: چندجمله‌ای به دست آمده جدید را مانند یک مقسوم علیه جدید می‌گیریم و مراحل دوم و سوم را تکرار می‌کنیم.

مرحله پنجم: مرحله چهارم را آن قدر تکرار می‌کنیم تا در محل مقسوم علیه‌های جدید یک چندجمله‌ای با درجه کمتر از درجه مقسوم علیه به دست آید.

$$\begin{array}{r|l}
 2x^3 - x^2 + x + 4 & x + 1 \\
 \hline
 -2x^3 - 2x^2 & \\
 \hline
 -3x^2 + x + 4 & \\
 3x^2 + 3x & \\
 \hline
 4x + 4 & \\
 -4x - 4 & \\
 \hline
 0 &
 \end{array}$$

در این مرحله، اگر مقسوم بر مقسوم علیه بخش پذیر باشد، در محل مقسوم علیه‌های جدید چندجمله‌ای صفر به دست می‌آید. اما اگر مقسوم بر مقسوم علیه بخش پذیر نباشد، با این عملیات، یک چندجمله‌ای با درجه کمتر از درجه مقسوم علیه به دست می‌آید که آن را باقی مانده عمل تقسیم می‌نامند.

قضیه: باقی مانده تقسیم چندجمله‌ای $p(x)$ بر $x - a$ برابر است با $p(a)$.

به عنوان مثال باقی مانده تقسیم $p(x) = 3x^4 - 7x^2 + 5x - 1$ بر $x + 2$ برابر است با:

$$p(-2) = 3(-2)^4 - 7(-2)^2 + 5(-2) - 1 = 48 - 28 - 10 - 1 = 9$$

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

تست: باقی مانده تقسیم چند جمله‌ای $p(x)$ بر $x - 1$ و $2x + 1$ به ترتیب ۸ و ۵ است. باقی مانده تقسیم $p(x)$ بر $2x^2 - x - 1$ کدام است؟

$$2x - 3 \quad (۴)$$

$$2x + 6 \quad (۳)$$

$$x + 3 \quad (۲)$$

$$-x + 4 \quad (۱)$$

پاسخ: گزینه ۳. باقی مانده تقسیم $p(x)$ بر $x - 1$ برابر ۸ است پس $p(1) = 8$ و باقی مانده تقسیم آن بر $2x + 1$ برابر ۵، پس $p\left(\frac{-1}{2}\right) = 5$. باقی مانده تقسیم $p(x)$ بر $2x^2 - x - 1$ یک چند جمله‌ای درجه یک به صورت $mx + n$ است و $p(x) = (2x^2 - x - 1)Q(x) + mx + n$

همچنین داریم: $p(1) = 8 \Rightarrow (2(1)^2 - 1 - 1)Q(1) + m(1) + n = 8 \Rightarrow m + n = 8$

$$p\left(\frac{-1}{2}\right) = 5 \Rightarrow \left(2\left(\frac{-1}{2}\right)^2 - \left(\frac{-1}{2}\right) - 1\right)Q\left(\frac{-1}{2}\right) + m\left(\frac{-1}{2}\right) + n = 5 \Rightarrow -\frac{1}{2}m + n = 5$$

از حل دستگاه معادلات به دست آمده مقادیر m و n به دست می آیند.

$$\begin{cases} m + n = 8 \\ -\frac{1}{2}m + n = 5 \end{cases} \Rightarrow m = 2, n = 6$$

بنابراین باقی مانده تقسیم $p(x)$ بر $2x^2 - x - 1$ به صورت $2x + 6$ است.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی‌برداری؛ به اشتراک‌گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و داندود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

پرسش‌های چهارگزینه‌ای فصل اول، محاسبات توان، رادیکال‌ها و اتحادها

۱. حاصل $\frac{x-1}{\sqrt{x-6+15+3}}$ ، کدام است؟ $(x > 1)$ (فراگیر هشتم و آموزش و پرورش - ۹۹)

- (۱) صفر
- (۲) $\sqrt{x-1}$
- (۳) $\sqrt{x+1}$
- (۴) ۱

۲. در کسر حاصل از گویا کردن مخرج $\frac{1}{\sqrt[3]{x}-\sqrt{y}}$ کدام عامل وجود دارد؟ (فراگیر پنجم و آموزش و پرورش - ۹۷)

- (۱) $(\sqrt[3]{x^3} + y)$
- (۲) $(\sqrt[3]{x^3} - y)$
- (۳) $(\sqrt[3]{x^4} - y\sqrt[3]{x^2} + y^3)$
- (۴) $(\sqrt[3]{x^4} + y\sqrt[3]{x^2} + y^3)$

۳. اگر $A = (1 + 0.1)(1 + 0.1^2)(1 + 0.1^4)$ آن‌گاه، عدد A دارای چند رقم اعشار است؟ (فراگیر پنجم و آموزش و پرورش - ۹۷)

- (۱) ۱۶
- (۲) ۷
- (۳) ۸
- (۴) ۱۵

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی‌برداری؛ به اشتراک‌گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و داندود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

۴. اگر $a = 2$ ، آنگاه حاصل عبارت $\sqrt{(-a)^2} + \sqrt{(1-a)^2}$ کدام است؟ (بانک ملت - ۹۴)

- ۵ (۱)
- ۳ (۲)
- ۳ (۳)
- ۵ (۴)

۵. اگر حاصل ضرب و مجموع مربعات دو عدد به ترتیب ۶- و ۱۳ باشد، آنگاه قدرمطلق مجموع مکعبات آن‌ها کدام است؟ (دانشگاه‌های علوم پزشکی و وزارت بهداشت - ۹۹)

- ۸ (۱)
- ۷ (۲)
- ۱۹ (۳)
- ۱۸ (۴)

۶. حاصل $(1 + \frac{1}{\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2} + 1}) \sqrt[3]{0.5}$ کدام است؟ (دستگاه‌های اجرایی - فراگیر دوم - ۹۴)

- $\frac{1}{2}$ (۱)
- $\sqrt[3]{2}$ (۲)
- $\sqrt{5}$ (۳)
- ۱ (۴)

۷. ساده شده عبارت $\frac{1}{(\sqrt[4]{6} - \sqrt[4]{5})(\sqrt{5} + \sqrt{6})}$ کدام است؟ (فراگیر هشتم و آموزش و پرورش - ۹۹)

- $\sqrt{5} + \sqrt{6}$ (۱)
- $-\sqrt{5} - \sqrt{6}$ (۲)
- $\sqrt{6} - \sqrt{5}$ (۳)
- $\sqrt[4]{6} + \sqrt[4]{5}$ (۴)

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی‌برداری؛ به اشتراک‌گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و داندود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

۸. حاصل $\sqrt[5]{9\sqrt[5]{3}} \div \sqrt[5]{9}$ کدام است؟ (آموزش و پرورش - ۹۵)

(۱) $\sqrt[5]{3}$

(۲) $\sqrt[5]{3}$

(۳) $\sqrt[5]{3}$

(۴) $\sqrt[5]{3}$

۹. حاصل $\sqrt{\frac{24}{V}} \times \frac{56}{1920} - \sqrt{0.14} + \sqrt{0.016}$ کدام است؟ (دستگاه‌های اجرایی - فراگیر سوم - ۹۵)

(۱) ۰.۱

(۲) ۰.۴

(۳) ۰.۳

(۴) ۰.۲

۱۰. حاصل $(\sqrt{2} + 1)^2 \times (\sqrt{2} - 1)^{-2}$ کدام است؟ (آموزش و پرورش - ۹۴)

(۱) $(3 + 2\sqrt{2})^2$

(۲) $(3 + 2\sqrt{2})^{-2}$

(۳) $(17 - 12\sqrt{2})^{-1}$

(۴) $17 + 6\sqrt{2}$

۱۱. حاصل $10^3\sqrt[3]{1.024} - 5^3\sqrt[3]{250} - 30^3\sqrt[3]{1.458} + 20^3\sqrt[3]{0.686}$ کدام است؟ (فراگیر پنجم و

آموزش و پرورش - ۹۷)

(۱) $42\sqrt[3]{2}$

(۲) $25\sqrt[3]{2}$

(۳) $-30\sqrt[3]{2}$

(۴) $-4\sqrt[3]{2}$

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی‌برداری؛ به اشتراک‌گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و داندود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی‌برداری؛ به اشتراک‌گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و داندود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

۱۲. حاصل ضرب وارون عدد $(3 - 3^{-\frac{1}{2}})^{-\frac{1}{2}}$ در عدد $(\sqrt{3}\sqrt{3} - 1)\sqrt[4]{27}$ کدام است؟
(فراگیر پنجم و آموزش و پرورش - ۹۷)

(۱) ۶

(۲) $9 - \sqrt{3}$ (۳) $27(\sqrt{3} - 1)$

(۴) ۳

۱۳. حاصل عبارت $\sqrt{6}|\sqrt{2} - \sqrt{3}| + \sqrt{50} + \frac{6}{\sqrt{3}}$ کدام است؟ (فراگیر هفتم، آموزش و پرورش و علوم پزشکی - ۹۸)

(۱) $10\sqrt{3}$ (۲) $8\sqrt{2}$ (۳) $4\sqrt{2}$ (۴) $5\sqrt{3}$

۱۴. حاصل عبارت $(48 \div 6 \times 2 - 8 + 1)$ کدام است؟ (فراگیر هفتم، آموزش و پرورش و علوم پزشکی - ۹۸)

(۱) ۹

(۲) ۷

(۳) -۳

(۴) -۵

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی‌برداری؛ به اشتراک‌گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و داندود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی‌برداری؛ به اشتراک‌گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

۱۵. حاصل عبارت $\sqrt[4]{12 + 6\sqrt{3}} \times \sqrt{3} - \sqrt{3}$ کدام است؟ (فراگیر هشتم و آموزش و پرورش - ۹۹)

(۱) $\sqrt[4]{2}$

(۲) $\sqrt{6}$

(۳) $\sqrt{3}$

(۴) $\sqrt{2}$

۱۶. اگر $x + y = 5$ و $xy = 3$ ، آن‌گاه حاصل $x^3 + y^3$ کدام است؟ (فراگیر هشتم و آموزش و پرورش - ۹۹)

(۱) ۷۰

(۲) ۸۰

(۳) ۱۱۰

(۴) ۱۴۰

۱۷. حاصل عبارت $\sqrt{5\sqrt{2}-1} \times \sqrt{5\sqrt{2}+1}$ کدام است؟ (دانشگاه‌های علوم پزشکی و وزارت بهداشت - ۹۹)

(۱) ۷

(۲) ۵

(۳) ۲

(۴) ۱

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی‌برداری؛ به اشتراک‌گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی‌برداری؛ به اشتراک‌گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و داندود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

۱۸. حاصل عبارت $\sqrt[3]{9 - \sqrt{17}} \times \sqrt[3]{9 + \sqrt{17}}$ کدام است؟ (دانشگاه‌های علوم پزشکی و وزارت بهداشت - ۹۹)

(۱) ۲

(۲) ۱

(۳) ۸

(۴) ۴

۱۹. نصف عدد 2^{20} چند است؟ (آموزش و پرورش - ۸۹)

(۱) ۱۰۲۴

(۲) ۱۰۲۴۰

(۳) 2^{10} (۴) 2^{19}

۲۰. ساده شده عبارت $(12^{-2})(32^3)(0.75^5)$ کدام است؟ (دستگاه‌های اجرایی - فراگیر ششم - ۹۷)

(۱) ۱۸

(۲) ۲۷

(۳) ۳۶

(۴) ۵۴

۲۱. چند جمله‌ای $f(x) = x^4 + 3x^3 + ax$ بر $x + 1$ بخش‌پذیر است. بزرگ‌ترین ریشه معادله $f(x) = 0$ کدام است؟ (آموزش و پرورش - ۹۴)

(۱) $1 - \sqrt{3}$ (۲) $-1 + \sqrt{3}$ (۳) $1 - \sqrt{7}$ (۴) $-1 - \sqrt{7}$

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی‌برداری؛ به اشتراک‌گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و داندود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

۲۲. عبارت $x^3 + 11x^2 - 3x + a$ بر $x + 1$ بخش پذیر است. مقدار a کدام است؟ (آموزش و پرورش - ۹۴)

- (۱) ۱۵
- (۲) ۹
- (۳) -۷
- (۴) -۱۳

۲۳. باقیمانده تقسیم $x^4 + 4x^3 - 2x^2 + 1$ بر $q(x)$ برابر $(3x + a)$ است. اگر $x = -1$ ، یکی از ریشه های معادله $q(x) = 0$ باشد، آن گاه مقدار a کدام است؟ (فراگیر هفتم، آموزش و پرورش و علوم پزشکی - ۹۸)

- (۱) -۲
- (۲) ۲
- (۳) -۱
- (۴) ۱

۲۴. اگر باقی مانده تقسیم چند جمله ای $x^4 + ax^2 + 4$ بر $x^2 - 2$ برابر ۶ باشد، آن گاه باقی مانده تقسیم این چند جمله ای بر $x + 2$ کدام است؟ (فراگیر هشتم و آموزش و پرورش - ۹۹)

- (۱) ۱۶
- (۲) ۶
- (۳) ۸
- (۴) ۱۲

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

۲۵. ساده شده عبارت $64^{-\frac{5}{6}} - \left(\frac{1}{33}\right)^{\frac{4}{5}}$ کدام است؟ (فراگیر نهم - ۱۴۰۰)

- (۱) $\frac{1}{33}$
- (۲) $\frac{1}{64}$
- (۳) $\frac{1}{2}$
- (۴) ۱

۲۶. اگر $a = 0.72$ ، آن گاه حاصل $\sqrt{11a}$ برابر کدام است؟ (فراگیر نهم - ۱۴۰۰)

- (۱) $\sqrt{2}$
- (۲) ۲
- (۳) $2\sqrt{2}$
- (۴) $\sqrt{22}$

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

پاسخ پرسش‌های چهارگزینه‌ای فصل اول، محاسبات توان، رادیکال‌ها و

اتحادها

۱. گزینه ۲.

$$\frac{x-1}{\sqrt{x-6+15 \div 3}} = \frac{x-1}{\sqrt{x-6+5}} = \frac{x-1}{\sqrt{x-1}} = \sqrt{x-1}$$

۲. گزینه ۲. مخرج کسر داده شده را در دو مرحله، یک بار با استفاده از اتحاد مربع و بار دیگر با استفاده از اتحاد تفاضل مکعب‌ها ساده می‌کنیم. مخرج کسر گویا شده در مرحله آخر نشان داده شده است که دارای عامل $(\sqrt[3]{x^3} - y)$ است.

$$\frac{1}{\sqrt[3]{x} - \sqrt{y}} = \frac{1}{\sqrt[3]{x} - \sqrt{y}} \times \frac{\sqrt[3]{x} + \sqrt{y}}{\sqrt[3]{x} + \sqrt{y}}$$

اتحاد مزدوج

$$= \frac{\sqrt[3]{x} + \sqrt{y}}{\sqrt[3]{x^3} - y}$$

$$= \frac{\sqrt[3]{x} + \sqrt{y}}{\sqrt[3]{x^3} - y} \times \frac{\sqrt[3]{x^3} + \sqrt[3]{x^2}y + y^2}{\sqrt[3]{x^3} + \sqrt[3]{x^2}y + y^2}$$

تفاضل

اتحاد

مکعب‌ها

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی‌برداری؛ به اشتراک‌گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

$$= \frac{(\sqrt[3]{x} + \sqrt{y})(\sqrt[3]{x^4} + \sqrt[3]{x^2}y + y^2)}{x^2 - y^3}$$

۳. گزینه ۲. با استفاده مکرر از اتحاد مزدوج حاصل عبارت داده شده را می‌یابیم.

$$\begin{aligned} (1 + 0.1)(1 + 0.1^2)(1 + 0.1^4) &= \frac{(1 - 0.1)(1 + 0.1)(1 + 0.1^2)(1 + 0.1^4)}{(1 - 0.1)} \\ &= \frac{(1 - 0.1^2)(1 + 0.1^2)(1 + 0.1^4)}{0.9} \\ &= \frac{(1 - 0.1^4)(1 + 0.1^4)}{0.9} \\ &= \frac{1 - 0.1^8}{0.9} \\ &= \frac{1 - 0.00000001}{0.9} \\ &= \frac{0.99999999}{0.9} \end{aligned}$$

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی‌برداری؛ به اشتراک‌گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

$$= 1.111111$$

۴. گزینه ۲.

$$\sqrt{(-a)^2} + \sqrt{(1-a)^2} = \sqrt{4} + \sqrt{1} = 2 + 1 = 3$$

۵. گزینه ۳.

$$a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab \Rightarrow 13 = (a + b)^2 - 2(-6) \Rightarrow (a + b)^2 = 1 \Rightarrow |a + b| = 1$$

بنابراین:

$$|a^3 + b^3| = |a + b| |a^2 - ab + b^2| = 1 \times |a^2 + b^2 - ab| = |13 - (-6)| = 19$$

۶. گزینه ۴. به کمک اتحاد تفاضل مکعب‌ها، مخرج کسر داخل پرانتز را ساده می‌کنیم.

$$\sqrt[3]{0.5} \left(\frac{1}{\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2} + 1} + 1 \right) = \sqrt[3]{0.5} \left(\frac{1}{\sqrt[3]{2^2} + \sqrt[3]{2} + 1} \times \frac{\sqrt[3]{2} - 1}{\sqrt[3]{2} - 1} + 1 \right)$$

و در آخر حاصل عبارت، به دست می‌آید:

$$= \sqrt[3]{0.5} (\sqrt[3]{2} - 1 + 1) = \sqrt[3]{0.5} \sqrt[3]{2} = 1$$

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و داندود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

۷. گزینه ۴. با استفاده مکرر از اتحاد مزدوج حاصل عبارت داده شده را می یابیم.

$$\frac{1}{(\sqrt[4]{6} - \sqrt[4]{5})(\sqrt{5} + \sqrt{6})} = \frac{1}{(\sqrt[4]{6} - \sqrt[4]{5})(\sqrt{6} + \sqrt{5})} \times \frac{\sqrt[4]{6} + \sqrt[4]{5}}{\sqrt[4]{6} + \sqrt[4]{5}} = \frac{\sqrt[4]{6} + \sqrt[4]{5}}{(\sqrt{6} - \sqrt{5})(\sqrt{6} + \sqrt{5})} = \frac{\sqrt[4]{6} + \sqrt[4]{5}}{6 - 5} = \sqrt[4]{6} + \sqrt[4]{5}$$

۸. گزینه ۴.

$$(\sqrt[4]{27} \div \sqrt[5]{9})^{\sqrt[4]{9\sqrt[5]{3}}} = (\sqrt[4]{3^3} \div \sqrt[5]{3^2})^{\sqrt[4]{3^2 \times \sqrt[5]{3}}} = (3^{\frac{3}{4}} \div 3^{\frac{2}{5}})^{\sqrt[4]{3^2 \times \sqrt[5]{3}}} = 3^{\frac{3}{4} - \frac{2}{5}} \times 3^{\frac{1}{4} \times \frac{2}{5} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{5}} = 3^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{3}$$

۹. گزینه ۴.

$$\sqrt{0.14 + \sqrt{0.016}} - \sqrt{\frac{24}{7} \times \frac{56}{1920}} = \sqrt{\frac{14}{100} + \frac{40}{100\sqrt{10}}} - \sqrt{\frac{10}{100}} = \frac{1}{10} \left(\sqrt{14 + 4\sqrt{10}} - \sqrt{10} \right) = \frac{1}{10} \left(\sqrt{(2 + \sqrt{10})^2} - \sqrt{10} \right) = \frac{1}{10} (2 + \sqrt{10} - \sqrt{10}) = 0.2$$

۱۰. گزینه ۱.

$$(\sqrt{2} + 1)^2 \times (\sqrt{2} - 1)^{-2} = \frac{(\sqrt{2} + 1)^2}{(\sqrt{2} - 1)^2} = \left(\frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2} - 1} \right)^2 = \left(\frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2} - 1} \times \frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2} + 1} \right)^2 = (3 + 2\sqrt{2})^2$$

۱۱. گزینه ۳.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و داندود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی‌برداری؛ به اشتراک‌گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

$$\begin{aligned}
 10\sqrt[3]{1.024} - 5\sqrt[3]{250} - 30\sqrt[3]{1.458} + 20\sqrt[3]{0.686} &= 10\sqrt[3]{\frac{2^9 \times 2}{1000}} - 5\sqrt[3]{\frac{5^3 \times 2}{1000}} - 30\sqrt[3]{\frac{3^6 \times 2}{1000}} \\
 &\quad + 20\sqrt[3]{\frac{7^3 \times 2}{1000}} \\
 &= 8\sqrt[3]{2} - 25\sqrt[3]{2} - 27\sqrt[3]{2} + 14\sqrt[3]{2} \\
 &= -30\sqrt[3]{2}
 \end{aligned}$$

۱۲. گزینه ۲. وارون عدد $(3 - 3^{-\frac{1}{2}})^{-\frac{1}{2}}$ به صورت $(3 - 3^{-\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}$ است و داریم:

$$\begin{aligned}
 (3 - 3^{-\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}} \times \sqrt[4]{27} (\sqrt{3\sqrt{3}} - 1) &= \sqrt{3 - \frac{1}{\sqrt{3}}} \times \sqrt{3\sqrt{3}} (\sqrt{3\sqrt{3}} - 1) \\
 &= \sqrt{3(3\sqrt{3} - 1)^2} \\
 &= (3\sqrt{3} - 1)\sqrt{3} \\
 &= 9 - \sqrt{3}
 \end{aligned}$$

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی‌برداری؛ به اشتراک‌گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و داندود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

۱۳. گزینه ۲.

$$\begin{aligned} \sqrt{6}|\sqrt{2}-\sqrt{3}|+\sqrt{50}+\frac{6}{\sqrt{3}} &= \sqrt{6}(\sqrt{3}-\sqrt{2})+5\sqrt{2}+2\sqrt{3} \\ &= \sqrt{18}-\sqrt{12}+5\sqrt{2}+2\sqrt{3} \\ &= 3\sqrt{2}-2\sqrt{3}+5\sqrt{2}+2\sqrt{3} \\ &= 8\sqrt{2} \end{aligned}$$

۱۴. گزینه ۱.

$$48 \div 6 \times 2 - 8 + 1 = 8 \times 2 - 8 + 1 = 16 - 8 + 1 = 9$$

۱۵. گزینه ۲.

$$\begin{aligned} \sqrt[4]{12+6\sqrt{3}} \times \sqrt{3-\sqrt{3}} &= \sqrt[4]{(3+\sqrt{3})^2} \times \sqrt{3-\sqrt{3}} = \sqrt{3+\sqrt{3}} \sqrt{3-\sqrt{3}} = \sqrt{9-3} \\ &= \sqrt{6} \end{aligned}$$

۱۶. گزینه ۲.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و داندود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

$$x^3 + y^3 = (x + y)^3 - 3xy(x + y) = 5^3 - 3 \times 3 \times 5 = 125 - 45 = 80$$

۱۷. گزینه ۱.

$$\sqrt{5\sqrt{2}-1} \times \sqrt{5\sqrt{2}+1} = \sqrt{(5\sqrt{2}-1)(5\sqrt{2}+1)} = \sqrt{50-1} = \sqrt{49} = 7$$

۱۸. گزینه ۴.

$$\sqrt[3]{9-\sqrt{17}} \times \sqrt[3]{9+\sqrt{17}} = \sqrt[3]{81-17} = \sqrt[3]{64} = 4$$

۱۹. گزینه ۴.

$$2^{20} \div 2 = 2^{20-1} = 2^{19}$$

۲۰. گزینه ۴.

$$(0.75^5)(32^3)(12^{-2}) = \left(\frac{3}{4}\right)^5 \times (2^5)^3 \times \left(\frac{1}{12}\right)^2 = \frac{3^5 \times 2^{15}}{2^{10} \times 2^4 \times 3^2} = 2 \times 3^3 = 2 \times 27 = 54$$

۲۱. گزینه ۲. از این که $f(x)$ بر $x+1$ بخش پذیر است نتیجه می شود $f(-1) = (-1)^4 = 1$ و $3(-1)^3 - a = 0$ ، بنابراین $a = -3$ به صورت زیر بازنویسی می شود.

$$f(x) = x^4 + 3x^3 - 2x = x(x^3 + 3x^2 - 2)$$

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی‌برداری؛ به اشتراک‌گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

$$\begin{array}{r|l}
 x^3 + 3x^2 - 2 & x + 1 \\
 \hline
 -x^3 - x^2 & \\
 \hline
 4x^2 - 2 & \\
 -4x^2 - 2x & \\
 \hline
 -2x - 2 & \\
 +2x + 2 & \\
 \hline
 0 &
 \end{array}$$

چندجمله‌ای $x^3 + 3x^2 - 2$ بر $x + 1$ بخش‌پذیر است و به کمک تقسیم بر $x + 1$ می‌توان آن را تجزیه کرد.

با توجه به تقسیم نتیجه می‌شود $x^3 + 3x^2 - 2 = (x + 1)(x^2 + 2x - 2)$. بنابراین:

$$f(x) = x^3 + 3x^2 - 2x = x(x^3 + 3x^2 - 2) = x(x + 1)(x^2 + 2x - 2)$$

اکنون معادله درجه دوم $x^2 + 2x - 2 = 0$ را حل می‌کنیم:

$$x^2 + 2x - 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{12}}{2} = -1 \pm \sqrt{3}$$

بنابراین بزرگ‌ترین ریشه معادله $f(x) = 0$ ، عدد $-1 + \sqrt{3}$ است.

۲۲. گزینه ۴.

$$p(x) = x^3 + 11x^2 - 3x + a, \quad P(-1) = (-1)^3 + 11(-1)^2 - 3(-1) + a = 0 \Rightarrow a = -13$$

۲۳. گزینه ۳.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی‌برداری؛ به اشتراک‌گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی‌برداری؛ به اشتراک‌گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

$$x^4 + 4x^3 - 2x^2 + 1 = q(x)f(x) + 3x + a$$

با جایگذاری $x = -1$ در معادله فوق داریم:

$$(-1)^4 + 4(-1)^3 - 2(-1)^2 + 1 = q(-1)f(-1) + 3(-1) + a \Rightarrow -4 = -3 + a \Rightarrow a = -1$$

۲۴. گزینه ۱. از این‌که باقیمانده تقسیم چندجمله‌ای $x^4 + ax^2 + 4$ بر $x^2 - 2$ برابر ۶ است داریم:

$$x^4 + ax^2 + 4 = (x^2 - 2)q(x) + 6$$

چون $\sqrt{2}$ ریشه $x^2 - 2$ است می‌توان نوشت: $\sqrt{2}^4 + a\sqrt{2}^2 + 4 = (\sqrt{2}^2 - 2)q(\sqrt{2}) + 6$ بنابراین:

$$4 + 2a + 4 = 0 \times q(\sqrt{2}) + 6 \Rightarrow a = -1$$

اکنون باقی‌مانده تقسیم $p(x) = x^4 - x^2 + 4$ را بر $x + 2$ به دست می‌آوریم. این باقی‌مانده برابر $p(-2)$ است.

$$p(-2) = (-2)^4 - (-2)^2 + 4 = 16 - 4 + 4 = 16$$

۲۵. گزینه ۱.

$$\left(\frac{1}{33}\right)^{\frac{4}{5}} - 64^{-\frac{5}{6}} = (2^{-5})^{\frac{4}{5}} - (2^6)^{-\frac{5}{6}} = 2^{-4} - 2^{-5} = \frac{1}{16} - \frac{1}{32} = \frac{1}{32}$$

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی‌برداری؛ به اشتراک‌گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن ([لینک خرید](#))، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

۲۶. گزینه ۳.

$$a = ۰. \overline{۷۲} = \frac{۷۲}{۹۹} \Rightarrow \sqrt{۱۱a} = \sqrt{۱۱ \times \frac{۷۲}{۹۹}} = \sqrt{\frac{۷۲}{۹}} = \sqrt{۸} = ۲\sqrt{۲}$$

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن ([لینک خرید](#))، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی‌برداری؛ به اشتراک‌گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

فصل دوم، مجموعه‌ها

بخش اول: مفهوم مجموعه

در هر مبحثی از ریاضیات، از مجموعه‌ای از اشیاء صحبت می‌کنیم که باید خواص، رابطه و اعمال بر آن اشیاء را بررسی کنیم. پاسخ به این پرسش که "مجموعه چیست؟" بسیار دشوار است و به استفاده دوری از واژه‌های مترادف می‌انجامد، با ساده‌انگاری می‌توان مجموعه را به صورت زیر تعریف کرد:

مجموعه، دسته‌ای از اشیاء یا همان عضوها است که متمایز و مشخص اند.

برای نشان دادن مجموعه‌ها از حروف بزرگ مانند A ، B ، C ... و برای نشان دادن عضوهای مجموعه از حروف کوچک استفاده می‌کنیم. برای آن که تعلق عضوی مانند x به مجموعه‌ای مانند A را به طور نمادین بیان کنیم می‌نویسیم $x \in A$ و اگر x متعلق به A نباشد، می‌نویسیم $x \notin A$.

برای شناخت یک مجموعه باید بدانیم دقیقاً چه چیزهایی عضو آن هستند. ساده‌ترین روش مشخص کردن یک مجموعه، فهرست اعضایش (در صورت امکان) است. نماد مورد استفاده ما در این روش، نوشتن اعضا درون ابرو (آکولاد) $\{\}$ است. بنابراین هرگاه بنویسیم $A = \{1, 2, 3, 4\}$ منظورمان این است که A مجموعه‌ای با اعضای ۱، ۲، ۳ و ۴ است نه چیزی دیگر!

مثال: $1 \in \{1, 3, 6\}$ ، $3 \in \{1, 3, 6\}$ و $6 \in \{1, 3, 6\}$ ولی $2 \notin \{1, 3, 6\}$. ما گاهی با توصیف مجموعه و معرفی یک ویژگی مشخص از اعضا، مجموعه مورد بحث را مشخص می‌کنیم:

$$B = \{x \mid x \text{ عدد صحیح مثبت کمتر از } 6 \text{ است}\}$$

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی‌برداری؛ به اشتراک‌گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و داندود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

بخوانیم: B ، مجموعه همه x هایی است به طوری که x ، عدد صحیح مثبت کمتر از ۶ است. نماد " | " را که گاهی به جای آن از " : " استفاده می کنیم، در این جا " به طوری که " می خوانیم. در این مثال می توان اعضای B را نیز مشخص کرد:

$$B = \{x \mid x \text{ عدد صحیح مثبت کمتر از ۶ است}\} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

در نوشتن اعضای مجموعه، ترتیب خاصی رعایت نمی شود مثلاً $\{2, 3, 5\}$ یا $\{3, 2, 5\}$ یا $\{5, 2, 3\}$ هر سه یک مجموعه را مشخص می کنند به علاوه چون اعضای یک مجموعه متمایزند $\{2, 3, 3, 5, 5\}$ همان $\{2, 3, 5\}$ است. به این معنی که تکرار در مجموعه ها بی فایده است.

دو مجموعه A و B را مساوی گوئیم و می نویسیم $A = B$ هرگاه، اعضایشان یکی باشد. دقت کنید $\{2\}$ با عدد ۲ متفاوت است و $2 \in \{2\}$ گزاره ای درست و $\{2\} \in \{2\}$ گزاره ای نادرست است.

مجموعه $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 = -1\}$ ، عضوی ندارد که به آن مجموعه تهی می گوئیم. فقط یک مجموعه وجود دارد که هیچ عضوی ندارد! این مجموعه را تهی می نامیم و با نماد $\emptyset$ یا $\{\}$ نشان می دهیم.

زیرمجموعه

در هر مجموعه، مجموعه های دیگری وجود دارند که از حذف برخی از اعضای آن به دست می آیند. فرض کنید $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ و $B = \{2, 4\}$ ، هر عضو از B ، یک عضو از A است. در این حالت گوئیم B یک زیرمجموعه A است و این طور می نویسیم: $B \subseteq A$. می گوئیم B ، یک زیرمجموعه از A است هرگاه هر عضو B ، عضوی از A باشد. دقت کنید! مفهوم زیرمجموعه های یک مجموعه، با مفهوم اعضای آن، بسیار متفاوت است به عنوان مثال:

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و داندود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

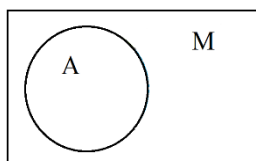
این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و داندود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

$$a \neq \{a\} , a \in \{a, b, c\} , \{a\} \subseteq \{a, b, c\}$$

مجموعه مرجع

متناسب با هر بحثی، مجموعه‌ای که اشیاء اولیه مورد بحث را در بر می‌گیرد، در نظر می‌گیریم تا محدوده بحث مشخص شود به عنوان مثال، همه مجموعه‌های مورد بحث ما در حل نامعادله‌های جبری، زیرمجموعه‌هایی از مجموعه اعداد حقیقی (R) و در بحث بخش‌پذیری، مجموعه‌های مورد نظر همه زیرمجموعه‌های Z اند. این مجموعه که محدوده بحث را تعیین می‌کند، مجموعه مرجع می‌نامیم و با M نشان می‌دهیم.

نمودار ون



برای تصور بهتر و فهم ساده‌تر در بحث مجموعه‌ها، از نمایش هندسی ساده‌ای به نام "نمودار ون" استفاده می‌کنیم. مجموعه مرجع را با یک مستطیل و زیرمجموعه‌های آن را با دایره‌هایی در داخل این مستطیل نشان می‌دهیم.

بخش دوم: چند مطلب ساده

۱. برای هر مجموعه مانند A ، $A \subseteq A$. یعنی هر مجموعه، زیرمجموعه‌ای از خودش است.

۲. اگر $B \subseteq A$ و $B \neq A$ ، آن‌گاه گوییم B زیرمجموعه سره از A است.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و داندود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی‌برداری؛ به اشتراک‌گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و داندود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

۳. مجموعه تهی، زیرمجموعه همه مجموعه‌هاست یعنی برای هر مجموعه مانند A ، $\emptyset \subseteq A$.

۴. اگر $A \subseteq B$ و $B \subseteq C$ آن‌گاه $A \subseteq C$. به این معنی که هر زیرمجموعه از یک زیرمجموعه، خود یک زیرمجموعه است.

مثال: زیرمجموعه‌های، مجموعه $A = \{1, 2\}$ در زیر فهرست شده‌اند:

$$\{\}, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}$$

هم‌چنین زیرمجموعه‌های، مجموعه $B = \{1, 2, 3\}$ عبارت‌اند از:

$$\{\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}$$

می‌بینیم که A دارای چهار زیرمجموعه و B دارای هشت زیرمجموعه است. در حالت کلی، یک مجموعه n عضوی، دارای 2^n زیرمجموعه است.

مجموعه‌های متناهی و نامتناهی

مجموعه‌های A ، B و C را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$A = \{1, 4, 9, \dots, 64, 81\} = \{x^2 \mid x \in \mathbb{N}, x^2 < 100\}$$

$$B = \{1, 4, 9, 16\} = \{x^2 \mid x \in \mathbb{N}, x^2 < 21\}$$

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی‌برداری؛ به اشتراک‌گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و داندود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و داندود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

$$C = \{2, 4, 6, 8, \dots\} = \{2k \mid k \in N\}$$

مجموعه‌های A و B مثال‌هایی از مجموعه‌های متناهی اند که هر کدام به ترتیب نه و چهار عضو دارند این مطلب را به صورت $|A| = 9$ و $|B| = 4$ نشان می‌دهیم. بنابراین نماد $|A|$ یا $n(A)$ نشان دهنده تعداد اعضای مجموعه متناهی A است.

وقتی با مجموعه‌ای نامتناهی مانند C کار می‌کنیم، برای نمایش مجموعه گاهی تعداد کافی از اعضای مجموعه را فهرست می‌کنیم با این امید که الگویی واضح برای نوشتن بقیه اعضا باشد.

مثال: مجموعه متناهی A را در نظر بگیرید. اگر سه عضو به اعضای A اضافه کنیم، آن‌گاه 224 زیرمجموعه به تعداد زیرمجموعه‌های آن اضافه می‌شود. A چند عضوی است؟

پاسخ: فرض کنیم A ، n عضوی باشد پس دارای 2^n زیرمجموعه است. با توجه به فرض داریم:

$$2^n + 224 = 2^{n+3} \Rightarrow 2^{n+3} - 2^n = 224 \Rightarrow 2^n(2^3 - 1) = 224 \Rightarrow 2^n = 32 \Rightarrow n = 5 \\ \Rightarrow |A| = 5$$

جبر مجموعه‌ها

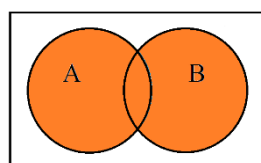
به وسیله اعمالی بر مجموعه‌ها، می‌توان مجموعه‌هایی از مجموعه‌های مفروض ساخت. این اعمال عبارتند از اجتماع، اشتراک و متمم.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و داندود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

اجتماع دو مجموعه

اجتماع دو مجموعه A و B که با $A \cup B$ نشان داده می شود، مجموعه همه عضوهایی است که حداقل به یکی از دو مجموعه A و B متعلق اند.



$$A \cup B = \{x \in M \mid x \in A \text{ یا } x \in B\}$$

چون ما "یا" را به معنی منطقی آن در نظر می گیریم، اعضای که هم به A و هم به B تعلق دارند نیز عضو $A \cup B$ هستند.

مثال: فرض کنیم $A = \{1, 3, 5, 6, 7\}$ و $B = \{3, 4, 5, 8\}$ در این صورت $A \cup B = \{1, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$.

چند مطلب ساده

فرض کنیم A ، B و C مجموعه هایی باشند، آن گاه داریم:

خاصیت جابجایی

$$A \cup B = B \cup A \quad ۳.$$

$$A \cup \emptyset = A \quad ۱.$$

خاصیت

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) \quad ۴.$$

$$A \cup A = A \quad ۲.$$

شرکت پذیری

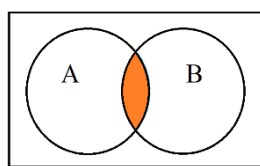
$$(B \cup C)$$

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی‌برداری؛ به اشتراک‌گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

اشتراک دو مجموعه

اشتراک دو مجموعه A و B که با $A \cap B$ نشان داده می‌شود، مجموعه همه عضوهای است که هم متعلق به A هستند و هم متعلق به B .



$$A \cap B = \{x \in M \mid x \in A \text{ و } x \in B\}$$

اگر $A \cap B = \emptyset$ ، آن‌گاه دو مجموعه A و B را مجزا می‌گوییم.

مثال: فرض کنیم $A = \{1, 3, 5, 6, 7\}$ و $B = \{3, 4, 5, 8\}$ در این صورت $A \cap B = \{3, 5\}$.

چند مطلب ساده

فرض کنیم A ، B و C مجموعه‌هایی باشند، آن‌گاه داریم:

خاصیت جابجایی

$$A \cap B = B \cap A \quad ۳.$$

$$A \cap \emptyset = \emptyset \quad ۱.$$

خاصیت

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) \quad ۴.$$

$$A \cap A = A \quad ۲.$$

شرکت‌پذیری

$$(B \cap C)$$

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی‌برداری؛ به اشتراک‌گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی‌برداری؛ به اشتراک‌گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

بخش سوم: قانون‌های توزیع‌پذیری

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \quad ۲. \quad A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \quad ۱.$$

عمل‌های $\cup$ و $\cap$ هر یک بر روی دیگری توزیع‌پذیر است.

چند مطلب ساده

$$A \subseteq B \Leftrightarrow A \cup B = B \quad ۱. \quad A \cup (A \cap B) = A \quad ۳. \quad \text{قانون جذب}$$

$$A \subseteq B \Leftrightarrow A \cap B = A \quad ۲. \quad A \cap (A \cup B) = A \quad ۴. \quad \text{قانون جذب}$$

مثال: ساده شده عبارت $(A \cap B) \cup [(B \cup C) \cap ((A \cup B) \cap B)]$ کدام است؟

$$A \cap B \quad (۴) \quad A \cup B \quad (۳) \quad B \quad (۲) \quad A \quad (۱)$$

پاسخ:

$$(A \cap B) \cup [(B \cup C) \cap ((A \cup B) \cap B)] = (A \cap B) \cup [(B \cup C) \cap B] = (A \cap B) \cup B = B$$

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی‌برداری؛ به اشتراک‌گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و داندود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

اجتماع و اشتراک چند مجموعه

با توجه به قانون‌های شرکت‌پذیری در اجتماع و اشتراک، دیدیم می‌توان پیرانتزها را حذف کرد. در حالت کلی‌تر می‌توان اجتماع یا اشتراک چند مجموعه را بدون در نظر گرفتن اولویت‌های ترتیبی تعمیم داد. در این جا دو نماد $\bigcup_{i=1}^n A_i$ و $\bigcap_{i=1}^n A_i$ را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$\bigcup_{i=1}^n A_i = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n \quad \bigcap_{i=1}^n A_i = A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n$$

مثال: فرض کنیم $A_n = [0, \frac{1}{n}]$ (بازه بسته ۰ تا $\frac{1}{n}$)، مطلوب است:

$$1. \bigcup_{n=1}^5 A_n \quad 2. \bigcap_{n=1}^5 A_n$$

پاسخ:

$A_1 = [0, 1]$ ، $A_2 = [0, \frac{1}{2}]$ ، $A_3 = [0, \frac{1}{3}]$ ، $A_4 = [0, \frac{1}{4}]$ ، $A_5 = [0, \frac{1}{5}]$. بنابراین: $A_5 \subseteq A_4 \subseteq A_3 \subseteq A_2 \subseteq A_1$ پس داریم:

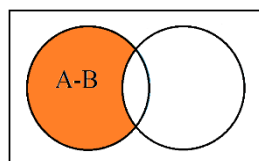
$$\bigcup_{n=1}^5 A_n = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5 = A_1 \quad \text{و} \quad \bigcap_{n=1}^5 A_n = A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5 = A_5 = [0, \frac{1}{5}]$$

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و داندود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی‌برداری؛ به اشتراک‌گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

تفاضل دو مجموعه

تفاضل دو مجموعه A و B که با $A - B$ نشان داده می‌شود، مجموعه همه اعضای A است که متعلق به B نباشند.



$$A - B = \{x \in A \mid x \notin B\}$$

مثال: فرض کنیم $A = \{a, b, c, d\}$ و $B = \{c, d, e, f\}$ مجموعه‌های $A - B$ و $A - (A \cap B)$ را پیدا کنید.

پاسخ:

$$\begin{aligned} A - B &= \{a, b, c, d\} - \{c, d, e, f\} \\ &= \{a, b\} \end{aligned}$$

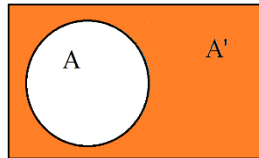
$$\begin{aligned} A - (A \cap B) &= \{a, b, c, d\} - \{c, d\} \\ &= \{a, b\} \end{aligned}$$

متمم یک مجموعه

متمم مجموعه A نسبت به مجموعه مرجع M را که با نماد A' یا $\bar{A}$ نشان می‌دهیم، مجموعه همه اعضای M است که به A تعلق ندارند.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی‌برداری؛ به اشتراک‌گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی‌برداری؛ به اشتراک‌گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و داندود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.



$$A' = \{x \in M \mid x \notin A\}$$

چند مطلب

$$\emptyset' = M, M' = \emptyset. ۳$$

$$(A')' = A. ۲$$

$$A - B = A \cap B'. ۱$$

$$A \cap A' = \emptyset, A \cup A' = M. ۴$$

$$A' = M \text{ اگر } B' \subseteq A'. ۵$$

$$A \subseteq B \text{ اگر و فقط}$$

قانون‌های دمورگان

اگر A و B دو مجموعه دلخواه باشند آن‌گاه:

$$(A \cap B)' = A' \cup B'. ۲$$

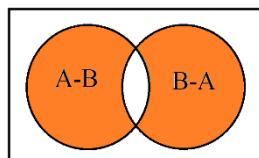
$$(A \cup B)' = A' \cap B'. ۱$$

تفاضل متقارن دو مجموعه

تفاضل متقارن دو مجموعه A و B که با $A \Delta B$ نشان داده می‌شود، مجموعه همه اعضای از مجموعه مرجع است که فقط متعلق به یکی از A یا B باشد. می‌توان گفت:

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی‌برداری؛ به اشتراک‌گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و داندود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی‌برداری؛ به اشتراک‌گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.



$$A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)$$

همچنین ثابت می‌شود که:

$$A \Delta B = (A - B) \cup (B - A) = (A \cup B) - (A \cap B)$$

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی‌برداری؛ به اشتراک‌گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی‌برداری؛ به اشتراک‌گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و داندود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

پرسش‌های چهارگزینه‌ای فصل دوم، مجموعه‌ها

۱. اگر مجموعه جهانی اعداد طبیعی و A مجموعه اعداد فرد باشند آن‌گاه A' کدام است؟
(دستگاه‌های اجرایی - فراگیر ششم - ۹۷)

- (۱) مجموعه اعداد فرد
- (۲) مجموعه اعداد زوج
- (۳) مجموعه اعداد طبیعی
- (۴) مجموعه اعداد صحیح

۲. اگر $A = \{۲, ۳, ۵, ۷, ۱۱, ۱۳\}$ و $B = \{۲k | k \in \mathbb{N}, k \leq ۶\}$ ، آن‌گاه $A - (A \cap B)$ چند عضو دارد؟
(فراگیر هفتم، آموزش و پرورش و علوم پزشکی - ۹۸)

- (۱) ۳
- (۲) ۴
- (۳) ۵
- (۴) ۶

۳. تعداد اعضای کدام مجموعه بیشتر است؟ (دستگاه‌های اجرایی - فراگیر سوم - ۹۵)

- (۱) $\left\{x \in \mathbb{N} \mid \frac{x}{x^2+1} = 1\right\}$
- (۲) $\left\{x \in \mathbb{N} \mid \frac{2x}{x^2-3} = 1\right\}$
- (۳) $\left\{x \in \mathbb{N} \mid \frac{-2x}{x^2+1} = 1\right\}$
- (۴) $\left\{x \in \mathbb{N} \mid \frac{x}{x^2-3} = 1\right\}$

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی‌برداری؛ به اشتراک‌گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و داندود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی‌برداری؛ به اشتراک‌گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

۴. اگر A و B ، دو مجموعه غیر تهی باشند، $(B' - A)'$ با کدام مجموعه، برابر است؟ (تأمین اجتماعی)

$$(1) B' \cap A'$$

$$(2) B \cap A'$$

$$(3) B \cup A$$

$$(4) B \cup A'$$

۵. اگر A و B ، به ترتیب مجموعه اعداد طبیعی و مجموعه اعداد صحیح باشند، مجموعه $A \Delta B$ کدام است؟ (دیوان محاسبات - ۹۴)

$$(1) \{\dots, -2, -1\}$$

$$(2) \{0, -1, -2, \dots\}$$

$$(3) \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

$$(4) \{1, 2, 3, \dots\}$$

۶. اگر مجموعه‌های A ، B و C طوری باشند که $A \subseteq B - C$ ، در این صورت مجموعه $C - A$ با کدامیک از مجموعه‌های زیر، برابر است؟ (دیوان محاسبات - ۹۴)

$$(1) C \Delta A$$

$$(2) B - A$$

$$(3) C \cap A$$

$$(4) C$$

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی‌برداری؛ به اشتراک‌گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی‌برداری؛ به اشتراک‌گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

۷. اگر $A = \{n \in \mathbb{N} \mid n^2 \leq 7\}$ و $B = \{m \in \mathbb{Z} \mid [m] = 4\}$ ، آن‌گاه مجموعه $A \cup B$ دارای چند عضو است؟ ($[x]$ تابع جزء صحیح است.) (آموزش و پرورش - ۹۴)

(۱) عضوی ندارد.

(۲) بی‌شمار

(۳) ۳

(۴) ۵

۸. اگر $A \cup B = \{\}$ ، آن‌گاه کدام مورد در خصوص مجموعه‌های A و B به ترتیب صحیح است؟ (وزارت نیرو - ۹۶)

(۱) ناتهی - تهی

(۲) ناتهی - ناتهی

(۳) تهی - ناتهی

(۴) تهی - تهی

۹. اگر $A = \{y \in \mathbb{Z} \mid y = \frac{x^2 - x}{x + 1}, x \in \mathbb{Z}\}$ ، آن‌گاه تعداد اعضای مجموعه A ، کدام است؟ (دستگاه‌های اجرایی - فراگیر اول - ۹۴)

(۱) ۵

(۲) ۴

(۳) ۳

(۴) ۲

۱۰. اگر دو مجموعه A و B نامتناهی و مجموعه C متناهی باشد، کدام یک از مجموعه‌های زیر، قطعاً نامتناهی است؟ (فراگیر هفتم، آموزش و پرورش و علوم پزشکی - ۹۸)

(۱) $(A - C) \cup B$

(۲) $(A \cap B) - C$

(۳) $C - (A \cup B)$

(۴) $A - (B \cup C)$

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی‌برداری؛ به اشتراک‌گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی‌برداری؛ به اشتراک‌گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

۱۱. $A = \{a | \sqrt{a} \in \mathbb{N}, \sqrt{a} < 8\}$ و $B = \{x^2 | x = -1, -2, -3, \dots\}$. مجموعه $A \cap B'$ چند عضو دارد؟ (فراگیر هشتم و آموزش و پرورش - ۹۹)

(۱) عضوی ندارد.

(۲) ۸

(۳) ۷

(۴) ۱

۱۲. اگر $A = \{x | x = 3k, k \in \mathbb{N}\}$ و $B = \{x | |x| < 100\}$ ، کدام مجموعه زیر در Z با پایان است؟

(فراگیر هشتم و آموزش و پرورش - ۹۹)

(۱) $A \cap B$

(۲) $A' \cup B$

(۳) $A \cup B$

(۴) $A \cap B'$

۱۳. اگر مجموعه A ، همه اعداد طبیعی زوج دو رقمی مضرب ۳ و مجموعه B همه اعداد طبیعی دو رقمی مضرب ۶ و کوچک‌تر از ۵۰ باشد، آن‌گاه مجموعه $(B - A)$ چند عضو دارد؟ (فراگیر هشتم و آموزش و پرورش - ۹۹)

(۱) ۷

(۲) ۶

(۳) عضوی ندارد.

(۴) ۸

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی‌برداری؛ به اشتراک‌گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی‌برداری؛ به اشتراک‌گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و داندود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

۱۴. ساده شده عبارت $(A \cup B)' \cup (B - A)$ کدام است؟ (دانشگاه‌های علوم پزشکی و وزارت بهداشت - ۹۹)

- (۱) A
- (۲) B
- (۳) A'
- (۴) B'

۱۵. اگر $A \cap C = A$ و $A \cap B' = B'$ ، آن‌گاه مجموعه $B \cup C$ با کدام مجموعه برابر است؟ (M)، مجموعه مرجع است.) (دانشگاه‌های علوم پزشکی و وزارت بهداشت - ۹۹)

- (۱) M
- (۲) $\emptyset$
- (۳) A
- (۴) A'

۱۶. اگر A و B دو مجموعه غیرتهی باشند، آن‌گاه مجموعه $A - (A - B)$ برابر کدام است؟ (بانک گردشگری - ۹۶)

- (۱) A
- (۲) B
- (۳) $A - B$
- (۴) $B \cap A$

۱۷. اگر $A = \{۲, ۳, ۴, ۵, ۶\}$ و $B = \{۱, ۲, ۳, ۴, ۷\}$ ، مجموعه $(A \cup B) - A$ کدام است؟ (استانداری‌ها - ۹۱)

- (۱) $\{۵, ۶\}$
- (۲) $\{۱, ۷\}$
- (۳) $\{۷\}$
- (۴) $\emptyset$

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی‌برداری؛ به اشتراک‌گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و داندود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و داندود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

۱۸. اگر $A \subset B$ ، کدام رابطه صحیح نیست؟ (شهرداری‌ها - ۹۱)

$$(1) A' \cup B' = A'$$

$$(2) A' \cap B' = B'$$

$$(3) (A \cup B) \cup (A \cap B) = B$$

$$(4) (A \cup B) \cap (A \cap B) = B$$

۱۹. اگر A و B دو مجموعه ناتهی باشند، آنگاه مجموعه $A - (A \cap B)$ کدام است؟ (آموزش و

پرورش - ۸۹)

$$(1) A \cap B$$

$$(2) A \cap B'$$

$$(3) B \cap A'$$

$$(4) (A \cup B)'$$

۲۰. علامت مناسب در جای خالی مقابل، کدام است؟ $\{12, 13, 14\} \dots \{x: x \in Z, x \geq 11\}$

(شهرداری‌ها - ۹۰)

$$= (1)$$

$$\in (2)$$

$$\subseteq (3)$$

$$\supset (4)$$

۲۱. اگر مجموعه مرجع، اعداد طبیعی باشد، آنگاه مجموعه $\{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14\}$ به صورت

توصیفی کدام است؟ (شهرداری‌ها - ۹۰)

$$(1) \{x: x = 2n + 1, 1 < n < 7\}$$

$$(2) \{x: x = 2n - 1, 1 < n < 7\}$$

$$(3) \{x: x = 2n, 1 < n < 7\}$$

$$(4) \{x: x = 2n, 1 \leq n \leq 7\}$$

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و داندود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن ([لینک خرید](#))، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

۲۲. اگر به مجموعه A چهار عضو اضافه کنیم، آن گاه تعداد زیر مجموعه آن چند برابر می شود؟
(آموزش و پرورش - ۸۹)

(۱) ۴

(۲) ۸

(۳) ۱۶

(۴) ۳۲

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن ([لینک خرید](#))، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و داندود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

پاسخ پرسش‌های چهارگزینه‌ای فصل دوم، مجموعه‌ها

۱. گزینه ۲. عدد طبیعی که فرد نباشد، زوج است بنابراین A' مجموعه اعداد طبیعی زوج است.

۲. گزینه ۳. با توجه به این که $A - (A \cap B) = A - B$ و $A = \{2, 3, 5, 7, 11, 13\}$ و $B = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$ نتیجه می‌شود:

$$A - (A \cap B) = A - B = \{3, 5, 7, 11, 13\} \Rightarrow |A - (A \cap B)| = 5$$

۳. گزینه ۲.

$$A = \left\{ x \in \mathbb{N} \mid \frac{x}{x^2 + 1} = 1 \right\} \quad \frac{x}{x^2 + 1} = 1 \Rightarrow x^2 + 1 = x \Rightarrow x^2 - x + 1 = 0$$

این معادله در مجموعه اعداد طبیعی جواب ندارد، بنابراین $A = \emptyset$ و $|A| = 0$.

$$B = \left\{ x \in \mathbb{N} \mid \frac{2x}{x^2 - 3} = 1 \right\} \quad \frac{2x}{x^2 - 3} = 1 \Rightarrow x^2 - 3 = 2x \Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3 \text{ یا } x = -1$$

$x = 3$ جواب طبیعی این معادله است، بنابراین $B = \{3\}$ و

$$|B| = 1$$

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و داندود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و داندود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

$$C = \left\{ x \in \mathbb{N} \mid \frac{-2x}{x^2 + 1} = 1 \right\} \quad \frac{-2x}{x^2 + 1} = 1 \Rightarrow x^2 + 1 = -2x \Rightarrow x^2 + 2x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$$

این معادله در مجموعه اعداد طبیعی جواب ندارد، بنابراین $C = \emptyset$ و $|C| = 0$.

$$D = \left\{ x \in \mathbb{N} \mid \frac{x}{x^2 - 3} = 1 \right\} \quad \frac{x}{x^2 - 3} = 1 \Rightarrow x^2 - 3 = x \Rightarrow x^2 - x - 3 = 0$$

این معادله در مجموعه اعداد طبیعی جواب ندارد، بنابراین $D = \emptyset$ و $|D| = 0$.

۴. گزینه ۳. از نکته $A - B = A \cap B'$ و سپس قانون دموگن نتیجه می شود: $(B' - A)' = (B' \cap A')' = B \cup A$

۵. گزینه ۲.

$$A \Delta B = (A - B) \cup (B - A) = (N - Z) \cup (Z - N) = \emptyset \cup (Z - N) = Z - N = \{0, -1, -2, \dots\}$$

۶. گزینه ۴.

$$A \subseteq B - C \Rightarrow A \subseteq B \cap C' \Rightarrow A \subseteq C' \Rightarrow C \subseteq A' \Rightarrow C \cap A' = C \Rightarrow C - A = C$$

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و داندود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

۷. گزینه ۳. اعضای دو مجموعه A و B در زیر فهرست شده اند.

$$A = \{n \in \mathbb{N} \mid n^2 \leq 7\} = \{1, 2\} \text{ و } B = \{m \in \mathbb{Z} \mid [m] = 4\} = \{4\}$$

$$A \cup B = \{1, 2\} \cup \{4\} = \{1, 2, 4\} \Rightarrow |A \cup B| = 3$$

بنابراین:

۸. گزینه ۴. از این که $A \subseteq A \cup B$ نتیجه می شود $A \subseteq A \cup B = \{\}$ بنابراین $A = \{\}$ ، به همین ترتیب $B = \{\}$.

۹. گزینه ۴. با تقسیم $x^2 - x$ بر $x + 1$ نتیجه می شود $x^2 - x = (x + 1)(x - 2) + 2$ و داریم:

$$y = \frac{x^2 - x}{x + 1} = \frac{(x + 1)(x - 2) + 2}{x + 1} = x - 2 + \frac{2}{x + 1} \in \mathbb{Z}$$

لازم است عدد ۲ بر $x + 1$ بخش پذیر باشد و این در صورتی است که $x + 1$ ، مقسوم علیه عدد ۲، یعنی یکی از اعداد ۱، -۱، ۲ یا -۲ باشد که در این صورت مقدار x ، ۰، -۲، ۱ یا -۳ است. اکنون مقادیر را به ازای x های به دست آمده محاسبه می کنیم:

$$x = 0 \Rightarrow y = \frac{x^2 - x}{x + 1} = \frac{0^2 - 0}{0 + 1} = 0$$

$$x = -2 \Rightarrow y = \frac{x^2 - x}{x + 1} = \frac{(-2)^2 - (-2)}{-2 + 1} = \frac{4 + 2}{-1} = -6$$

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی‌برداری؛ به اشتراک‌گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و داندود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

$$x = 1 \Rightarrow y = \frac{x^2 - x}{x + 1} = \frac{1^2 - 1}{1 + 1} = 0$$

$$\begin{aligned} x = -3 \Rightarrow y &= \frac{x^2 - x}{x + 1} \\ &= \frac{(-3)^2 - (-3)}{-3 + 1} \\ &= -6 \end{aligned}$$

$$A = \left\{ y \in Z \mid y = \frac{x^2 - x}{x + 1}, x \in Z \right\} = \{-6, 0\} \Rightarrow |A| = 2 \quad \text{بنابراین:}$$

۱۰. گزینه ۱. از این‌که $B \subseteq (A - C) \cup B$ و B مجموعه‌ای نامتناهی است نتیجه می‌شود $(A - C) \cup B$ نیز نامتناهی است.

۱۱. گزینه ۱. اعضای دو مجموعه A و B در زیر فهرست شده‌اند.

$$A = \{a \mid \sqrt{a} \in N, \sqrt{a} < 8\} = \{1, 4, 9, 16, 25, 36, 49\} \quad \text{و} \quad B = \{x^2 \mid x = -1, -2, -3, \dots\} = \{1, 4, 9, 16, 25, 36, \dots\}$$

$$A \cap B' = A - B = \{1, 4, 9, 16, 25, 36, 49\} - \{1, 4, 9, 16, 25, 36, \dots\} = \emptyset \quad \text{بنابراین:}$$

۱۲. گزینه ۱. اعضای دو مجموعه A و B در زیر فهرست شده‌اند.

$$A = \{x \mid x = 3k, k \in N\} = \{3, 6, 9, 12, 15, \dots\}$$

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی‌برداری؛ به اشتراک‌گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و داندود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی‌برداری؛ به اشتراک‌گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

$$B = \{x \mid |x| < 100\} = \{-99, -98, -97, \dots, 0, \dots, 97, 98, 99\}$$

مجموعه $A \cap B$ ، مجموعه‌ای با پایان (متناهی) است زیرا:

$$A \cap B = \{3, 6, 9, 12, 15, \dots\} \cap \{-99, -98, -97, \dots, 0, \dots, 97, 98, 99\} = \{3, 6, 9, 12, \dots, 99\}$$

۱۳. گزینه ۳. اعضای دو مجموعه A و B در زیر فهرست شده‌اند.

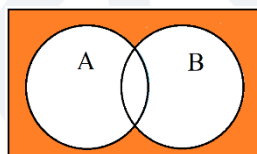
$$A = \{12, 18, 24, 30, 36, 42, 48, \dots, 90, 96\}$$

$$B = \{12, 18, 24, 30, 36, 42, 48\}$$

$$B - A = \{12, 18, 24, 30, 36, 42, 48\} - \{12, 18, 24, 30, 36, 42, 48, \dots, 90, 96\} = \emptyset$$

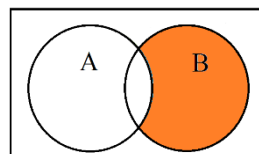
بنابراین:

۱۴. گزینه ۳. با استفاده از نمودار ون پاسخ این گونه است:



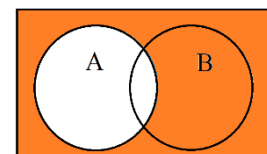
$$(A \cup B)'$$

∪



$$(B - A)$$

=



$$A'$$

البته به کمک قوانین جبر مجموعه‌ها نیز می‌توان این مطلب را اثبات کرد:

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی‌برداری؛ به اشتراک‌گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و داندود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

$$\begin{aligned}
 (A \cup B)' &= (A' \cap B') \cup (B \cap A') & \text{قانون دمورگان و این که } B - A &= B \cap A' \\
 \cup (B - A) & & & \\
 &= [A' \cup (B \cap A')] & \text{توزیع پذیری:} \\
 &\quad \cap [B' \cup (B \cap A')] \\
 &= A' \cap [(B' \cup B) \cap (B' \cup A')] & \text{توزیع پذیری:} \\
 &= A' \cap [M \cap (B' \cup A')] & \text{جذب:} \\
 &= A' \cap (B' \cup A') & \text{جذب:} \\
 &= A'
 \end{aligned}$$

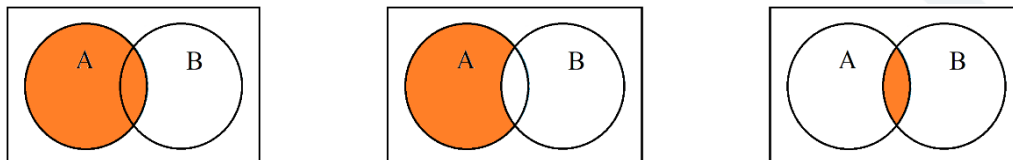
۱۵. گزینه ۱. از $A \cap B' = B'$ نتیجه می شود $B' \subseteq A$ ، همچنین از $A \cap C = A$ نتیجه می شود $A \subseteq C$. بنابراین $B' \subseteq A \subseteq C$.

$$B' \subseteq C \Rightarrow B \cup B' \subseteq B \cup C \Rightarrow M \subseteq B \cup C \Rightarrow B \cup C = M \quad \text{اکنون داریم:}$$

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و داندود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

۱۶. گزینه ۴.



$$A - (A \cap B) = A \cap B$$

به کمک جبر مجموعه‌ها، نیز می‌توان نوشت:

$$= (A \cap A') \cup (A \cap B) = \emptyset \cup (A \cap B) = A \cap B$$

۱۷. گزینه ۲.

$$(A \cup B) - A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} - \{2, 3, 4, 5, 6\} = \{1, 7\}$$

۱۸. گزینه ۴. از $A \subset B$ نتیجه می‌شود $A \cup B = B$ و $A \cap B = A$ بنابراین:

$$(A \cup B) \cap (A \cap B) = B \cap A = A$$

پس گزینه چهارم نادرست است.

$$A - (A \cap B) = A - B = A \cap B'$$

۱۹. گزینه ۲.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

۲۰. گزینه ۴.

۲۱. گزینه ۴.

۲۲. گزینه ۳. فرض کنیم $|A| = n$ ، تعداد زیرمجموعه‌های A برابر 2^n است و اگر به آن چهار عضو اضافه کنیم، تعداد زیرمجموعه‌ها 2^{n+4} می‌شود، بنابراین می‌توان گفت با اضافه شدن چهار عضو، تعداد زیرمجموعه‌ها شانزده برابر می‌شود زیرا:

$$\frac{2^{n+4}}{2^n} = 2^{(n+4)-n} = 2^4 = 16$$

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و داندود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

فصل سوم: دنباله‌ها

بخش اول: آشنایی با دنباله‌ها

فرض کنیم به هر عدد طبیعی n ، عدد حقیقی a_n نظیر شده باشد، در این صورت فهرست $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ یک دنباله نام دارد. اعداد این فهرست، جملات دنباله نام دارند. a_1 جمله اول، a_2 جمله دوم، و همین طور a_n جمله n ام دنباله است که پس از آن همان طور که سه نقطه‌ی دوم نشان می‌دهد، دنباله تا بی‌نهایت می‌رود. جمله n ام a_n ، جمله‌ی عمومی دنباله نیز نامیده می‌شود. یک دنباله چیزی جز حالت خاصی از تابع نیست یعنی تابعی که قلمرواش مجموعه‌ی اعداد طبیعی است.

مثال: جملات دوم، پنجم و هفتم دنباله با جمله‌ی عمومی $a_n = 2^n$ را بیابید.

پاسخ: با انتخاب $n = 2, 5, 7$ داریم:

$$a_2 = 2^2 = 4, \quad a_5 = 2^5 = 32, \quad a_7 = 2^7 = 128$$

این دنباله را می‌توان به صورت $2, 4, 8, 16, \dots, 2^n, \dots$ نوشت.

راه دیگر نمایش یک دنباله، نوشتن جمله‌ی عمومی آن بین دو ابروست: $\{a_n\}$. مثلاً در این نماد، دنباله‌ی $2, 4, 8, 16, \dots, 2^n, \dots$ شکل اختصاری $\{2^n\}$ را به خود می‌گیرد.

مثال: چهار جمله‌ی اول دنباله‌ی $\{(-1)^n\}$ را بنویسید.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و داندود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و داندود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

پاسخ: چهار جمله‌ی اول عبارتند از ۱، -۱، ۱ و -۱. دنباله‌ی $\{(-1)^n\}$ ، مثل هر دنباله‌ی نامتناهی بی‌نهایت جمله دارد، اما فقط دو مقدار یعنی ۱ و -۱ را می‌گیرد.

دنباله حسابی

دنباله‌هایی را که هر جمله‌ی آن (غیر از جمله‌ی اول) از افزودن یک مقدار ثابت به جمله‌ی قبلی به دست می‌آید دنباله‌ی حسابی می‌نامیم، و به این مقدار ثابت قدر نسبت دنباله می‌گوییم. اگر اولین جمله‌ی یک دنباله‌ی حسابی a و قدر نسبت این دنباله d باشد، جملات این دنباله به شکل زیر خواهند بود:

$$a, a + d, a + 2d, \dots, a + (n - 1)d, \dots$$

جمله‌ی n ام این دنباله $a_n = a + (n - 1)d$ است.

مثال: شمعی ۲۵ سانتی‌متری را روشن کرده‌ایم. این شمع در هر دقیقه ۲ میلی‌متر کوتاه می‌شود. طول این شمع با گذشت زمان پس از هر دقیقه که می‌گذرد یک دنباله از اعداد به صورت زیر تشکیل می‌دهد:

$$۲۴.۸, ۲۴.۶, ۲۴.۴, \dots$$

این یک دنباله‌ی حسابی است و هر جمله از این دنباله با اضافه کردن عدد -۰.۲ به جمله‌ی قبلی به دست می‌آید. پس این یک دنباله‌ی حسابی با جمله‌ی اول ۲۴.۸ و قدر نسبت -۰.۲ است. اگر بخواهیم طول شمع را در دقیقه‌ی n ام محاسبه کنیم داریم:

$$a_n = a + (n - 1)d = ۲۴.۸ + (n - 1) \times (-۰.۲) = -۰.۲n + ۲۵$$

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و داندود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

در دنباله‌ی حسابی، اگر قدر نسبت مثبت باشد جمله‌های دنباله به اندازه‌ی ثابتی افزایش می‌یابند و اگر قدر نسبت منفی باشد جمله‌های دنباله به اندازه‌ی ثابتی کاهش می‌یابند.

مثال: جمله‌ی عمومی دنباله‌ی حسابی ... ۲۴، ۲۱، ۱۸، ۱۵ را مشخص کنید.

پاسخ: جمله‌ی اول این دنباله ۱۵ و قدر نسبت آن ۳+ است. بنابراین داریم:

$$a_n = a + (n - 1)d = 15 + (n - 1) \times 3 = 3n + 12$$

مثال: در دنباله‌ی حسابی با جمله‌ی اول ۱۳ و قدر نسبت ۱۱، کوچک‌ترین جمله‌ی چهار رقمی چندمین جمله‌ی این دنباله است؟

پاسخ: با توجه به اطلاعات مسأله $a = 13$ و $d = 11$. لذا

$$a_n = a + (n - 1)d = 13 + (n - 1) \times 11 = 11n + 2$$

با توجه به این‌که به دنبال کوچک‌ترین جمله‌ی چهار رقمی هستیم باید داشته باشیم $a_n > 1000$ و کمترین n صادق در این نامعادله را بیابیم.

$$a_n > 1000 \Rightarrow 11n + 2 > 1000 \Rightarrow n > \frac{998}{11} \cong 90.7$$

بنابراین، کمترین n برابر با $n = 91$ است.

در یک دنباله‌ی حسابی جملات a_m و a_n را در نظر می‌گیریم. $a_m = a + (m - 1)d$ و $a_n = a + (n - 1)d$ از تفاضل این دو جمله داریم:

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی‌برداری؛ به اشتراک‌گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

$$a_m - a_n = (a + (m - 1)d) - (a + (n - 1)d) = (m - n)d$$

بنابراین، برای جملات m ام و n ام از یک دنباله حسابی رابطه زیر به دست می‌آید:

$$d = \frac{a_m - a_n}{m - n}$$

مطلب دیگری که در مورد دنباله‌های حسابی باید بدانیم آن است که اگر a ، b و c سه جمله متوالی از یک دنباله حسابی باشند آن‌گاه b میانگین حسابی یا واسطه‌ی حسابی دو عدد a و c است یعنی $b = \frac{a+c}{2}$.

تست: جمله‌ی سوم و هشتم یک دنباله‌ی حسابی به ترتیب ۱۷ و ۷۲ است. جمله‌ی دهم این دنباله کدام است؟

۸۶ (۴)

۹۶ (۳)

۸۴ (۲)

۹۴ (۱)

پاسخ: گزینه‌ی ۱. با توجه به رابطه‌ی $d = \frac{a_m - a_n}{m - n}$ ، قدر نسبت دنباله‌ی حسابی را می‌یابیم.

$$d = \frac{a_8 - a_3}{8 - 3} = \frac{72 - 17}{5} = \frac{55}{5} = 11$$

از طرفی طبق فرض $a_3 = 17$ یعنی $a + 2d = 17$ یا معادل آن $a + 22 = 17$ پس $a = -5$. پس داریم:

$$a_{10} = a + 9d = -5 + 9 \times 11 = 99 - 5 = 94$$

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی‌برداری؛ به اشتراک‌گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی‌برداری؛ به اشتراک‌گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و داندود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

تست: اعداد $۲ + x$ ، $۲x + ۷$ و $۷ - ۲x$ سه جمله‌ی متوالی از یک دنباله‌ی حسابی اند. قدر نسبت این دنباله کدام است؟

$$-۴ (۴)$$

$$-۳ (۳)$$

$$-۲ (۲)$$

$$-۱ (۱)$$

پاسخ: گزینه‌ی ۴. باید داشته باشیم:

$$۲x + ۷ = \frac{(۷ - ۲x) + (۲ + x)}{۲}$$

$$۴x + ۱۴ = ۹ - x \Leftrightarrow ۵x = -۵ \Leftrightarrow x = -۱$$

بنابراین

لذا جملات این دنباله عبارتند از: ۱، ۵، ۹. که نشان می‌دهد قدر نسبت این دنباله ۴- است.

درج چند واسطه حسابی بین دو عدد

فرض کنیم k واسطه‌ی حسابی بین دو عدد a و b درج کرده‌ایم. اگر a را جمله‌ی اول دنباله‌ی حسابی در نظر بگیریم آن‌گاه b جمله‌ی $k + ۲$ دنباله است. پس

$$d = \frac{b - a}{k + ۱}$$

بنابراین، هرگاه k واسطه‌ی حسابی بین دو عدد a و b درج کنیم آن‌گاه قدر نسبت آن دنباله‌ی حسابی برابر است با $d = \frac{b - a}{k + ۱}$.

تست: بین دو عدد ۶ و ۳۸، هفت واسطه‌ی حسابی درج کرده‌ایم. قدر نسبت این دنباله‌ی حسابی کدام است؟

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی‌برداری؛ به اشتراک‌گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و داندود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

پاسخ: گزینه ی ۴. با توجه به فرمول $d = \frac{b-a}{k+1}$ داریم $d = \frac{38-6}{7+1} = \frac{32}{8} = 4$.

مجموع جملات دنباله حسابی

فرض کنیم $\{a_n\}$ یک دنباله ی حسابی باشد. مجموع n جمله ی اول دنباله ی a_n را با S_n نمایش می دهیم. بنابراین

$$\begin{aligned} S_1 &= a_1 \\ S_2 &= a_1 + a_2 \\ S_3 &= a_1 + a_2 + a_3 \\ &\vdots \\ S_n &= a_1 + a_2 + \dots + a_n \end{aligned}$$

قضیه: در دنباله ی حسابی $\{a_n\}$ با جمله ی اول a و قدر نسبت d داریم:

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$$

تست: در یک دنباله ی حسابی مجموع بیست جمله ی اول، سه برابر مجموع دوازده جمله ی اول آن است. اگر جمله ی سوم برابر ۶ باشد، جمله ی دهم کدام است؟

۳۸ (۴)

۳۶ (۳)

۳۴ (۲)

۳۲ (۱)

پاسخ: گزینه ی ۲. با توجه به داده های مسأله داریم $S_{12} = 3S_6$ و $a_3 = 6$. پس

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

$$\frac{20}{2}(2a + 19d) = 3 \times \frac{12}{2}(2a + 11d) \Leftrightarrow 20a + 190d = 36a + 198d \Leftrightarrow -8d = 16a$$

$$a + 2d = 6$$

و از این که $a_3 = 6$ داریم

$$\begin{cases} 16a + 8d = 0 \\ a + 2d = 6 \end{cases}$$

بنابراین از حل دستگاه

مقادیر $d = 4$ و $a = -2$ حاصل می‌شوند. لذا $a_{10} = a + 9d = -2 + 36 = 34$.

دنباله هندسی

دنباله‌هایی را که هر جمله‌ی آن (غیر از جمله‌ی اول) با ضرب یک مقدار ثابت در جمله‌ی قبلی به دست می‌آیند دنباله‌ی هندسی می‌نامند. به عنوان مثال، هر کدام از دنباله‌های زیر یک دنباله‌ی هندسی اند.

۱, ۱, ۱, ۱, ۱, ...

۱, $\sqrt{5}$, ۵, $5\sqrt{5}$, ۲۵, ...

۳, ۶, ۱۲, ۲۴, ۴۸, ...

در یک دنباله‌ی هندسی هر جمله (غیر از جمله‌ی اول) با ضرب یک مقدار ثابت مانند q در جمله‌ی قبلی به دست می‌آید. q را قدر نسبت این دنباله می‌نامند. اگر اولین جمله‌ی یک دنباله‌ی هندسی a و قدر نسبت آن q باشد، جملات این دنباله به شکل زیر اند:

$$a, aq, aq^2, \dots, aq^{n-1}, \dots$$

جمله‌ی n ام این دنباله $a_n = aq^{n-1}$ است.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

تست: در يك دنباله‌ي هندسي با جملات مثبت، $a_3 = 128$ و $a_7 = 648$. جمله‌ي دهم کدام است؟

۲۱۸۷ (۴)

۱۷۷۴ (۳)

۱۴۵۸ (۲)

۹۸۴ (۱)

پاسخ: گزینه‌ي ۴. از این که $a_3 = 128$ داریم $aq^2 = 128$ و از این که $a_7 = 648$ داریم $aq^6 = 648$. با تقسیم طرفین این دو رابطه بر هم داریم:

$$\frac{aq^6}{aq^2} = \frac{648}{128} \Rightarrow q^4 = \frac{81}{16} \Rightarrow q = \frac{3}{2}$$

ضمناً $aq^2 = 128$ پس $a\left(\frac{3}{2}\right)^2 = 128$ یعنی $a = 128 \times \frac{4}{9} = \frac{512}{9}$ بنابراین داریم:

$$a_{10} = aq^9 = \frac{512}{9} \times \left(\frac{3}{2}\right)^9 = \frac{2^9}{3^2} \times \frac{3^9}{2^9} = 3^7 = 2187$$

در يك تصاعد هندسي جملات a_m و a_n را در نظر مي‌گیریم. $a_m = aq^{m-1}$ و $a_n = aq^{n-1}$

با تقسیم این دو جمله بر هم داریم:

$$\frac{a_m}{a_n} = q^{m-n}$$

بنابراین برای جملات a_m و a_n از يك دنباله‌ي هندسي رابطه‌ي زیر به دست مي‌آید:

$$q = \sqrt[m-n]{\frac{a_m}{a_n}}$$

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

مطلب دیگری که در مورد دنباله‌های هندسی باید بدانیم این است که اگر a ، b و c سه جمله‌ی متوالی از یک دنباله‌ی هندسی باشند آن‌گاه b میانگین هندسی یا واسطه‌ی هندسی دو عدد a و c است. یعنی $b = \sqrt{ac}$ یا $b^2 = ac$.

مثال: با اضافه کردن یک مقدار ثابت به هر یک از اعداد ۱۰۰، ۵۰ و ۲۰ یک دنباله‌ی هندسی تشکیل می‌شود. قدر نسبت دنباله‌ی هندسی ایجاد شده کدام است؟

$$\frac{1}{2} (4) \quad \frac{3}{2} (3) \quad \frac{4}{3} (2) \quad \frac{5}{3} (1)$$

پاسخ: گزینه‌ی ۱. فرض کنیم مقدار ثابت اضافه شده به هر یک از سه عدد x باشد. بنابراین سه عدد $100 + x$ ، $50 + x$ و $20 + x$ تشکیل یک دنباله‌ی هندسی می‌دهند و داریم $(50 + x)^2 = (20 + x)(100 + x)$

$$x^2 + 100x + 2500 = x^2 + 120x + 2000 \Leftrightarrow 20x = 500 \Leftrightarrow x = 25$$

بنابراین دنباله‌ی هندسی مورد نظر

$$45, 75, 125$$

است. قدر نسبت این دنباله‌ی هندسی برابر است با

$$q = \frac{75}{45} = \frac{5}{3}$$

تست: در یک دنباله‌ی حسابی غیر ثابت، جملات اول، پنجم و یازدهم به ترتیب سه جمله‌ی متوالی از یک دنباله‌ی هندسی صعودی اند. قدر نسبت دنباله‌ی هندسی کدام است؟

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

$$\frac{3}{2} (4)$$

$$\frac{4}{3} (3)$$

$$\frac{5}{4} (2)$$

$$\frac{6}{5} (1)$$

پاسخ: گزینه ی ۴. جملات اول، پنجم و یازدهم دنباله ی حسابی به صورت زیر اند:

$$a, a + 4d, a + 10d$$

چون این سه جمله تشکیل یک دنباله ی هندسی می دهند داریم:

$$(a + 4d)^2 = a(a + 10d) \Leftrightarrow a^2 + 8ad + 16d^2 = a^2 + 10ad \Leftrightarrow 16d^2 = 2ad$$

چون $d \neq 0$ پس $a = 8d$ و لذا جملات فهرست فوق به صورت زیر اند:

$$8d, 12d, 18d$$

این سه جمله تشکیل یک دنباله ی هندسی با قدر نسبت $q = \frac{12d}{8d} = \frac{3}{2}$ می دهند.

درج چند واسطه هندسی بین دو عدد

فرض کنیم k واسطه ی هندسی بین دو عدد a و b درج کرده ایم. بنابراین، اگر a را جمله ی اول دنباله ی هندسی در نظر بگیریم آن گاه b جمله ی $k + 2$ ام دنباله است. پس داریم

$$q = \frac{a_{k+2}}{a_1} = \sqrt[k+1]{\frac{b}{a}}$$

بنابراین، هرگاه k واسطه ی هندسی بین دو عدد a و b درج کنیم آن گاه قدر نسبت آن دنباله ی هندسی برابر است با

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

$$q = \sqrt[k+1]{\frac{b}{a}}$$

مثال: اگر پنج واسطه‌ی هندسی مثبت بین دو عدد ۸ و ۵۸۳۲ درج کنیم، پنجمین جمله از دنباله‌ی هندسی به دست آمده کدام است؟

۱۹۴۴ (۴)

۱۱۶۸ (۳)

۸۳۲ (۲)

۶۴۸ (۱)

پاسخ: گزینه‌ی ۱. طبق فرمول فوق داریم $q = \sqrt[6]{\frac{5832}{8}} = \sqrt[6]{729} = 3$. بنابراین، جملات این دنباله ی هندسی به صورت زیر اند:

۸, ۲۴, ۷۲, ۲۱۶, ۶۴۸, ۱۹۴۴, ۵۸۳۲

مجموع جملات دنباله هندسی

فرض کنیم $\{a_n\}$ يك دنباله‌ی هندسی باشد. مجموع n جمله‌ی اول دنباله‌ی a_n را با S_n نمایش می دهیم. بنابراین داریم:

$$S_1 = a_1$$

$$S_2 = a_1 + a_2$$

$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$$

$$\vdots$$

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

قضیه: در دنباله‌ی هندسی $\{a_n\}$ با جمله‌ی اول a و قدر نسبت q داریم:

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

$$S_n = \frac{a(1 - q^n)}{1 - q}$$

مثال: در يك دنباله ي هندسي، مجموع جملات اول و سوم برابر ۱ و مجموع چهار جمله ي اول آن ۳ است. مجموع شش جمله ي اول آن کدام است؟

۱۰.۸ (۴)

۱۲.۶ (۳)

۱۱.۲ (۲)

۱۳.۴ (۱)

پاسخ: گزینه ي ۳. از اطلاعات مسأله داریم $a_1 + a_3 = 1$ و $S_4 = 3$. بنابراین

$$\begin{aligned} a + aq^2 &= 1 \Rightarrow a(1 + q^2) = 1 \\ \frac{a(1 - q^4)}{1 - q} &= 3 \Rightarrow \frac{a(1 - q)(1 + q)(1 + q^2)}{1 - q} = 3 \Rightarrow a(1 + q)(1 + q^2) = 3 \end{aligned}$$

از تلفیق دو تساوي فوق $1 + q = 3$ به دست مي آيد و داریم $q = 2$ و $a = \frac{1}{5}$. پس

$$S_6 = \frac{a(1 - q^6)}{1 - q} = \frac{\frac{1}{5}(1 - 2^6)}{1 - 2} = \frac{63}{5} = 12.6$$

تست: حاصل $(1 - x + x^2 - x^3 + x^4)(1 + x + x^2 + x^3 + x^4)$ به ازاي $x = \sqrt{3}$ کدام است؟

۱۲۲ (۴)

۱۲۱ (۳)

۱۲۰ (۲)

۱۱۹ (۱)

پاسخ: گزینه ي ۳. طبق فرمول مجموع جملات دنباله ي هندسي داریم

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

$$(1 + x + x^2 + x^3 + x^4)(1 - x + x^2 - x^3 + x^4) = \frac{1 - x^5}{1 - x} \times \frac{1 - (-x)^5}{1 - (-x)} = \frac{1 - x^5}{1 - x} \times \frac{1 + x^5}{1 + x}$$

$$= \frac{1 - x^{10}}{1 - x^2}$$

با جایگذاری $x = \sqrt[3]{3}$ حاصل نسبت اخیر برابر ۱۲۱ است.

تست: در يك دنباله هندسي غير ثابت، مجموع سه جمله دوم، ۲۷ برابر مجموع سه جمله اول است. قدر نسبت این دنباله هندسي کدام است؟

$$\sqrt[4]{3} (4)$$

$$\sqrt[3]{3} (3)$$

$$3 (2)$$

$$\sqrt{3} (1)$$

پاسخ: گزینه ۲. مجموع سه جمله دوم يعني $a_4 + a_5 + a_6$ را مي توان به صورت $S_6 - S_3$ در نظر گرفت. بنابرین، طبق اطلاعات مسأله داریم:

$$\frac{S_6 - S_3}{S_3} = 27 \Rightarrow \frac{S_6}{S_3} = 28 \Rightarrow \frac{\frac{a(1 - q^6)}{1 - q}}{\frac{a(1 - q^3)}{1 - q}} = 28 \Rightarrow \frac{1 - q^6}{1 - q^3} = 28 \Rightarrow 1 + q^3 = 28 \Rightarrow q^3 = 27$$

$$\Rightarrow q = 3$$

حد مجموع جملات دنباله هندسی

براي محاسبه ي مجموع n جمله ي اول دنباله ي هندسي رابطه ي $S_n = \frac{a(1 - q^n)}{1 - q}$ به دست آمد. حال، اگر $|q| < 1$ آن گاه با بزرگ شدن n مقدار q^n و کوچک تر مي شود. به عبارت دیگر:

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی‌برداری؛ به اشتراک‌گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

$$|q| < 1; \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a(1 - q^n)}{1 - q} = \frac{a}{1 - q}$$

تست: اگر $|r| < 1$ و حد مجموع عبارت $a + ar + ar^2 + \dots$ برابر V و حد مجموع عبارت $ar + ar^3 + ar^5 + \dots$ برابر 3 باشد، آن‌گاه $a + r$ کدام است؟

$$\frac{7}{3} (4)$$

$$\frac{5}{2} (3)$$

$$\frac{12}{7} (2)$$

$$\frac{4}{3} (1)$$

پاسخ: گزینه ۳. اطلاعات داده شده به صورت $\frac{a}{1-r} = 7$ و $\frac{ar}{1-r^2} = 3$ خلاصه می‌شوند. بنابراین $\frac{r}{1+r} = 3$ و لذا $r = \frac{3}{4}$ همچنین

$$\frac{a}{1-r} = 7 \Rightarrow \frac{a}{1-\frac{3}{4}} = 7 \Rightarrow a = \frac{7}{4}$$

$$a + r = \frac{7}{4} + \frac{3}{4} = \frac{5}{2}$$

تست: در یک دنباله هندسی نزولی، هر جمله برابر با حد مجموع جملات پس از خود است. قدر نسبت این دنباله کدام است؟

$$\frac{\sqrt{2}}{2} (4)$$

$$\frac{1}{4} (3)$$

$$\frac{1}{3} (2)$$

$$\frac{1}{2} (1)$$

پاسخ: گزینه ۱. دنباله هندسی مورد نظر به صورت

$$a, aq, aq^2, \dots$$

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی‌برداری؛ به اشتراک‌گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن ([لینک خرید](#))، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

است و داریم

$$a = \frac{aq}{1-q} \Rightarrow \frac{q}{1-q} = 1 \Rightarrow q = \frac{1}{2}$$

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن ([لینک خرید](#))، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی‌برداری؛ به اشتراک‌گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و داندود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

پرسش‌های چهارگزینه‌ای فصل سوم، دنباله‌ها

۱. جملات $۳ + ۴a$ ، $۴ + ۲a$ و $۱ - ۲a$ به ترتیب جمله‌های اول، پنجم و نهم یک دنباله حسابی هستند. مقدار a کدام است؟ (دیوان محاسبات - ۹۴)

- (۱) $\frac{-۳}{۲}$
- (۲) $\frac{۱}{۲}$
- (۳) ۳
- (۴) ۲

۲. طول اضلاع یک مثلث قائم‌الزاویه تشکیل دنباله حسابی می‌دهند، اگر محیط این مثلث ۴۸ واحد باشد، مساحت مثلث بر حسب واحد مربع کدام است؟ (آموزش و پرورش - ۹۵)

- (۱) ۵۴
- (۲) ۷۲
- (۳) ۹۶
- (۴) ۱۲۰

۳. در یک دنباله حسابی جمله اول و قدرنسبت با هم برابرند. اگر جمله ششم ۳۰ باشد، آن‌گاه مجموع بیست جمله اول این دنباله کدام است؟ (فراگیر چهارم و آموزش و پرورش - ۹۶)

- (۱) ۱۱۵۰
- (۲) ۱۱۰۰
- (۳) ۱۰۵۰
- (۴) ۱۰۰۰

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی‌برداری؛ به اشتراک‌گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و داندود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و داندود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

۴. در دسته بندی اعداد زوج به صورت ...، (۱۲، ۱۰، ۸)، (۶، ۴)، (۲)، آخرین عدد در دسته پانزدهم، کدام است؟ (دستگاه های اجرایی - فراگیر دوم - ۹۴)

(۱) ۲۴۰

(۲) ۲۴۲

(۳) ۲۴۴

(۴) ۲۳۸

۵. اگر $3 - 2x$ ، $\sqrt{x}$ و x سه جمله اول یک دنباله هندسی باشد، جمله دهم چند برابر جمله هفتم است؟ (دستگاه های اجرایی - فراگیر سوم - ۹۵)

(۱) $3\sqrt{2}$

(۲) ۲

(۳) ۳

(۴) $2\sqrt{2}$

۶. حاصل عبارت $A = \frac{1+t+t^2+\dots+t^8}{1+t^3+t^6}$ به ازای $t = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ ، کدام است؟ (فراگیر چهارم و آموزش و پرورش - ۹۶)

(۱) ۵

(۲) ۱

(۳) ۴

(۴) ۲

۷. مجموع سه جمله متوالی از دنباله ای حسابی برابر ۴۵ و حاصل ضرب این جملات ۳۲۴۰ است. قدرنسبت این دنباله کدام است؟ (دانشگاه های علوم پزشکی - ۹۹)

(۱) ± 1

(۲) ± 2

(۳) ± 3

(۴) ± 4

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و داندود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

۸. اگر a ، $\sqrt{3}a$ و $a + 2$ سه جمله اول یک دنباله هندسی باشند، آن گاه حاصل $a_9 - a_7$ کدام است؟ (آموزش و پرورش - ۹۴)

- (۱) ۱۸
- (۲) ۲۷
- (۳) ۵۴
- (۴) ۶۳

۹. قدرنسبت دنباله هندسی $a_1, a_2, a_3, \dots$ برابر ۳ است. قدرنسبت دنباله هندسی $a_1^2, a_2^2, a_3^2, \dots$ کدام است؟ (دستگاه های اجرایی - فراگیر اول - ۹۴)

- (۱) ۳
- (۲) ۶
- (۳) ۹
- (۴) ۱۲

۱۰. در یک تصاعد هندسی، مجموع لگاریتم های سه جمله اول برابر ۹ است. جمله دوم این تصاعد کدام است؟ (فراگیر پنجم و آموزش و پرورش - ۹۷)

- (۱) ۱۰۰۰
- (۲) ۲
- (۳) ۳
- (۴) ۱۰۰

۱۱. در یک تصاعد حسابی جمله هفتم برابر ۴ و هر جمله از جمله ماقبل خود به اندازه $\frac{1}{3}$ کمتر است. مجموع هشت جمله اول این تصاعد کدام است؟ (فراگیر پنجم و آموزش و پرورش - ۹۷)

- (۱) ۵.۵۹
- (۲) ۵.۴۹
- (۳) ۴۲
- (۴) ۷۰

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

۱۲. در یک دنباله هندسی، حاصل ضرب جملات چهارم و هفتم، برابر ۸ است. حاصل ضرب جملات اول و دهم کدام است؟ (وزارت نیرو - ۹۷)

- ۴ (۱)
- ۸ (۲)
- ۱۲ (۳)
- ۱۶ (۴)

۱۳. جملات اول، پنجم و سی و سوم یک دنباله حسابی به ترتیب جملات متوالی یک دنباله هندسی هستند. قدرنسبت دنباله هندسی کدام است؟ (فراگیر هفتم، آموزش و پرورش و علوم پزشکی - ۹۸)

- ۷ (۱)
- ۶ (۲)
- ۵ (۳)
- ۴ (۴)

۱۴. اگر عدد ثابت a را با همه جملات یک دنباله حسابی جمع کنیم، آنگاه قدرنسبت این دنباله چگونه تغییر می کند؟ (فراگیر هفتم، آموزش و پرورش و علوم پزشکی - ۹۸)

- (۱) ثابت می ماند.
- (۲) به اندازه a افزایش می یابد.
- (۳) به اندازه a کاهش می یابد.
- (۴) به علامت a وابسته است.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی‌برداری؛ به اشتراک‌گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و داندود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

۱۵. در یک دنباله حسابی، جمله دوم و قدرنسبت با هم برابرند. جمله سیزدهم، چند برابر جمله ششم است؟ (فراگیر هشتم و آموزش و پرورش - ۹۹)

(۱) ۲.۴

(۲) ۲.۱

(۳) ۳.۲

(۴) ۲.۳

۱۶. دو عدد مثبت a و b را بین ۳ و ۲۵ درج می‌کنیم، به طوری که سه عدد ابتدایی تشکیل دنباله حسابی و سه عدد انتهایی تشکیل دنباله هندسی می‌دهند. کدام عدد بزرگترین عددی است که می‌توانیم درج کنیم؟ (فراگیر هشتم و آموزش و پرورش - ۹۹)

(۱) ۵

(۲) ۲.۲۵

(۳) ۱

(۴) ۷.۵

۱۷. اگر $S_n = 2n^2 + n$ مجموع n جمله اول دنباله حسابی $\{a_n\}$ باشد، آن‌گاه a_{10} کدام است؟ (دانشگاه‌های علوم پزشکی و وزارت بهداشت - ۹۹)

(۱) ۴۰

(۲) ۴۳

(۳) ۳۶

(۴) ۳۹

۱۸. مجموع ده جمله اول تصاعد هندسی $\{۳, ۶, ۱۲, \dots\}$ کدام است؟ (آموزش و پرورش - ۸۹)

(۱) ۳۰۹۶

(۲) ۳۰۶۹

(۳) ۶۹۳۰

(۴) ۹۶۳۰

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی‌برداری؛ به اشتراک‌گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و داندود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن ([لینک خرید](#))، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

۱۹. کدام دنباله فیبوناچی است؟ (دستگاه‌های اجرایی - فراگیر ششم - ۹۷)

۱) ۱، ۳، ۶، ۱۰، ۱۵، ...

۲) ۱، ۴، ۹، ۱۶، ۲۵، ...

۳) ۱، ۱، ۲، ۳، ۵، ۸، ...

۴) ۱، ۳، ۷، ۱۳، ۲۱، ...

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن ([لینک خرید](#))، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی‌برداری؛ به اشتراک‌گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و داندود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

پاسخ پرسش‌های چهارگزینه‌ای فصل سوم، دنباله‌ها

۱. گزینه ۳. در دنباله‌های حسابی می‌دانیم:

$$d = \frac{a_m - a_n}{m - n} \Rightarrow d = \frac{a_9 - a_5}{9 - 5} = \frac{a_5 - a_1}{5 - 1}$$

$$\Rightarrow a_9 - a_5 = a_5 - a_1$$

$$\Rightarrow (2a - 1) - (2a + 4) = (2a + 4) - (4a + 3)$$

$$\Rightarrow -5 = -2a + 1$$

$$\Rightarrow a = 3$$

۲. گزینه ۳. اندازه اضلاع مثلث را a ، $a - d$ و $a + d$ در نظر می‌گیریم. از این که محیط این مثلث ۴۸ واحد است نتیجه می‌شود،

$$(a - d) + a + (a + d) = 48 \Rightarrow 3a = 48 \Rightarrow a = 16$$

بنابراین اندازه اضلاع این مثلث قائم‌الزاویه $16 - d$ ، 16 و $16 + d$ است. بنابر قضیه فیثاغورس داریم:

$$(16 + d)^2 = 16^2 + (16 - d)^2 \Rightarrow (16 + d)^2 - (16 - d)^2 = 16^2 \Rightarrow 32 \times 2d = 16^2 \Rightarrow d = 4$$

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی‌برداری؛ به اشتراک‌گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و داندود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

بنابراین اندازه اضلاع قائمه این مثلث، ۱۲ و ۱۶ واحد است و اندازه مساحت آن برابر است با:

$$S = \frac{12 \times 16}{2} = 6 \times 16 = 96$$

۳. گزینه ۳.

$$a_6 = 30 \Rightarrow a_1 + 5d = 30 \Rightarrow d + 5d = 30 \Rightarrow 6d = 30 \Rightarrow a_1 = d = 5$$

$$S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d) \Rightarrow S_{20} = \frac{20}{2}(2 \times 5 + (20-1) \times 5) = 1050$$

۴. گزینه ۱. فرض کنیم a_n ، آخرین عدد دسته n ام باشد، بنابراین $a_1 = 2$ ، $a_2 = 2 + 4 = 6$ ، $a_3 = 2 + 4 + 6 = 12$ و به همین ترتیب:

$$a_{15} = 2 + 4 + 6 + \dots + 30 = \frac{15 \times 32}{2} = 15 \times 16 = 240$$

۵. گزینه ۴. می دانیم اگر a ، b و c سه جمله‌ی متوالی از یک دنباله‌ی هندسی باشند آن گاه b میانگین هندسی یا واسطه‌ی هندسی دو عدد a و c است. یعنی $b = \sqrt{ac}$ یا $b^2 = ac$. بنابراین داریم:

$$\sqrt{x}^2 = x(2x - 3) \Rightarrow x = 2x^2 - 3x \Rightarrow 2x^2 - 4x = 0 \Rightarrow 2x(x - 2) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ یا } x = 2$$

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

• $x = 0$ قابل قبول نیست و $x = 2$. بنابراین سه جمله اول این دنباله هندسی ۱، $\sqrt{2}$ و ۲ اند که نتیجه می‌دهد قدرنسبت این دنباله هندسی $q = \sqrt{2}$ است. بنابراین:

$$\frac{a_m}{a_n} = q^{m-n} \Rightarrow \frac{a_{10}}{a_7} = q^{10-7} \Rightarrow \frac{a_{10}}{a_7} = q^3 = \sqrt{2}^3 = 2\sqrt{2}$$

۶. گزینه ۴.

$$\frac{1+t+t^2+\dots+t^8}{1+t^3+t^6} = \frac{\frac{t^9-1}{t-1}}{\frac{t^9-1}{t^3-1}} = \frac{t^3-1}{t-1} = t^2+t+1$$

با جایگذاری $t = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ ، حاصل برابر است با:

$$\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right) + 1 = \frac{5-2\sqrt{5}+1}{4} + \frac{\sqrt{5}-1}{2} + 1 = 2$$

۷. گزینه ۳. سه جمله متوالی را $a-d$ ، a و $a+d$ در نظر می‌گیریم. مجموع این سه جمله ۴۵ است بنابراین:

$$(a-d) + a + (a+d) = 45 \Rightarrow 3a = 45 \Rightarrow a = 15$$

پس این سه جمله $15-d$ ، 15 و $15+d$ اند. حاصل ضرب این جملات ۳۲۴۰ است پس داریم:

$$(15-d) \times 15 \times (15+d) = 3240 \Rightarrow (15-d) \times (15+d) = 216 \Rightarrow d^2 = 9 \Rightarrow d = \pm 3$$

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و داندود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

۸. گزینه ۳. می دانیم اگر a, b, c سه جمله‌ی متوالی از یک دنباله‌ی هندسی باشند آن‌گاه b میانگین هندسی یا واسطه‌ی هندسی دو عدد a و c است. یعنی $b = \sqrt{ac}$ یا $b^2 = ac$. بنابراین داریم:

$$(\sqrt{3}a)^2 = a(a+2) \Rightarrow 3a = a^2 + 2a \Rightarrow a^2 - a = 0 \Rightarrow a(a-1) = 0 \Rightarrow a = 0 \text{ یا } a = 1$$

$a = 0$ قابل قبول نیست و $a = 1$. بنابراین سه جمله اول این دنباله هندسی ۱، $\sqrt{3}$ و ۳ اند که نتیجه می‌دهد قدرنسبت این دنباله هندسی $q = \sqrt{3}$ است. بنابراین:

$$a_9 - a_7 = a_1 q^8 - a_1 q^6 = q^6 - q^6 = q^6 (q^2 - 1) = \sqrt{3}^6 (\sqrt{3}^2 - 1) = 27 \times 2 = 54$$

۹. گزینه ۳.

۱۰. گزینه ۱. سه جمله اول این تصاعد هندسی را $\frac{a}{q}$ ، a و aq در نظر می‌گیریم. از این‌که مجموع لگاریتم‌های سه جمله اول برابر ۹ است داریم:

$$\log\left(\frac{a}{q}\right) + \log(a) + \log(aq) = 9 \Rightarrow \log\left(\frac{a}{q} \times a \times aq\right) = 9$$

$$\Rightarrow \log(a^3) = 9$$

$$\Rightarrow 3 \log a = 9$$

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و داندود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

$$\Rightarrow \log a = 3$$

$$\Rightarrow a = 1000$$

سه جمله اول این تصاعد هندسی را a ، $\frac{a}{q}$ و aq در نظر گرفته ایم بنابراین جمله دوم $a = 1000$ است.

۱۱. گزینه ۳. با توجه به اطلاعات داده شده، $a_7 = 4$ و $d = -\frac{1}{7}$.

$$a_7 = 4 \Rightarrow a_1 + (7-1) \times \left(-\frac{1}{7}\right) = 4 \Rightarrow a_1 = 7$$

اکنون مجموع هشت جمله اول این تصاعد حسابی را به دست می آوریم.

$$S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d) \Rightarrow S_8 = \frac{8}{2} \left(2 \times 7 + (8-1) \times \left(-\frac{1}{7}\right) \right) = 4 \left(14 - \frac{7}{7} \right) = 56 - 4 = 52$$

۱۲. گزینه ۲.

$$a_4 \times a_7 = 8 \Rightarrow a_1 q^3 \times a_1 q^6 = 8 \Rightarrow a_1^2 q^9 = 8$$

اکنون حاصل ضرب جملات اول و دهم را می یابیم:

$$a_1 \times a_{10} = a_1 \times a_1 q^9 = a_1^2 q^9 = 8$$

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

۱۳. گزینه ۱. جملات اول، پنجم و سی و سوم دنباله‌ی حسابی به صورت زیر اند:

$$a, a + 4d, a + 32d$$

چون این سه جمله تشکیل یک دنباله‌ی هندسی می‌دهند داریم:

$$(a + 4d)^2 = a(a + 32d) \Leftrightarrow a^2 + 8ad + 16d^2 = a^2 + 32ad \Leftrightarrow 16d^2 = 24ad$$

چون $d \neq 0$ پس $a = \frac{2}{3}d$ و لذا جملات فهرست فوق به صورت زیر اند:

$$\frac{2}{3}d, \frac{14}{3}d, \frac{98}{3}d$$

این سه جمله تشکیل یک دنباله‌ی هندسی با قدر نسبت $q = \frac{\frac{14}{3}d}{\frac{2}{3}d} = 7$ می‌دهند.

۱۴. گزینه ۱.

۱۵. گزینه ۱. در این دنباله حسابی، جمله دوم و قدرنسبت با هم برابرند لذا:

$$a_2 = d \Rightarrow a_1 + d = d \Rightarrow a_1 = 0$$

اکنون نسبت جملات سیزدهم و ششم را می‌یابیم:

$$\frac{a_{13}}{a_6} = \frac{a_1 + 12d}{a_1 + 5d} = \frac{0 + 12d}{0 + 5d} = \frac{12}{5} = 2.4$$

۱۶. گزینه ۴.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و داندود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

$$-۳ \quad a \quad b \quad ۲۵$$

بنابر اطلاعات داده شده، $b - a = a - (-۳)$ ، که نتیجه می دهد $b = ۲a + ۳$ ، از طرفی دیگر $\frac{۲۵}{b} = \frac{b}{a}$ که نتیجه می دهد $b^2 = ۲۵a$.

$$\begin{cases} ۲a - b = ۳ \\ b^2 = ۲۵a \end{cases} \Rightarrow (۲a + ۳)^2 = ۲۵a \Rightarrow ۴a^2 + ۱۲a + ۹ = ۲۵a \Rightarrow ۴a^2 - ۱۳a + ۹ = ۰$$

مجموع ضرایب معادله درجه دوم $۴a^2 - ۱۳a + ۹ = ۰$ برابر صفر است پس یک ریشه آن $a = ۱$ و ریشه دیگر $a = \frac{۹}{۴}$ است.

اگر $a = ۱$ آن گاه $b = ۵$ و جملات مورد نظر به صورت زیر اند:

$$-۳ \quad a = ۱ \quad b = ۵ \quad ۲۵$$

اگر $a = \frac{۹}{۴}$ آن گاه $b = \frac{۱۵}{۲}$ و جملات مورد نظر به صورت زیر اند:

$$-۳ \quad a = \frac{۹}{۴} \quad b = \frac{۱۵}{۲} \quad ۲۵$$

بزرگترین عددی که می توانیم درج کنیم، عدد $۷.۵ = \frac{۱۵}{۲}$ است.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و داندود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و داندود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

$$17. \text{گزینه ۴.} \quad a_{10} = S_{10} - S_9 = (2 \times 10^2 + 10) - (2 \times 9^2 + 9) = 210 - 171 = 39$$

۱۸. گزینه ۲. در دنباله ی هندسی $\{a_n\}$ با جمله اول $a = 3$ و قدرنسبت $q = 2$ داریم:

$$S_n = \frac{a(1 - q^n)}{1 - q} \Rightarrow S_{10} = \frac{3 \times (1 - 2^{10})}{1 - 2} = \frac{3 \times (1 - 1024)}{1 - 2} = \frac{3 \times (-1023)}{-1} = 3069$$

۱۹. گزینه ۳. غیر از دو عدد اول، اعداد بعدی از جمع دو عدد قبلی خود به دست می آیند. اولین اعداد این دنباله عبارت اند از: $1, 1, 2, 3, 5, 8, \dots$

این اعداد به نام لئوناردو فیبوناچی، ریاضی دان ایتالیایی قرن سیزدهم میلادی، نام گذاری شده است.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و داندود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و داندود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

فصل چهارم، معادله و نامعادله درجه دوم

بخش اول: معادله درجه دوم

یک معادله درجه دوم به شکل $ax^2 + bx + c = 0$ با $a \neq 0$ نوشته می شود که در آن x متغیر و اعداد ثابت a ، b و c ضرایب نامیده می شوند. جواب های معادله درجه دوم (در صورت وجود) ریشه های معادله نام دارند.

حل معادله درجه دوم به روش تجزیه

اگر عبارت $ax^2 + bx + c$ را بتوان به حاصل ضرب دو عبارت درجه یک تجزیه کرد معادله $ax^2 + bx + c = 0$ به سادگی حل می شود. مثلاً برای حل معادله، $x^2 - 3x + 2 = 0$ داریم $x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2) = 0$ نتیجه می شود $x-1=0$ یا $x-2=0$ بنابراین دو جواب به صورت $x=1$ یا $x=2$ به دست می آید.

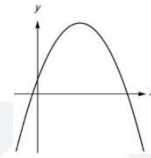
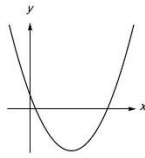
روش کلی حل معادله های درجه دوم

برای حل معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ ، با فرض $\Delta = b^2 - 4ac$ جواب ها به صورت $x_1, x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ اند. با توجه به علامت Δ سه حالت ممکن است:

حالت اول: $\Delta > 0$. در این حالت معادله دارای دو ریشه حقیقی است. اگر x_1 و x_2 ریشه های معادله $ax^2 + bx + c = 0$ باشند، آن گاه $x_1, x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ و ضمناً x_1 و x_2 طول نقاط برخورد تابع $f(x) = ax^2 + bx + c$ با محور x ها اند.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و داندود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

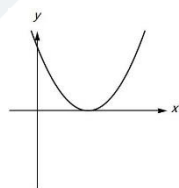
این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی‌برداری؛ به اشتراک‌گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.



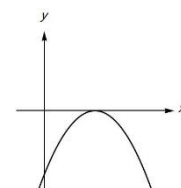
اگر $a < 0$ ، دهانه سهمی رو به پایین است. اگر $a > 0$ ، دهانه سهمی رو به بالا است.

در این حالت قسمتی از نمودار تابع در زیر محور x ها قرار دارد و قسمتی از نمودار در بالای محور x ها قرار دارد. توجه کنید علامت مقادیری از نمودار تابع که بین دو ریشه قرار گرفته است با علامت a مخالف است. از این مطلب در تعیین علامت عبارت درجه دوم $ax^2 + bx + c$ استفاده می‌کنیم.

حالت دوم: $\Delta = 0$. در این حالت جواب معادله به صورت $x_1 = \frac{-b \pm \sqrt{0}}{2a} = \frac{-b}{2a}$ است که به آن ریشه مضاعف معادله می‌گوییم. نمودار تابع $f(x) = ax^2 + bx + c$ در این وضعیت بر محور x ها مماس است.



$\Delta = 0$ و $a > 0$

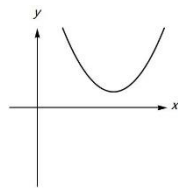


$\Delta = 0$ و $a < 0$

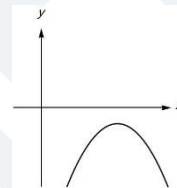
این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی‌برداری؛ به اشتراک‌گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی‌برداری؛ به اشتراک‌گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

حالت سوم: $\Delta < 0$. در این حالت برای معادله جواب حقیقی وجود ندارد و نمودار تابع $f(x) = ax^2 + bx + c$ محور x ها را قطع نمی‌کند.



$$a > 0 \text{ و } \Delta < 0$$



$$a < 0 \text{ و } \Delta < 0$$

به شرط آن که $a > 0$ مقادیر تابع همواره مثبت است و اگر $a < 0$ مقادیر تابع همواره منفی است.

نمودار تابع درجه دوم

نمودار تابع درجه دوم $f(x) = ax^2 + bx + c$ سهمی نام دارد، مختصات رأس سهمی به صورت $(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a})$ است.

تجزیه عبارت‌های درجه دوم

فرض کنیم $f(x) = ax^2 + bx + c$ که در آن $a \neq 0$. با توجه به علامت Δ سه حالت داریم:

حالت اول: $\Delta > 0$. فرض کنیم x_1 و x_2 ریشه‌های چندجمله‌ای $f(x)$ باشند. در این صورت تجزیه $f(x)$ به صورت زیر است:

$$f(x) = ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی‌برداری؛ به اشتراک‌گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

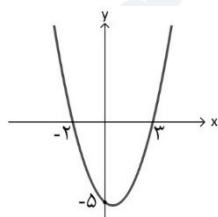
این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

حالت دوم: $\Delta = 0$. در این حالت $x_1 = \frac{-b}{2a}$ ریشه مضاعف معادله است و تجزیه $f(x)$ به صورت زیر است:

$$f(x) = ax^2 + bx + c = a(x - x_1)^2 = a\left(x - \frac{-b}{2a}\right)^2$$

حالت سوم: $\Delta < 0$. در این حالت چند جمله ای $f(x) = ax^2 + bx + c$ تجزیه نمی شود.

مثال: شکل زیر نمودار تابع درجه دوم به معادله $f(x) = ax^2 + bx + c$ را نشان می دهد. حاصل $a + b + c$ کدام است؟



۵ (۱)

۵ (۲)

۶ (۳)

۶ (۴)

پاسخ: گزینه ۲. با توجه به این که $x = 3$ و $x = -2$ ریشه های تابع $f(x) = ax^2 + bx + c$ اند داریم:

$$f(x) = ax^2 + bx + c = a(x + 2)(x - 3)$$

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی‌برداری؛ به اشتراک‌گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

از طرفی با توجه به شکل $f(0) = -5$ پس

$$f(0) = a(0 + 2)(0 - 3) = -5$$

و لذا $a = \frac{5}{6}$ ، بنابراین، $f(x) = \frac{5}{6}(x + 2)(x - 3) = \frac{5}{6}x^2 - \frac{5}{6}x - 5$ و $a + b + c = \frac{5}{6} - \frac{5}{6} - 5 = -5$

تعیین علامت چندجمله‌ای درجه دوم

فرض کنیم $f(x) = ax^2 + bx + c$ که در آن $a \neq 0$. با توجه به علامت Δ سه حالت داریم:

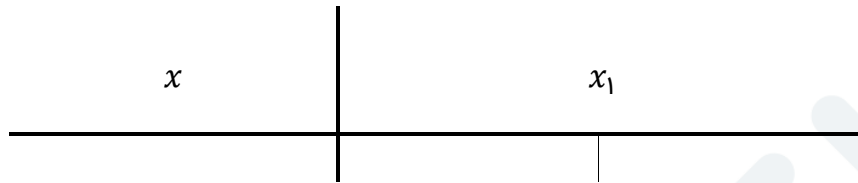
حالت اول: $\Delta > 0$. فرض کنیم x_1 و x_2 ریشه‌های چندجمله‌ای $f(x)$ باشند. در این صورت جدول تعیین علامت $f(x)$ به صورت زیر است:

x	x_1	x_2
$f(x) = ax^2 + bx + c$	موافق علامت a	مخالف علامت a
		موافق علامت a

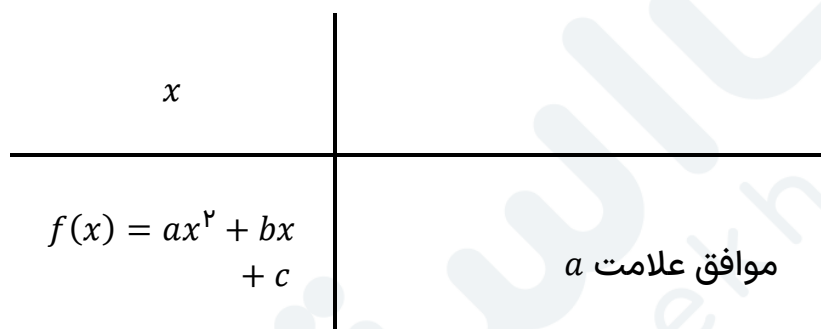
حالت دوم: $\Delta = 0$. در این حالت $x_1 = \frac{-b}{2a}$ ریشه مضاعف معادله است و جدول تعیین علامت $f(x)$ به صورت زیر است:

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی‌برداری؛ به اشتراک‌گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی‌برداری؛ به اشتراک‌گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.



حالت سوم: $\Delta < 0$. در این حالت جدول تعیین علامت $f(x)$ به صورت زیر است:



با توجه به مطالب فوق می‌توان گفت شرط آن که عبارت درجه دوم $f(x) = ax^2 + bx + c$

۱. بزرگ‌تر یا مساوی صفر باشد آن است که $\Delta \leq 0$ و $a > 0$.

۲. کوچک‌تر یا مساوی صفر باشد آن است که $\Delta \leq 0$ و $a < 0$.

۳. همواره مثبت باشد آن است که $\Delta < 0$ و $a > 0$.

۴. همواره منفی باشد آن است که $\Delta < 0$ و $a < 0$.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی‌برداری؛ به اشتراک‌گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و داندود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

مثال: محدوده m را طوری تعیین کنید که به ازای هر $x \in R$ داشته باشیم $mx^2 - mx - 4 \leq 0$.

پاسخ: در این نامعادله درجه دوم $\Delta = m^2 - 4m(-4) = m^2 + 16m$ طبق بحث فوق هر دو شرط $\Delta \leq 0$ و $a < 0$ باید برقرار شود. $\Delta \leq 0$ معادل $m^2 + 16m \leq 0$ است و $a < 0$ معادل $m < 0$. حال نامعادله $m^2 + 16m \leq 0$ را حل می‌کنیم. جدول تعیین علامت عبارت $m^2 + 16m$ به صورت زیر است:

m	-16	0	
$m^2 + 16m$	$+$	$-$	$+$

بنابراین $m^2 + 16m \leq 0$ نتیجه می‌دهد $-16 \leq m \leq 0$. از طرفی شرط $m < 0$ را نیز باید در نظر بگیریم. سرانجام، اشتراک این دو به صورت $-16 \leq m < 0$ است.

تست: به ازای کدام مجموعه مقادیر a هر نقطه از نمودار تابع $f(x) = (a-1)x^2 + 2\sqrt{2}x + a$ در بالای محور x ها است؟

$$1 < a < 2 \quad (۴) \qquad a > 2 \quad (۳) \qquad a > 1 \quad (۲) \qquad a < -1 \quad (۱)$$

پاسخ: گزینه‌ی ۳. در عبارت درجه دوم $f(x)$ باید $\Delta < 0$ و $a - 1 > 0$. نامعادله $\Delta < 0$ به نامعادله $8 - 4(a-1)a < 0$ تبدیل می‌شود.

$$8 - 4(a-1)a < 0 \Leftrightarrow 8 - 4a^2 + 4a < 0 \Leftrightarrow 4a^2 - 4a - 8 > 0 \Leftrightarrow a^2 - a - 2 > 0$$

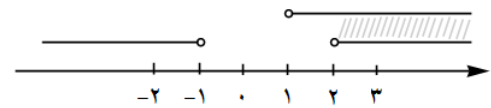
این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و داندود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

جدول تعیین علامت به صورت زیر است:

a	-1	2
$a^2 - a - 2 > 0$	$+$	$-$

لذا $a > 2$ یا $a < -1$. بنابراین مجموعه جواب $\Delta < 0$ به صورت $a > 2$ یا $a < -1$ است. از طرفی شرط $a - 1 > 0$ نتیجه می دهد $a > 1$. اشتراک این محدوده ها را روی محور اعداد حقیقی مشخص می کنیم.



با توجه به نمودار شرط مورد نظر به صورت $a > 2$ است.

رابطه بین ریشه های معادله درجه دوم

فرض کنیم α و β ریشه های معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ باشند. یعنی $\alpha = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ و $\beta = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$. فرض کنیم S و P به ترتیب مجموع و حاصلضرب ریشه ها باشد. داریم:

$$S = \alpha + \beta = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = \frac{-b}{a}$$

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و داندود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

$$P = \alpha \times \beta = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \times \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{b^2 - \Delta}{4a^2}$$

$$= \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$$

بنابراین مجموع و حاصل ضرب ریشه‌های معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ به صورت زیر محاسبه می‌شوند:

$$P = \alpha\beta = \frac{c}{a} \text{ و } S = \alpha + \beta = \frac{-b}{a}$$

فرض کنیم α و β ریشه‌های معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ باشند و $S = \alpha + \beta$ و $P = \alpha\beta$ در این صورت:

$$\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = S^2 - 2P \quad ۱.$$

$$\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta) = S^3 - 3PS \quad ۲.$$

$$|\alpha - \beta| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} \quad ۴.$$

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{\beta + \alpha}{\alpha\beta} = \frac{S}{P} \quad ۳.$$

تست: به ازای کدام مقدار m در معادله $(m+1)x^2 - 3x + m = 0$ یکی از ریشه‌ها دو برابر دیگری است؟

- (۱) ۲ و ۳ (۲) ۲ و ۳ (۳) ۱ و ۲ (۴) ۲ و ۱

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و داندود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و داندود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

پاسخ: گزینه ۴. فرض کنیم α و β ریشه‌ها باشند. پس $\alpha + \beta = \frac{3}{m+1}$ و $\alpha\beta = \frac{m}{m+1}$. چون یکی از ریشه‌ها دو برابر دیگری است می‌توان نوشت $\alpha = 2\beta$. لذا

$$3\beta = \frac{3}{m+1} \Rightarrow \beta = \frac{1}{m+1} \text{ و } \alpha = \frac{2}{m+1}$$

و با توجه به $\alpha\beta = \frac{m}{m+1}$ داریم:

$$\frac{2}{m+1} \times \frac{1}{m+1} = \frac{m}{m+1} \Rightarrow \frac{2}{m+1} = \frac{m}{1} \Rightarrow m^2 + m - 2 = 0$$

از حل معادله $m^2 + m - 2 = 0$ نتیجه می‌شود: $m = 1$ یا $m = -2$

نکته: اگر در معادله‌ی درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$

۱. $a + b + c = 0$ آن‌گاه یکی از ریشه‌ها $x = 1$ است و ریشه دیگر $x = \frac{c}{a}$.

۲. $a - b + c = 0$ آن‌گاه یکی از ریشه‌ها $x = -1$ است و ریشه دیگر $x = -\frac{c}{a}$.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و داندود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی‌برداری؛ به اشتراک‌گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

پرسش‌های چهارگزینه‌ای فصل چهارم، معادله و نامعادله درجه دوم

۱. مجموع عدد طبیعی n و ده برابر n ، مساوی مربع عدد n است، مجموع ارقام n کدام است؟ (وزارت نیرو - ۹۷)

۱۱ (۱)

۸ (۲)

۵ (۳)

۲ (۴)

۲. کدام مورد می‌تواند سه ریشه معادله درجه سوم $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ با شرط $a > 0$ و $c < 0$ باشد؟ (دستگاه‌های اجرایی - فراگیر اول - ۹۴)

۱، ۲، -۳ (۱)

۱، ۲، -۳ (۲)

-۱، -۲، -۳ (۳)

۱، ۲، ۳ (۴)

۳. برای چند مقدار m ریشه‌های حقیقی معادله $(m^2 - 4)x - 4 = (2m - 3)x^2$ قرینه اند؟ (آموزش و پرورش - ۹۵)

هیچ مقدار m (۱)

۱ (۲)

۲ (۳)

۳ (۴)

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی‌برداری؛ به اشتراک‌گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

۴. محیط یک مستطیل ۸۰ واحد است. اگر از طول آن ۶ واحد کم کنیم یک مربع حاصل می شود. اندازه ضلع بزرگ مستطیل کدام است؟ (فراگیر چهارم و آموزش و پرورش - ۹۶)

(۱) ۱۱

(۲) ۱۷

(۳) ۲۳

(۴) ۲۹

۵. تعداد جواب های نامعادله $|x - x^3| \leq x$ در مجموعه اعداد طبیعی، کدام است؟ (دستگاه های اجرایی - فراگیر دوم - ۹۴)

(۱) ۳

(۲) ۲

(۳) ۱

(۴) ۴

۶. مربع مجموع دو عدد مثبت، از مجموع مربعات آن دو عدد، ۱۰۸ واحد بیشتر است. اگر اختلاف دو عدد ۳ باشد آن گاه مجموع ارقام حاصل ضرب این دو عدد کدام است؟ (دستگاه های اجرایی - فراگیر سوم - ۹۵)

(۱) ۱۵

(۲) ۷

(۳) ۹

(۴) ۱۲

۷. تعداد ریشه های معادله $1 - \frac{1}{1+\frac{x}{x-1}} - \frac{2x}{2x+1} = \frac{4x-1}{4x^2-1}$ کدام است؟ (آموزش و پرورش - ۹۵)

(۱) ۱

(۲) ۲

(۳) ۳

(۴) ندارد.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی‌برداری؛ به اشتراک‌گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

۸. مجموع ریشه‌های صحیح معادله $\frac{1}{x^2-2x-2} - \frac{1}{x^2-2x-5} = \frac{3}{2}$ ، کدام است؟ (دستگاه‌های اجرایی - فراگیر سوم - ۹۵)

- ۱ (۱)
- ۴ (۲)
- ۳ (۳)
- ۲ (۴)

۹. مجموعه جواب نامعادله $(x^2 - 2\sqrt{5}x + 5)(3x - 2) \leq 0$ ، شامل چند عدد طبیعی است؟ (آموزش و پرورش - ۹۴)

- ۱ (۱)
- ۲ (۲)
- ۳ (۳)
- ۴ عضو طبیعی ندارد.

۱۰. اگر α و β ریشه‌های معادله $x^2 - 7x + 2 = 0$ باشند، آن‌گاه حاصل $(\beta^2 - 5\alpha + 3)(\alpha^2 - 5\beta + 3)$ کدام است؟ (فراگیر چهارم و آموزش و پرورش - ۹۶)

- ۲۲ (۱)
- ۲۳ (۲)
- ۳۲ (۳)
- ۳۳ (۴)

۱۱. به ازای کدام مقدار m سهمی به معادله $y = 3x^2 + mx + 1$ همواره بالای سهمی به معادله $y = 2x^2 + x - 2$ قرار دارد؟ (دستگاه‌های اجرایی - فراگیر سوم - ۹۵)

- ۱) $1 - 2\sqrt{3} < m < 1 + 2\sqrt{3}$
- ۲) $-2 < m < 2$
- ۳) $-3 < m < 3$
- ۴) $1 - 3\sqrt{2} < m < 1 + 3\sqrt{2}$

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی‌برداری؛ به اشتراک‌گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

۱۲. منحنی $f(x) = x^2 - 3x - 4$ ، محور x ها را در دو نقطه قطع می کند. فاصله این دو نقطه از یکدیگر کدام است؟ (دیوان محاسبات - ۹۴)

(۱) ۶

(۲) ۵

(۳) ۳

(۴) ۲

۱۳. مجموعه جواب معادله $\frac{2+3x}{2} < \frac{5x+1}{3}$ ، کدام مجموعه زیر است؟ (دیوان محاسبات - ۹۴)

(۱) $(-\infty, -4)$ (۲) $(-\infty, 4)$ (۳) $(-4, +\infty)$ (۴) $(4, +\infty)$

۱۴. به ازای کدام مقدار m ، یکی از ریشه های معادله $3x^2 - 6x + m = 0$ دو برابر ریشه، دیگری است؟ (آموزش و پرورش - ۹۴)

(۱) $\frac{27}{2}$ (۲) $\frac{8}{3}$

(۳) ۶

(۴) ۹

۱۵. اگر $x = 2$ بین دو ریشه معادله $3x^2 + mx - 3 - m = 0$ واقع باشد، آن گاه کدام مقدار در مجموعه مقادیر m قرار ندارد؟ (دستگاه های اجرایی - فراگیر اول - ۹۴)

(۱) -۱۰.۵

(۲) -۹.۵

(۳) -۱۰

(۴) -۸

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و داندود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

۱۶. اگر عرض رأس سهمی $y = x^2 - 2x - 2a$ برابر ۱۶- باشد، آن گاه سهمی، محور x ها را در کدام نقاط قطع می کند؟ (تأمین اجتماعی - ۹۴)

- (۱) ۲، ۳-
- (۲) ۳، ۲-
- (۳) ۵، ۳-
- (۴) ۳، ۵-

۱۷. کمترین مقدار عبارت $x^2 - \sqrt{3}x - 1 = 0$ کدام است؟ (آموزش و پرورش - ۹۴)

- (۱) $\frac{3}{4}$
- (۲) $\frac{1}{4}$
- (۳) $-\frac{3}{4}$
- (۴) $-\frac{7}{4}$

۱۸. معادله $\frac{t+1}{t-1} = \frac{2}{t-1} + \frac{1}{8}$ دارای چند جواب است؟ (فراگیر پنجم و آموزش و پرورش - ۹۷)

- (۱) جواب ندارد.
- (۲) ۱
- (۳) ۲
- (۴) بی شمار جواب دارد.

۱۹. معادله $\frac{1}{1+\sqrt{1-x}} + \frac{1}{1-\sqrt{1-x}} = \frac{\sqrt{3}}{x}$ چند جواب دارد؟ (فراگیر پنجم و آموزش و پرورش - ۹۷)

- (۱) ۲
- (۲) جواب ندارد.
- (۳) بی شمار جواب دارد.
- (۴) ۱

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و داندود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی‌برداری؛ به اشتراک‌گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

۲۰. ریشه‌های معادله $4x^2 - 2mx - 1 = 0$ ، سینوس و کسینوس زاویه θ هستند، مقدار مثبت m کدام است؟ (فراگیر پنجم و آموزش و پرورش - ۹۷)

(۱) $\sqrt{3}$

(۲) $\sqrt{2}$

(۳) $3\sqrt{2}$

(۴) $\sqrt{6}$

۲۱. به ازای چند مقدار صحیح m ، معادله $x^2 + 8x + 3m^2 = 0$ دارای دو ریشه حقیقی و متمایز است؟ (وزارت نیرو - ۹۷)

(۱) ۷

(۲) ۶

(۳) ۵

(۴) ۴

۲۲. مجموع دو عدد طبیعی فرد متوالی، ۱۱۹ واحد از حاصل ضرب آن‌ها کمتر است. مجموع ارقام این دو عدد، کدام است؟ (فراگیر هفتم، آموزش و پرورش و علوم پزشکی - ۹۸)

(۱) ۲

(۲) ۶

(۳) ۸

(۴) ۱۰

۲۳. در معادله $(2-a)x^2 + 2(1-a)x + a = 0$ ، یکی از ریشه‌ها ۲- است a کدام است؟ (فراگیر هفتم، آموزش و پرورش و علوم پزشکی - ۹۸)

(۱) -۱

(۲) -۲

(۳) -۳

(۴) -۴

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی‌برداری؛ به اشتراک‌گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

۲۴. اگر $\frac{3a+10}{10+2a} = \frac{3b+7}{7+2b}$ آن گاه عدد $\frac{b}{a}$ کدام است؟ (فراگیر هفتم، آموزش و پرورش و علوم پزشکی - ۹۸)

- (۱) ۴/۰
- (۲) ۷/۰
- (۳) ۶/۰
- (۴) ۵/۰

۲۵. در خصوص ریشه های معادله $\frac{\sqrt{2x^2-5x+2}}{x-2} = -1$ ، کدام مورد صحیح است؟ (فراگیر هشتم و آموزش و پرورش - ۹۹)

- (۱) ریشه حقیقی ندارد.
- (۲) دو ریشه مختلف العلامه دارد.
- (۳) فقط یک ریشه مثبت دارد.
- (۴) فقط یک ریشه منفی دارد.

۲۶. اگر دو برابر حاصل ضرب دو عدد زوج متوالی را از مجموع مربعات همان دو عدد کم کنیم، آن گاه حاصل کدام است؟ (فراگیر هشتم و آموزش و پرورش - ۹۹)

- (۱) عدد بزرگتر
- (۲) ۴
- (۳) ۲
- (۴) عدد کوچکتر

۲۷. چند عدد صحیح، در نامعادله $\sqrt{3x-3} + \sqrt{x} < 5$ صدق می کند؟ (فراگیر هشتم و آموزش و پرورش - ۹۹)

- (۱) ۲۴
- (۲) ۴
- (۳) ۳
- (۴) ۲۵

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی‌برداری؛ به اشتراک‌گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

۲۸. معادله درجه دوم $(m-1)x^2 + 4x + m = 3$ به ازای چند مقدار صحیح m ، دو ریشه حقیقی دارد؟ (دانشگاه‌های علوم پزشکی و وزارت بهداشت - ۹۹)

(۱) ۴

(۲) ۵

(۳) ۶

(۴) هیچ مقداری

۲۹. مجموعه جواب نامعادله $\frac{x^2-3x-4}{x^2-5x-6} > 2$ کدام است؟ (دانشگاه‌های علوم پزشکی و وزارت بهداشت - ۹۹)

(۱) (۲, ۸)

(۲) (۳, ۴)

(۳) (۶, ۸)

(۴) (-۶, ۴)

۳۰. به ازای چند مقدار صحیح m ، نمودار تابع $y = \frac{1}{p}x^2 + (m-2)x + 1$ همواره بالای محور x ها است؟ (دانشگاه‌های علوم پزشکی و وزارت بهداشت - ۹۹)

(۱) ۳

(۲) ۲

(۳) ۵

(۴) ۴

۳۱. عبارت $\frac{(x^2-4x+4)(x^3-1)}{(x+1)^3}$ در بازه $(-1, a)$ همواره منفی است. مقدار a کدام است؟ (دانشگاه‌های علوم پزشکی و وزارت بهداشت - ۹۹)

(۱) ۲

(۲) ۲.۵

(۳) ۱

(۴) ۱.۵

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی‌برداری؛ به اشتراک‌گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی‌برداری؛ به اشتراک‌گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و داندود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

۳۲. مختصات رأس سهمی $y = 3x^2 - 2x$ کدام است؟ (دانشگاه‌های علوم پزشکی - ۹۹)

- (۱) $(0, \frac{1}{3})$
- (۲) $(\frac{1}{3}, 0)$
- (۳) $(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$
- (۴) $(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3})$

۳۳. تعداد جواب‌های معادله $\frac{x-2}{x+2} + \frac{x}{x-2} = \frac{8}{x^2-4}$ کدام است؟ (دانشگاه‌های علوم پزشکی - ۹۹)

- (۱) صفر
- (۲) ۱
- (۳) ۲
- (۴) ۳

۳۴. معادله $x^2 - 2mx - 1 = 0$ به ازای مقادیر مختلف m : (دانشگاه‌های علوم پزشکی - ۹۹)

- (۱) دو ریشه مثبت دارد.
- (۲) دو ریشه منفی دارد.
- (۳) یک ریشه مثبت و یک ریشه منفی دارد.
- (۴) ریشه ندارد.

۳۵. تابع درآمد حاصل از فروش x کالا به صورت $y = \frac{-1}{4}x^2 + 50x$ و تابع هزینه آن به صورت $y = 30 + kx$ است. اگر به ازای ۲۰ واحد از این کالا مقدار سود ماکسیمم باشد، آن گاه k کدام است؟ (دانشگاه‌های علوم پزشکی - ۹۹)

- (۱) ۱۰
- (۲) ۲۰
- (۳) ۳۰
- (۴) ۴۰

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی‌برداری؛ به اشتراک‌گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و داندود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی‌برداری؛ به اشتراک‌گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

۳۶. در معادله درجه دوم $6x^2 + (k+1)x + k = 0$ اگر مجموع ریشه‌ها برابر $\frac{1}{6}$ باشد، ریشه بزرگ‌تر معادله کدام است؟ (دانشگاه‌های علوم پزشکی - ۹۹)

- (۱) $\frac{1}{6}$
(۲) $\frac{2}{3}$
(۳) ۱
(۴) $\frac{4}{3}$

۳۷. در تابع $f(x) = -3x^2 + mx - 1$ ، اگر $f(2) = -5$ ، آن‌گاه $f(-1)$ کدام است؟ (دانشگاه‌های علوم پزشکی - ۹۹)

- (۱) ۴
(۲) -۲
(۳) ۲
(۴) -۸

۳۸. در نامعادله $\frac{x^2+1}{x^2-1} < 0$ ، چند عدد صحیح صدق می‌کند؟ (فراگیر نهم - ۱۴۰۰)

- (۱) ۱
(۲) ۲
(۳) ۳
(۴) ۴

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی‌برداری؛ به اشتراک‌گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی‌برداری؛ به اشتراک‌گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

پاسخ پرسش‌های چهارگزینه‌ای فصل چهارم، معادله و نامعادله درجه دوم

۱. گزینه ۴. با توجه به اطلاعات داده شده، n ، ریشه معادله درجه دوم $n^2 + 10n = n^2$ است.

$$n + 10n = n^2 \Rightarrow n^2 - 11n = 0 \Rightarrow n(n - 11) = 0 \Rightarrow n = 0 \text{ یا } n = 11$$

n عددی طبیعی است بنابراین $n = 0$ قابل قبول نیست و $n = 11$ و مجموع ارقام عدد ۱۱ برابر ۲ است.

۲. گزینه ۲. فرض کنیم $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ ، در هر گزینه، $f(x)$ را می‌یابیم.

۱. سه ریشه معادله اعداد ۱، -۲، -۳ باشند، در این صورت:

$$f(x) = (x - 1)(x + 2)(x + 3) = x^3 + 5x - 6 = 0 \Rightarrow a > 0 \text{ و } c > 0$$

۲. سه ریشه معادله اعداد ۱، ۲، -۳ باشند، در این صورت:

$$f(x) = (x - 1)(x - 2)(x + 3) = x^3 - 7x + 6 = 0 \Rightarrow a > 0 \text{ و } c < 0$$

۳. سه ریشه معادله اعداد -۱، -۲، -۳ باشند، در این صورت:

$$f(x) = (x + 1)(x + 2)(x + 3) = x^3 + 6x^2 + 11x + 6 = 0 \Rightarrow a > 0 \text{ و } c > 0$$

۴. سه ریشه معادله اعداد ۱، ۲، ۳ باشند، در این صورت:

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی‌برداری؛ به اشتراک‌گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و داندود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

$$f(x) = (x-1)(x-2)(x-3) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0 \Rightarrow a > 0 \text{ و } c > 0$$

با بررسی هر چهار گزینه می بینیم فقط در گزینه دوم شرط $c < 0$ و $a > 0$ برقرار است.

۳. گزینه ۲. اگر ریشه های معادله درجه دومی، قرینه هم باشند آن گاه مجموع آن دو برابر صفر است، بنابراین $S = \alpha + \beta = \frac{-b}{a} = 0$ ، که نتیجه می دهد $b = 0$ و در این جا $m^2 - 4 = 0$ که نتیجه می دهد $m = \pm 2$. دقت کنید!، به ازای $m = 2$ ، معادله به صورت $x^2 - 4 = 0$ بدل می شود که دارای دو ریشه قرینه هم $x = \pm 2$ است، اما به ازای $m = -2$ ، معادله به صورت $-7x^2 - 4 = 0$ بدل می شود که ریشه حقیقی ندارد! بنابراین فقط به ازای یک مقدار m ریشه های حقیقی معادله داده شده، قرینه اند.

۴. گزینه ۳. اندازه طول و عرض مستطیل به ترتیب $x + 6$ و x است. بنابراین:

$$2((x+6)+x) = 80 \Rightarrow (x+6)+x = 40 \Rightarrow 2x+6 = 40 \Rightarrow x = 17 \Rightarrow x+6 = 23$$

۵. گزینه ۳. چون به دنبال جواب های طبیعی این نامعادله هستیم می توان فرض کرد $x \geq 1$ ، بنابراین:

$$|x - x^3| \leq x \Rightarrow |x(1 - x^2)| \leq x$$

$$\Rightarrow |x| \cdot |1 - x^2| \leq x$$

$$\Rightarrow x \cdot |1 - x^2| \leq x$$

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و داندود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی‌برداری؛ به اشتراک‌گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

$$\Rightarrow |1 - x^2| \leq 1$$

$$\Rightarrow 1 - x^2 = 1 \text{ یا } 1 - x^2 = -1$$

$$\Rightarrow x = 0 \text{ یا } x = -1 \text{ یا } x = 1$$

فقط جواب $x = 1$ قابل قبول است.

۶. گزینه ۳. با توجه به این که اختلاف دو عدد مورد نظر ۳ واحد است، می‌توان این اعداد را x و $x + 3$ در نظر گرفت. به کمک اطلاعات مسأله معادله زیر به دست می‌آید که پس از ساده سازی معادله، آن را به روش تجزیه حل کرده‌ایم.

$$(2x + 3)^2 - 108 = (x + 3)^2 + x^2 \Rightarrow 4x^2 + 12x + 9 - 108 = x^2 + 6x + 9 + x^2$$

$$\Rightarrow 2x^2 + 6x - 108 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - 3x - 54 = 0$$

$$\Rightarrow (x - 9)(x + 6) = 0$$

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی‌برداری؛ به اشتراک‌گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و داندود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

$$\Rightarrow x = 9 \text{ یا } x = -6$$

اعداد مورد نظر ۹ و ۱۲ اند و حاصل ضرب این دو برابر ۱۰۸ است و مجموع ارقام عدد ۱۰۸ برابر ۹.

۷. گزینه ۱.

$$1 - \frac{1}{1 + \frac{x}{x-1}} - \frac{2x}{2x+1} = \frac{4x-1}{4x^2-1} \Rightarrow 1 - \frac{1}{\frac{2x-1}{x-1}} - \frac{2x}{2x+1} = \frac{4x-1}{(2x-1)(2x+1)}$$

$$\Rightarrow 1 - \frac{x-1}{2x-1} - \frac{2x}{2x+1} = \frac{4x-1}{(2x-1)(2x+1)}$$

طرفین آخرین معادله را در عبارت $(2x-1)(2x+1)$ ضرب می‌کنیم:

$$(2x-1)(2x+1) - (x-1)(2x+1) - (2x-1)2x = 4x-1$$

معادله به دست آمده را ساده و سپس حل می‌کنیم.

$$4x^2 - 1 - 2x^2 - x + 2x + 1 - 4x^2 + 2x \Rightarrow -2x^2 - x + 1 = 0$$

$$= 4x - 1$$

$$\Rightarrow 2x^2 + x - 1 = 0$$

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و داندود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دائلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

با توجه به نکته‌ای که اگر در معادله‌ی درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ داشته باشیم: $a - b + c = 0$ ، آن‌گاه یکی از ریشه‌ها $x = -1$ است و ریشه دیگر $x = -\frac{c}{a}$ ، نتیجه می‌شود ریشه‌های معادله $2x^2 + x - 1 = 0$ عبارت‌اند از: $x = -1$ و $x = \frac{1}{2}$. دقت کنید! $x = \frac{1}{2}$ قابل قبول نیست زیرا ریشه مخرج یکی از کسرها است. تنها جواب این معادله $x = -1$ است.

۸. گزینه ۴. با جانشانی $t = x^2 - 2x - 2$ ، معادله داده شده به صورت زیر ساده می‌شود و مقادیر t به دست می‌آیند:

$$\frac{1}{x^2 - 2x - 2} - \frac{1}{x^2 - 2x - 5} = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{1}{t} - \frac{1}{t-3} = \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{-3}{t(t-3)} = \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow t(t-3) = -2$$

$$\Rightarrow t^2 - 3t + 2 = 0$$

$$\Rightarrow t = 1 \text{ یا } t = 2$$

$$\text{اگر } t = 1 \text{ آن‌گاه: } x^2 - 2x - 2 = 1 \Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow x = -1 \text{ یا } x = 3$$

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دائلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

$$\text{اگر } t = 2 \text{ آن گاه: } x^2 - 2x - 2 = 2 \Rightarrow x^2 - 2x - 4 = 0 \Rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{20}}{2} = 1 \pm \sqrt{5}$$

ریشه های صحیح معادله داده شده $x = 3$ و $x = -1$ اند و مجموعشان برابر ۲ است.

$$\begin{aligned} 9. \text{ گزینه ۴: } (x^2 - 2\sqrt{5}x + 5)(3x - 2) \leq 0 &\Rightarrow (x - \sqrt{5})^2(3x - 2) \leq 0 \Rightarrow 3x - 2 \leq 0 \Rightarrow x \leq \frac{2}{3} \end{aligned}$$

نامعادله فوق در مجموعه اعداد طبیعی جواب ندارد.

۱۰. گزینه ۲. از $x^2 - 7x + 2 = 0$ نتیجه می شود $x^2 - 5x - 2x + 2 = 0$ که نتیجه می دهد $x^2 - 5x = 2x - 2$ ، بنابراین:

$$\begin{aligned} (\alpha^2 - 5\alpha + 3)(\beta^2 - 5\beta + 3) &= (2\alpha - 2 + 3)(2\beta - 2 + 3) \\ &= (2\alpha + 1)(2\beta + 1) \\ &= 4\alpha\beta + 2(\alpha + \beta) + 1 \\ &= 4 \times 2 + 2 \times 7 + 1 \\ &= 23 \end{aligned}$$

$$11. \text{ گزینه ۱. } 3x^2 + mx + 1 > 2x^2 + x - 2 \Rightarrow x^2 + (m-1)x + 3 > 0$$

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

شرط آن که عبارت درجه دوم $f(x) = ax^2 + bx + c$ ، همواره بزرگتر از صفر باشد آن است که $a > 0$ و $\Delta < 0$.

$$x^2 + (m-1)x + 3 > 0 \Rightarrow \Delta = (m-1)^2 - 4 \times 3 < 0 \Rightarrow m^2 - 2m - 11 < 0$$

ریشه های معادله $m^2 - 2m - 11 = 0$ به صورت $1 \pm 2\sqrt{3}$ اند بنابراین مجموعه جواب نامعادله $m^2 - 2m - 11 < 0$ به صورت $1 - 2\sqrt{3} < m < 1 + 2\sqrt{3}$ است.

۱۲. گزینه ۲. فرض کنیم α و β ریشه های معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ باشند در این صورت:

$$|\alpha - \beta| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$$

$$|\alpha - \beta| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} = \frac{\sqrt{(-3)^2 - 4(-4)}}{11} = 5 \quad \text{در این سوال، فاصله دو ریشه از هم برابر است با:}$$

$$\frac{2+3x}{2} < \frac{5x+1}{3} \Rightarrow 6 \times \frac{2+3x}{2} < 6 \times \frac{5x+1}{3} \Rightarrow 3(2+3x) < 2(5x+1) \Rightarrow 13 \text{ گزینه ۴.}$$

$$4 < x$$

۱۴. گزینه ۲. فرض کنیم α و β ریشه ها باشند. پس $\alpha + \beta = \frac{-(-6)}{3} = 2$ و $\alpha\beta = \frac{m}{3}$. چون یکی از ریشه ها دو برابر دیگری است می توان نوشت $\alpha = 2\beta$. لذا $\alpha + \beta = 2\beta + \beta = 3\beta = 2 \Rightarrow \beta = \frac{2}{3}$ و $\alpha = \frac{4}{3}$

$$\frac{4}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{m}{3} \Rightarrow m = \frac{3 \times 4 \times 2}{3 \times 3} \Rightarrow m = \frac{8}{3} \quad \text{و با توجه به } \alpha\beta = \frac{m}{3} \text{ داریم:}$$

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

۱۵. گزینه ۴. فرض کنیم $f(x) = 3x^2 + mx - 3 - m$ ، نمودار f یک سهمی است که دهانه آن به سمت بالا است و چون $x = 2$ بین ریشه‌های آن قرار دارد، لازم است $f(2) < 0$.

$$f(2) < 0 \Rightarrow 3(2)^2 + m(2) - 3 - m < 0 \Rightarrow m + 9 < 0 \Rightarrow m < -9$$

۱۶. گزینه ۳. مختصات رأس سهمی به معادله $f(x) = ax^2 + bx + c$ به صورت $(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a})$ است. بنابراین:

$$\frac{-\Delta}{4a} = -16 \Rightarrow \frac{-4 - 8a}{4} = -16 \Rightarrow -1 - 2a = -16 \Rightarrow a = \frac{15}{2}$$

معادله سهمی به صورت $y = x^2 - 2x - 15$ بازنویسی می‌شود. نقاط برخورد نمودار این تابع با محور محور x ها، ریشه‌های معادله $x^2 - 2x - 15 = 0$ اند. $x^2 - 2x - 15 = 0 \Rightarrow (x + 3)(x - 5) = 0 \Rightarrow x = -3$ یا $x = 5$

۱۷. گزینه ۴. کمترین مقدار عبارت $x^2 - \sqrt{3}x - 1 = 0$ ، برابر با عرض رأس سهمی یعنی $-\frac{\Delta}{4a}$ است.

$$\frac{-\Delta}{4a} = \frac{-(3-4(-1))}{4} = \frac{-7}{4}$$

۱۸. گزینه ۱. طرفین معادله داده شده را در $\lambda(t-1)$ ضرب می‌کنیم:

$$\lambda(t-1) \times \frac{t+1}{t-1} = \lambda(t-1) \times \left(\frac{2}{t-1} + \frac{1}{\lambda} \right) \Rightarrow \lambda t + \lambda = 16 + t - 1 \Rightarrow 7t = 7 \Rightarrow t = 1$$

جواب به دست آمده $t = 1$ ، قابل قبول نیست زیرا ریشه مخرج کسرهای داده شده است بنابراین معادله جواب ندارد.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی‌برداری؛ به اشتراک‌گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و داندود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

$$19. \text{ گزینه ۲. } \frac{1}{1+\sqrt{1-x}} + \frac{1}{1-\sqrt{1-x}} = \frac{\sqrt{3}}{x} \Rightarrow \frac{1-\sqrt{1-x}+1+\sqrt{1-x}}{1-(1-x)} = \frac{\sqrt{3}}{x} \Rightarrow \frac{2}{x} = \frac{\sqrt{3}}{x} \Rightarrow 2 = \sqrt{3}$$

$2 = \sqrt{3}$ تناقضی است که نشان می‌دهد این معادله جواب ندارد.

۲۰. گزینه ۴. فرض کنیم α و β ریشه‌های معادله درجه دوم $4x^2 - 2mx - 1 = 0$ باشند و $S = \alpha + \beta = \frac{m}{2}$ و $P = \alpha\beta = -\frac{1}{4}$ در این صورت:

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \Rightarrow \alpha^2 + \beta^2 = 1 \Rightarrow S^2 - 2P = 1$$

$$\Rightarrow \left(\frac{m}{2}\right)^2 - 2 \times \frac{-1}{4} = 1 \Rightarrow \frac{m^2}{4} = \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow m^2 = 6 \Rightarrow m = \sqrt{6}$$

۲۱. گزینه ۳. در معادله درجه دوم، اگر $\Delta > 0$ ، آن‌گاه معادله دارای دو ریشه حقیقی و متمایز است.

$$\Delta > 0 \Rightarrow 8^2 - 4 \times 3m^2 > 0 \Rightarrow 64 - 12m^2 > 0 \Rightarrow m^2 < \frac{16}{3} \Rightarrow \frac{-4}{\sqrt{3}} < m < \frac{4}{\sqrt{3}}$$

اعداد صحیح این بازه عبارت‌اند از: $2, 1, 0, -1, -2$

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی‌برداری؛ به اشتراک‌گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و داندود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

۲۲. گزینه ۲. این دو عدد طبیعی فرد متوالی را $2n - 1$ و $2n + 1$ در نظر می گیریم. معادله زیر از اطلاعات مسأله به دست می آید:

$$(2n - 1) + (2n + 1) + 119 \Rightarrow 4n + 119 = 4n^2 - 1$$

$$= (2n - 1) \times (2n + 1)$$

$$\Rightarrow 4n^2 - 4n - 120 = 0$$

$$\Rightarrow n^2 - n - 30 = 0$$

$$\Rightarrow n^2 - n - 30 = 0$$

$$\Rightarrow (n - 6)(n + 5) = 0$$

مقدار قابل قبول $n = 6$ است. بنابراین آن دو عدد طبیعی فرد متوالی ۱۱ و ۱۳ اند و مجموع ارقام این دو عدد ۶ است.

۲۳. گزینه ۴. $x = -2$ در معادله صدق می کند بنابراین:

$$(2 - a)x^2 + 2(1 - a)x + a \Rightarrow (2 - a)(-2)^2 + 2(1 - a)(-2) + a$$

$$\Rightarrow 8 - 4a - 4 + 4a + a = 0$$

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

$$\Rightarrow a = -۴$$

۲۴. گزینه ۲.

$$\frac{۳a + ۱۰}{۱۰ + ۲a} = \frac{۳b + ۷}{۷ + ۲b} \Rightarrow \frac{a + ۲a + ۱۰}{۱۰ + ۲a} = \frac{b + ۲b + ۷}{۷ + ۲b}$$

$$\Rightarrow \frac{a}{۱۰ + ۲a} + ۱ = \frac{b}{۷ + ۲b} + ۱$$

$$\Rightarrow \frac{a}{۱۰ + ۲a} = \frac{b}{۷ + ۲b}$$

$$\Rightarrow \frac{۱۰ + ۲a}{a} = \frac{۷ + ۲b}{b}$$

$$\Rightarrow \frac{۱۰}{a} + ۲ = \frac{۷}{b} + ۲$$

$$\Rightarrow \frac{۱۰}{a} = \frac{۷}{b}$$

$$\Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{۷}{۱۰}$$

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

۲۵. گزینه ۴.

$$\frac{\sqrt{2x^2 - 5x + 2}}{x - 2} = -1 \Rightarrow \frac{2x^2 - 5x + 2}{(x - 2)^2} = 1$$

$$\Rightarrow 2x^2 - 5x + 2 = (x - 2)^2$$

$$\Rightarrow 2x^2 - 5x + 2 = x^2 - 4x + 4$$

$$\Rightarrow x^2 - x - 2 = 0$$

$$\Rightarrow x = -1 \text{ یا } x = 2$$

جواب $x = 2$ قابل قبول نیست زیرا ریشه مخرج کسر در معادله است و $x = -1$ ، در معادله صادق است بنابراین معادله داده شده، فقط یک ریشه منفی دارد.

۲۶. گزینه ۲. دو عدد زوج متوالی مورد نظر را $2n$ و $2n + 2$ در نظر می گیریم. بنابر اطلاعات مسأله داریم:

$$(2n + 2)^2 + (2n)^2 - 2 \times 2n \times (2n + 2) = [(2n + 2) - (2n)]^2 = 2^2 = 4$$

در محاسبات فوق از اتحاد مربع دو جمله ای $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$ استفاده کرده ایم.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

۲۷. گزینه ۳. برای تعریف $\sqrt{3x-3}$ لازم است، $3x-3 \geq 0$ ، پس $x \geq 1$ ، همچنین به ازای $x \geq 1$ ، عبارت $\sqrt{x}$ نیز معنی دار است، بنابراین دامنه متغیر x در نامعادله فوق $x \geq 1$ است. به کمک نامساوی زیر، محدوده‌ای برای x به دست می‌آوریم و در نهایت، بررسی می‌کنیم کدام یک از اعداد صحیح این محدوده در نامعادله داده شده صادق اند.

$$\sqrt{3x-3} < \sqrt{3x-3} + \sqrt{x} < 5 \Rightarrow \sqrt{3x-3} < 5 \Rightarrow 3x-3 < 25 \Rightarrow x < \frac{28}{3}$$

اعداد صحیح این محدوده عبارت‌اند از: ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶ و ۷. با بررسی این اعداد در نامعادله می‌بینیم که اعداد ۱، ۲ و ۳ در این نامعادله صادق اند.

۲۸. گزینه ۱. در معادله درجه دوم، اگر $\Delta > 0$ ، آن‌گاه معادله دارای دو ریشه حقیقی و متمایز است.

$$\Delta > 0 \Rightarrow 4^2 - 4 \times (m-1)(m-3) > 0$$

$$\Rightarrow 16 - 4(m^2 - 4m + 3) > 0$$

$$\Rightarrow -4m^2 + 16m + 4 > 0$$

$$\Rightarrow m^2 - 4m - 1 < 0$$

$$\Rightarrow 2 - \sqrt{5} < m < 2 + \sqrt{5}$$

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی‌برداری؛ به اشتراک‌گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و داندود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

پنج عدد صحیح، ۰، ۱، ۲، ۳، ۴ در بازه $(2 - \sqrt{5}, 2 + \sqrt{5})$ داریم، دقت کنید! $m = 1$ قابل قبول نیست زیرا در معادله درجه دوم لازم است ضریب x^2 ، ناصفر باشد.

۲۹. گزینه ۳.

$$\frac{x^2 - 3x - 4}{x^2 - 5x - 6} > 2 \Rightarrow \frac{(x+1)(x-4)}{(x+1)(x-6)} > 2$$

$$\Rightarrow \frac{x-4}{x-6} > 2$$

$$\Rightarrow \frac{x-4}{x-6} - 2 > 0$$

$$\Rightarrow \frac{x-4-2x+12}{x-6} > 0$$

$$\Rightarrow \frac{-x+8}{x-6} > 0$$

جدول تعیین علامت نامعادله $\frac{-x+8}{x-6} > 0$ به صورت زیر است:

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی‌برداری؛ به اشتراک‌گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و داندود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

x	۶	۸
$\frac{-x+۸}{x-۶}$	$-$	$+$

با توجه به جدول، مجموعه جواب نامعادله، بازه $(۶, ۸)$ است.

۳. گزینه ۱. باید نامعادله $\frac{1}{p}x^2 + (m-2)x + 1 > 0$ همواره برقرار باشد که لازم است $\Delta < 0$.

$$\Delta < 0 \Rightarrow (m-2)^2 - 4 \times \frac{1}{p} < 0 \Rightarrow m^2 - 4m + 4 - 2 < 0 \Rightarrow m^2 - 4m + 2 < 0$$

جدول تعیین علامت نامعادله $m^2 - 4m + 2 < 0$ به صورت زیر است:

m	$۲ - \sqrt{۲}$	$۲ + \sqrt{۲}$
$m^2 - 4m + ۲$	$+$	$-$

با توجه به جدول، مجموعه جواب نامعادله $m^2 - 4m + 2 < 0$ بازه $(۲ - \sqrt{۲}, ۲ + \sqrt{۲})$ است. اعداد صحیح در این بازه اعداد ۱، ۲ و ۳ اند.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی‌برداری؛ به اشتراک‌گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

۳۱. گزینه ۳. عبارت $\frac{(x^2-4x+4)(x^3-1)}{(x+1)^3}$ به ازای $x = 1$ برابر صفر می‌شود بنابراین ۱ نباید در بازه مجموعه جواب نامعادله باشد، با فرض هر یک از اعداد ۱.۵، ۲ یا ۲.۵ به عنوان a ، گزاره به گزاره‌ای نادرست تبدیل می‌شود بنابراین گزینه‌های ۱، ۲ و ۴ حذف می‌شوند و گزینه ۳ صحیح می‌شود.

۳۲. گزینه ۴. مختصات رأس سهمی $y = ax^2 + bx + c$ به صورت $(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a})$ است.

$$(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a}) = (\frac{2}{6}, \frac{-4}{12}) = (\frac{1}{3}, \frac{-1}{3})$$

۳۳. گزینه ۲.

$$\begin{aligned} \frac{x-2}{x+2} + \frac{x}{x-2} &\Rightarrow (x^2-4) \times \left(\frac{x-2}{x+2} + \frac{x}{x-2} \right) \\ &= \frac{8}{x^2-4} = (x^2-4) \times \frac{8}{x^2-4} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow (x-2)^2 + (x+2)x = 8$$

$$\Rightarrow x^2 - 4x + 4 + x^2 + 2x = 8$$

$$\Rightarrow 2x^2 - 2x - 4 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - x - 2 = 0$$

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی‌برداری؛ به اشتراک‌گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و داندود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

$$\Rightarrow x = -1 \text{ یا } x = 2$$

جواب $x = 2$ غیر قابل قبول و $x = -1$ تنها جواب معادله است.

۳۴. گزینه ۳. در معادله داده شده $\Delta = (-2m)^2 - 4(-1) = 4m^2 + 4$ ، که همواره مقداری مثبت است، لذا این معادله دارای دو ریشه حقیقی است. از این که حاصل ضرب ریشه ها در این معادله $\frac{c}{a} = -1$ ، مقداری منفی است نتیجه می گیریم این معادله یک ریشه مثبت و یک ریشه منفی دارد.

۳۵. گزینه ۴. تابع سود از تفاضل تابع هزینه و تابع فروش به دست می آید. تابع سود در این مسأله به صورت زیر است:

$$y = \left(\frac{-1}{4}x^2 + 50x \right) - (kx + 30) = \frac{-1}{4}x^2 + (50 - k)x - 30$$

در نمودار تابع سود، مختصات رأس سهمی به صورت $\left(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a} \right)$ است.

$$\left(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a} \right) = (-2k + 100, \frac{-\Delta}{4a})$$

از این که به ازای ۲۰ واحد از این کالا مقدار سود ماکسیمم است، نتیجه می شود، $-2k + 100 = 20$ بنابراین $k = 40$.

۳۶. گزینه ۲. فرض کنیم ریشه های معادله α و β باشند.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و داندود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی‌برداری؛ به اشتراک‌گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و داندود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

$$\alpha + \beta = \frac{-b}{a} = \frac{-(k+1)}{6} = \frac{1}{6} \Rightarrow k = -2$$

معادله را بازنویسی کرده و آن را حل می‌کنیم:

$$6x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{2}{3}, \beta = \frac{-1}{2}$$

$$f(2) = -5 \Rightarrow -3(2)^2 + m(2) - 1 = -5 \Rightarrow m = 4 \quad \text{۳۷. گزینه ۴.}$$

بنابراین $f(x) = -3x^2 + 4x - 1$ و لذا:

$$f(-1) = -3(-1)^2 + 4(-1) - 1 = -8$$

۳۸. گزینه ۱. با توجه به این که عبارت $x^2 + 1$ ، همواره مثبت است، علامت کسر $\frac{x^2+1}{x^2-1}$ بستگی به علامت $x^2 - 1$ دارد. پس داریم:

$$\frac{x^2+1}{x^2-1} < 0 \Rightarrow x^2 - 1 < 0 \Rightarrow x^2 < 1 \Rightarrow -1 < x < 1$$

تنها عدد صحیح صادق در نامعادله $-1 < x < 1$ ، عدد صفر است.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی‌برداری؛ به اشتراک‌گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و داندود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

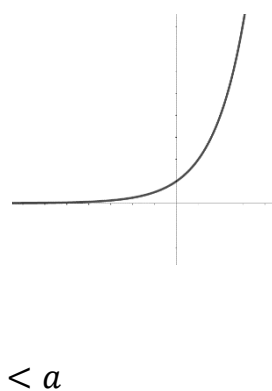
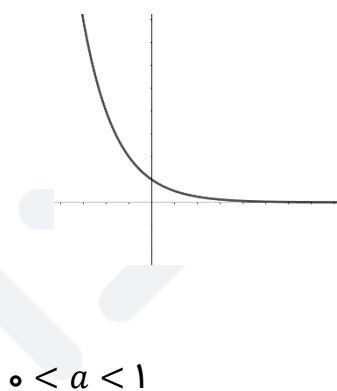
این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

فصل پنجم: تابع نمایی و لگاریتمی

بخش اول: تابع

تابع به فرم $y = a^x$ که در آن، a عددی حقیقی، مثبت و مخالف یک است، تابع نمایی نامیده می شود. دامنه این تابع مجموعه اعداد حقیقی و برد آن مجموعه اعداد حقیقی مثبت است. با توجه به این که $0 < a < 1$ یا $1 < a$ ، دو حالت کلی برای نمودار تابع نمایی وجود دارد.

در حالتی که، $0 < a < 1$ ، تابع نمایی $y = a^x$ ، فرم نزولی دارد و در حالتی که، $1 < a$ ، تابع نمایی $y = a^x$ ، فرم صعودی دارد.



تابع لگاریتمی

به ازای $x > 0$ ، $a > 0$ و $a \neq 1$ ، هرگاه $y = \log_a x$ و $x = a^y$ ، تابع لگاریتم x در پایه a به صورت $f(x) = \log_a x$ است. تساوی های $y = \log_a x$ و $x = a^y$ معادل هم اند، اولی را فرم لگاریتمی و

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن ([لینک خرید](#))، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

دومی را فرم نمایی می نامند. به عنوان یک قرارداد لگاریتم در پایه ۱۰ را به صورت $y = \log_{10} x = \log x$ می نویسیم.

چند مثال:

$$10^3 = 1000 \Leftrightarrow \log 1000 = 3$$

$$36^{\frac{1}{2}} = \sqrt{36} = 6 \Leftrightarrow \log_{36} 6 = \frac{1}{2}$$

$$10^{-2} = 0.01 \Leftrightarrow \log 0.01 = -2$$

$$7^0 = 1 \Leftrightarrow \log_7 1 = 0$$

$$3^5 = 343 \Leftrightarrow \log_3 343 = 5$$

$$4^1 = 4 \Leftrightarrow \log_4 4 = 1$$

ویژگی ها

۱. $\log_a 1 = 0$

لگاریتم عدد یک در هر پایه ای برابر صفر است.

۲. $\log_a a = 1$

لگاریتم هر عدد در پایه خودش برابر یک است.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن ([لینک خرید](#))، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و داندود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

۳. تابع لگاریتمی و تابع نمایی
معکوس هم اند.
 $\log_a a^x = x$ و $a^{\log_a x} = x$

۴. تابع لگاریتمی، تابعی یک به یک
است.
 $\log_a x = \log_a y \Rightarrow x = y$

$$\text{مثال: } \log_4 1 = 0, \log_{\sqrt{V}} \sqrt{V} = 1, \text{ و } \log_6 2^6 = 6$$

$$\text{مثال: } \log_4 (x^2 - 6) = \log_4 10 \Rightarrow x^2 - 6 = 10 \Rightarrow x^2 = 16 \Rightarrow x = \pm 4$$

قاعده تغییر پایه

فرض کنیم a, b و x اعداد حقیقی مثبت باشند به طوری که $a \neq 1$ و $b \neq 1$ ، در این صورت $\log_a x$ را می توان به صورت زیر در پایه b نوشت.

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

مثال:

$$\log_{100} 1000 = \frac{\log 1000}{\log 100} = \frac{3}{2}$$

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و داندود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی‌برداری؛ به اشتراک‌گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و داندود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

ویژگی‌هایی دیگر از تابع لگاریتمی

۱. $\log_a(uv) = \log_a u + \log_a v$ لگاریتم ضرب دو عدد برابر است با مجموع لگاریتم آن دو عدد
۲. $\log_a\left(\frac{u}{v}\right) = \log_a u - \log_a v$ لگاریتم تقسیم دو عدد برابر است با تفاضل لگاریتم آن دو عدد
۳. $\log_a u^n = n \log_a u$
۴. $\log_{a^m} u^n = \frac{n}{m} \log_a u$

مثال:

$$\log_5 \sqrt[3]{5} = \log_5 5^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3} \log_5 5 = \frac{1}{3} \times 1 = \frac{1}{3}$$

$$\log 5 + \log 2 = \log(5 \times 2) = \log 10 = 1$$

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی‌برداری؛ به اشتراک‌گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و داندود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی‌برداری؛ به اشتراک‌گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

پرسش‌های چهارگزینه‌ای فصل پنجم: تابع نمایی و لگاریتمی

۱. حاصل عبارت $\log_{216} 6\sqrt[3]{6}$ ، کدام است؟ (تأمین اجتماعی - ۹۳ و ۹۴)

- (۱) $\frac{4}{9}$
- (۲) $\frac{2}{9}$
- (۳) $\frac{2}{3}$
- (۴) $\frac{1}{3}$

۲. اگر $\log_{10} 5 = t$ ، آن‌گاه مقدار $\log_5 500$ کدام است؟ (دیوان محاسبات - ۹۴)

- (۱) $1 - \frac{2}{t}$
- (۲) $\frac{2-t}{t}$
- (۳) $\frac{t+2}{t}$
- (۴) $\frac{t+1}{t}$

۳. اگر $\log 2 = b$ و $\log 3 = a$ ، آن‌گاه، حاصل $\log \sqrt[3]{90}$ کدام است؟ (دستگاه‌های اجرایی - فراگیر

اول - ۹۴)

- (۱) $3(1 + 2a)$
- (۲) $3(a + 2b)$
- (۳) $\frac{1}{3}(1 + 2a)$
- (۴) $\frac{1}{3}(2a + b)$

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی‌برداری؛ به اشتراک‌گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

۴. اگر $\log 2 \cong 0.3$ و $\log 3 \cong 0.5$ آن گاه، مقدار $\log_{27} 25$ کدام است؟ (فراگیر پنجم و آموزش و پرورش - ۹۷)

- (۱) $\frac{14}{15}$
(۲) $\frac{13}{15}$
(۳) $\frac{6}{7}$
(۴) $\frac{5}{7}$

۵. مقدار x در تساوی $9^{x+2} = 36^3 \times (\frac{1}{3})^{-2}$ کدام است؟ (فراگیر هفتم، آموزش و پرورش و علوم پزشکی - ۹۸)

- (۱) ۱
(۲) -۱
(۳) $\frac{1}{2}$
(۴) ۲

۶. در تابع نمایی $f(x) = a^x$ اگر $f(2) + f(0) = 17$ ، آن گاه مقدار $f(\frac{3}{4})$ کدام است؟ (دانشگاه های علوم پزشکی - ۹۹)

- (۱) $2\sqrt{2}$
(۲) ۸
(۳) $4\sqrt{2}$
(۴) ۴

۷. جواب معادله توانی $2^{3x} = \frac{1}{64}$ کدام است؟ (شهرداری ها - ۹۰)

- (۱) ۲
(۲) ۴
(۳) -۲
(۴) -۴

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی‌برداری؛ به اشتراک‌گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

۸. در رابطه $\log_v(x^2 - 2) = \log_v x$ مقدار x برابر است با: (راه آهن - ۹۴)

(۱) $x = 2$

(۲) $x = 1$

(۳) $x = -1$

(۴) گزینه ۱ و ۳

۹. حاصل $\frac{1}{3} \log 8 + \frac{2}{3} \log 5 + \frac{1}{3} \log 40$ کدام است؟ (شهرداری‌ها - ۹۰)

(۱) $\log 25$

(۲) $\log 20$

(۳) $\log 15$

(۴) $\log 10$

۱۰. اگر $a = 4^{x+1}$ و $b = 4^x$ چه رابطه‌ای بین a و b برقرار است؟ (بانک گردشگری - ۹۶)

(۱) $a = 2b$

(۲) $b = 4a$

(۳) $a = 14b$

(۴) $a = 4b$

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی‌برداری؛ به اشتراک‌گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی‌برداری؛ به اشتراک‌گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و داندود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

پاسخ پرسش‌های چهارگزینه‌ای فصل پنجم: تابع نمایی و لگاریتمی

$$\log_{\sqrt[3]{6}} 6^{\sqrt[3]{6}} = \log_{6^{\frac{1}{3}}} 6^{\frac{4}{3}} = \frac{\frac{4}{3}}{\frac{1}{3}} \log_6 6 = \frac{\frac{4}{3}}{\frac{1}{3}} = \frac{4}{1} \quad \text{۱. گزینه ۱.}$$

$$\log_5 500 = \frac{\log 500}{\log 5} = \frac{\log(5 \times 100)}{\log 5} = \frac{\log 5 + \log 100}{\log 5} = \frac{t+2}{t} \quad \text{۲. گزینه ۳.}$$

۳. گزینه ۳.

$$\log \sqrt[3]{90} = \log \sqrt[3]{2^1 \times 3^2 \times 5^1} = \log(2^{\frac{1}{3}} \times 3^{\frac{2}{3}} \times 5^{\frac{1}{3}})$$

$$= \log(2^{\frac{1}{3}}) + \log(3^{\frac{2}{3}}) + \log(5^{\frac{1}{3}}) = \frac{1}{3} \log 2 + \frac{2}{3} \log 3 + \frac{1}{3} \log 5$$

$$= \frac{1}{3} b + \frac{2}{3} a + \frac{1}{3} (1 - \log 2) = \frac{1}{3} b + \frac{2}{3} a + \frac{1}{3} (1 - b)$$

$$= \frac{2}{3} a + \frac{1}{3} = \frac{1}{3} (1 + 2a)$$

$$\log_{\sqrt[3]{27}} 25 = \frac{\log 25}{\log \sqrt[3]{27}} = \frac{\log 5^2}{\log 3^{\frac{3}{2}}} = \frac{2 \log 5}{\frac{3}{2} \log 3} = \frac{2(1 - \log 2)}{\frac{3}{2} \log 3} = \frac{2(1 - 0.3)}{\frac{3}{2} \times 0.5} = \frac{1.4}{1.5} = \frac{14}{15} \quad \text{۴. گزینه ۱.}$$

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی‌برداری؛ به اشتراک‌گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و داندود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

۵. گزینه ۴.

$$9^{x+2} = 36^3 \times \left(\frac{1}{3}\right)^{-2} \Rightarrow (3^2)^{x+2} = (2^2 \times 3^2)^3 \times (3^3 \times 3^{-1})^{-2}$$

$$\Rightarrow 3^{2x+4} = 2^6 \times 3^6 \times 2^{-6} \times 3^2$$

$$\Rightarrow 3^{2x+4} = 3^8$$

$$\Rightarrow 2x + 4 = 8$$

$$\Rightarrow x = 2$$

۶. گزینه ۲.

$$f(2) + f(0) = 17 \Rightarrow a^2 + a^0 = 17 \Rightarrow a^2 + 1 = 17 \Rightarrow a = 4 \Rightarrow f(x) = 4^x \Rightarrow f\left(\frac{3}{2}\right) = 4^{\frac{3}{2}} = \sqrt{64} = 8$$

$$2^{3x} = \frac{1}{64} \Rightarrow 2^{3x} = 2^{-6} \Rightarrow 3x = -6 \Rightarrow x = -2$$

۷. گزینه ۳.

$$\log_v(x^2 - 2) = \log_v x \Rightarrow x^2 - 2 = x \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow x =$$

۸. گزینه ۱.

$$x = 2 \text{ یا } -1$$

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

جواب $x = -1$ ، قابل قبول نیست زیرا اعداد منفی لگاریتم ندارند.

۹. گزینه ۲.

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} \log 8 + \frac{2}{3} \log 5 + \frac{1}{3} \log 40 &= \log 8^{\frac{1}{3}} + \log 5^{\frac{2}{3}} + \log 40^{\frac{1}{3}} \\ &= \log \left(8^{\frac{1}{3}} \times 5^{\frac{2}{3}} \times 40^{\frac{1}{3}} \right) \\ &= \log \left(8^{\frac{1}{3}} \times 25^{\frac{1}{3}} \times 40^{\frac{1}{3}} \right) \\ &= \log (8 \times 25 \times 40)^{\frac{1}{3}} \\ &= \log (8000)^{\frac{1}{3}} \\ &= \log 20 \end{aligned}$$

۱۰. گزینه ۴.

$$a = 4^{x+1} = 4^x \times 4 = 4b$$

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی‌برداری؛ به اشتراک‌گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و داندود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

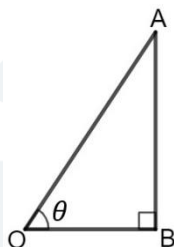
فصل ششم، مثلثات

بخش اول: مثلث قائم الزاویه

مثلث قائم الزاویه OAB را با وتر OA در نظر می‌گیریم و فرض کنیم θ اندازه زاویه حاده O باشد، نسبت‌های مثلثاتی زاویه θ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\sin \theta = \frac{\text{ضلع مقابل } \theta}{\text{وتر}} = \frac{|AB|}{|OA|}$$

$$\cos \theta = \frac{\text{ضلع مجاور } \theta}{\text{وتر}} = \frac{|OB|}{|OA|}$$



$$\tan \theta = \frac{\text{ضلع مقابل } \theta}{\text{ضلع مجاور } \theta} = \frac{|AB|}{|OB|}$$

$$\cot \theta = \frac{\text{ضلع مجاور } \theta}{\text{ضلع مقابل } \theta} = \frac{|OB|}{|AB|}$$

مثال: در مثلث قائم الزاویه شکل زیر نسبت‌های مثلثاتی زاویه θ محاسبه شده است.

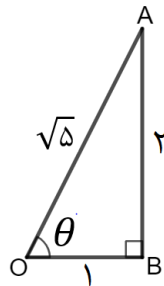
این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی‌برداری؛ به اشتراک‌گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و داندود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی‌برداری؛ به اشتراک‌گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

$$\sin \theta = \frac{\text{ضلع مقابل } \theta}{\text{وتر}} = \frac{|AB|}{|OA|}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\cos \theta = \frac{\text{علض رواجم } \theta}{\text{رتو}} = \frac{|OB|}{|OA|} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$



$$\tan \theta = \frac{\text{علض لباقم } \theta}{\text{علض رواجم } \theta} = \frac{|AB|}{|OB|} = \frac{2}{1}$$

$$\cot \theta = \frac{\text{علض رواجم } \theta}{\text{علض لباقم } \theta} = \frac{|OB|}{|AB|} = \frac{1}{2}$$

توجه کنید طول اضلاع قائمه مثلث ۱ و ۲ واحد است و از قضیه فیثاغورس معلوم می‌شود که طول وتر برابر با $\sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$ است.

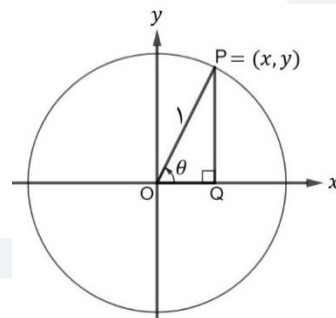
این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی‌برداری؛ به اشتراک‌گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی‌برداری؛ به اشتراک‌گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

بخش دوم: دایره مثلثاتی

فرض کنید OAB را با مثلث قائم‌الزاویه OPQ به طول وتر ۱ عوض کرده باشیم و طوری که O مرکز دایره، OP شعاع دایره و OQ در امتداد محور مثبت x واقع باشد، فرض کنید نقطه P به طول x و عرض y باشد. در این صورت:

$$\sin \theta = \frac{\text{ضلع مقابل } \theta}{\text{وتر}} = \frac{y}{1} = y$$



$$\cos \theta = \frac{\text{ضلع مجاور } \theta}{\text{وتر}} = \frac{x}{1} = x$$

$$\tan \theta = \frac{\text{ضلع مقابل } \theta}{\text{ضلع مجاور } \theta} = \frac{y}{x}$$

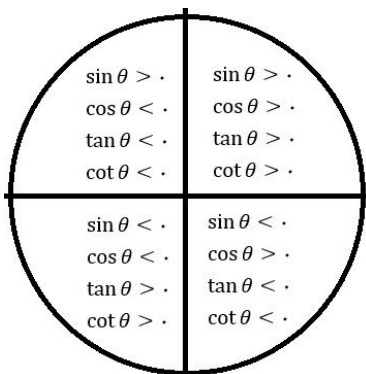
$$\cot \theta = \frac{\text{ضلع مجاور } \theta}{\text{ضلع مقابل } \theta} = \frac{x}{y}$$

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی‌برداری؛ به اشتراک‌گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

تعریف نسبت‌های مثلثاتی در دایره مثلثاتی این امکان را ایجاد می‌کند که نسبت‌های مثلثاتی به ازای θ دلخواه، که فقط زاویه θ حاده (یعنی بین 0° و 90°) نباشد، نیز به کار رود.

علامت نسبت‌های مثلثاتی در چهار ناحیه دایره مثلثاتی



با توجه به این که $\sin \theta = y$ ، $\cos \theta = x$ ، $\tan \theta = \frac{y}{x}$ و $\cot \theta = \frac{x}{y}$ ، علامت هر یک از نسبت‌های مثلثاتی در هر یک از نواحی دایره مثلثاتی، مطابق شکل زیر مشخص می‌شود.

روابط بین نسبت‌های مثلثاتی

به کمک تعاریف نسبت‌های مثلثاتی، فرمول‌های مهم زیر به دست می‌آیند:

$$-1 \leq \cos \theta \leq 1 \text{ و } -1 \leq \sin \theta \leq 1. ۲$$

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1. ۱$$

$$1 + \cot^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta} \text{ و } 1 + \tan^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta}. ۴$$

$$\cot \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \text{ و } \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}. ۳$$

$$\cot^2 \theta = \frac{1}{\sin^2 \theta}$$

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

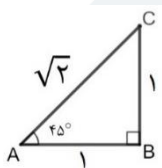
مقیاس رادیان

یکی از واحدهای اندازه گیری زاویه، مقیاس رادیان است. π رادیان معادل با 180° درجه است، بنابراین $\frac{\pi}{4}$ معادل با 90° درجه و به همین ترتیب ...

رادیان	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{3\pi}{2}$
	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕
درجه	30°	45°	60°	90°	135°	150°	180°	270°

نسبت های مثلثاتی زوایای 30° ، 45° و 60°

مثلث قائم الزاویه متساوی الساقین به طول ضلع ۱، در نظر بگیرید، نسبت های مثلثاتی زاویه 45° درجه ($\frac{\pi}{4}$ رادیان)، را می توان به کمک آن محاسبه کرد.

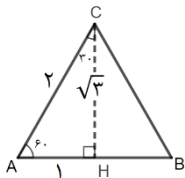


$$\sin 45^\circ = \frac{|BC|}{|AC|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \cos 45^\circ = \frac{|AB|}{|AC|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \tan 45^\circ = \frac{|BC|}{|AB|} = \frac{1}{1} = 1$$

برای محاسبه نسبت های مثلثاتی زوایای 30° و 60° درجه، مثلث متساوی الاضلاع دو نیم شده به طول ضلع ۲ در نظر بگیرید، در این صورت:

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی‌برداری؛ به اشتراک‌گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و داندود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

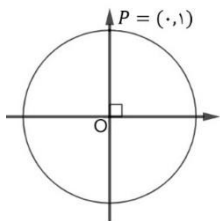


$$\sin 30^\circ = \frac{|AH|}{|AC|} = \frac{1}{2} \quad \cos 30^\circ = \frac{|CH|}{|AC|} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \tan 30^\circ = \frac{|AH|}{|CH|} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\sin 60^\circ = \frac{|CH|}{|AC|} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \cos 60^\circ = \frac{|AH|}{|AC|} = \frac{1}{2} \quad \tan 60^\circ = \frac{|CH|}{|AH|} = \frac{\sqrt{3}}{1}$$

محاسبه نسبت‌های مثلثاتی زاویه 90°

دایره مثلثاتی (شعاع ۱) و زاویه 90° را در آن در نظر می‌گیریم، نقطه $P = (0, 1)$ انتهای کمان 90° درجه روی دایره مثلثاتی است بنابراین داریم:



$$\sin 90^\circ = y = 1 \quad \cos 90^\circ = x = 0$$

$$\tan 90^\circ = \frac{y}{x} = \frac{1}{0}$$

تعریف نمی‌شود

به همین روش، نسبت‌های مثلثاتی زوایای 0° ، 180° و 270° نیز قابل محاسبه است. در جدول زیر مقادیر نسبت‌های مثلثاتی این زوایا آمده است.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی‌برداری؛ به اشتراک‌گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و داندود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

	0°	90°	180°	270°
$\sin \theta$	۰	۱	۰	-۱
$\cos \theta$	۱	۰	-۱	۰
$\tan \theta$	۰	تعریف نشده	۰	تعریف نشده
$\cot \theta$	تعریف نشده	۰	تعریف نشده	۰

فرض کنید k عدد صحیح دلخواهی باشد. افزودن $2k\pi$ رادیان به زاویه θ باعث می شود که شعاع OP ، k دوران کامل حول مبدأ بزند، این تأثیری بر موقعیت نهایی OP ندارد؛ در نتیجه، اثری بر مختصات P ، یعنی بر مقادیر نسبت های مثلثاتی ندارد. بنابراین:

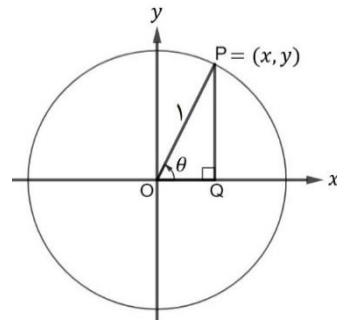
$$\sin(2k\pi + \theta) = \sin \theta$$

$$\cos(2k\pi + \theta) = \cos \theta$$

$$\tan(2k\pi + \theta) = \tan \theta$$

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

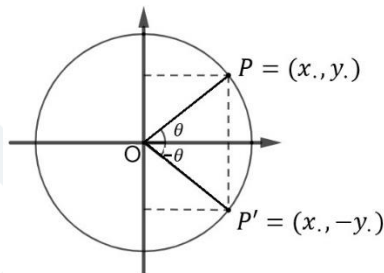
این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی‌برداری؛ به اشتراک‌گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و داندود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.



$$\cot(2k\pi + \theta) = \cot \theta$$

محاسبه نسبت‌های مثلثاتی زاویه $-\theta$ بر حسب نسبت‌های مثلثاتی زاویه θ

فرض کنیم نقطه $P = (x_0, y_0)$ انتهای کمان زاویه θ روی دایره مثلثاتی باشد، در این صورت انتهای کمان زاویه $-\theta$ روی دایره مثلثاتی نقطه $P' = (x_0, -y_0)$ است، بنابراین:



$$\sin(-\theta) = -\sin \theta$$

$$\cos(-\theta) = \cos \theta$$

$$\tan(-\theta) = -\tan \theta$$

$$\cot(-\theta) = -\cot \theta$$

قوانین جمع

فرض کنیم α و β دو زاویه باشند، در این صورت:

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی‌برداری؛ به اشتراک‌گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و داندود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و داندود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

به کمک قوانین جمع فرمول های مثلثاتی بسیاری می توان نتیجه گرفت. در این جا به دو مورد از آن ها اشاره می کنیم و سایر آن ها را در جدولی در ادامه می آوریم.

مثال: در فرمول $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$ ، به جای β قرار می دهیم $\frac{\pi}{2}$ ، در این صورت:

$$\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = \sin \alpha \cos \frac{\pi}{2} + \cos \alpha \sin \frac{\pi}{2} = \sin \alpha \times 0 + \cos \alpha \times 1 = \cos \alpha$$

مثال: در فرمول $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$ ، به جای β قرار می دهیم α ، در این صورت:

$$\sin(\alpha + \pi) = \sin \alpha \cos \pi + \cos \alpha \sin \pi = \sin \alpha \times (-1) + \cos \alpha \times 0 = -\sin \alpha$$

به همین روش فرمول های مثلثاتی مفید زیر نیز به دست می آیند.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و داندود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

$$\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha \quad \cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha \quad \tan(\pi - \alpha) = -\tan \alpha$$

$$\sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha \quad \cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha \quad \tan(\pi + \alpha) = \tan \alpha$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha \quad \tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cot \alpha$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos \alpha \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin \alpha \quad \tan\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\cot \alpha$$

فرمول‌های زاویه مضاعف

با فرض $\alpha = \beta = \theta$ در فرمول‌های مربوط به $\sin(\alpha + \beta)$ و $\cos(\alpha + \beta)$ ، فرمول‌های مهم زاویه مضاعف به دست می‌آیند:

$$\sin(2\theta) = 2 \sin \theta \cos \theta$$

$$\cos(2\theta) = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta = 2\cos^2 \theta - 1 = 1 - 2\sin^2 \theta$$

ضمناً یک جفت فرمول مفید دیگر نیز به صورت زیر داریم:

$$\cos^2 \theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2} \quad \text{و} \quad \sin^2 \theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2}$$

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی‌برداری؛ به اشتراک‌گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

پرسش‌های چهارگزینه‌ای فصل ششم، مثلثات

۱. عبارت $\frac{1-\sin 2x}{\sin x - \cos x}$ ، پس از ساده شدن، معادل کدام مورد است؟ (دیوان محاسبات - ۹۴)

- (۱) $\sin x - \cos x$
- (۲) $\sin x + \cos x$
- (۳) $\cos x - \sin x$
- (۴) $-(\sin x + \cos x)$

۲. انتهای کمان x در ناحیه سوم مثلثاتی و $l = \sqrt{1 + \cot^2 x} + \sqrt{1 + \sin^2 x} + \cos x$. اگر $\sin x = a$ آن‌گاه، مقدار l کدام است؟ (آموزش و پرورش - ۹۵)

- (۱) $2a$
- (۲) $-\frac{a^2+1}{a}$
- (۳) $2\sqrt{1+a^2}$
- (۴) $-\frac{a^2-1}{a}$

۳. اگر $\cos x = -\frac{\sqrt{5}}{3}$ و انتهای کمان x در ناحیه سوم باشد، حاصل $\sin x \cos^2 x - \sin x$ کدام است؟ (وزارت نیرو - ۹۶)

- (۱) $\frac{1}{3\sqrt{5}}$
- (۲) $\frac{1}{3}$
- (۳) $-\frac{1}{3\sqrt{5}}$
- (۴) $-\frac{1}{3}$

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی‌برداری؛ به اشتراک‌گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

۴. اگر $\cos x = \sqrt{\frac{-\sin x}{1+\tan^2 x}}$ ، آن گاه انتهای کمان x در کدام ربع دایره مثلثاتی واقع است؟
(فراگیر پنجم و آموزش و پرورش - ۹۷)

- (۱) دوم
- (۲) سوم
- (۳) چهارم
- (۴) اول

۵. در یک مثلث قائم الزاویه، سینوس یکی از زاویه ها برابر $\frac{\sqrt{5}}{3}$ و طول ضلع مجاور این زاویه برابر ۲ است. اندازه وتر این مثلث کدام است؟ (فراگیر پنجم و آموزش و پرورش - ۹۷)

- (۱) ۳
- (۲) ۹
- (۳) ۷
- (۴) ۵

۶. اگر $\tan x = \frac{1}{3}$ و $\cos x < 0$ آن گاه، مقدار $\cos x$ کدام است؟ (دانشگاه های علوم پزشکی و وزارت بهداشت - ۹۹)

- (۱) $-\frac{3}{\sqrt{10}}$
- (۲) $-\frac{3}{\sqrt{5}}$
- (۳) $-\frac{9}{10}$
- (۴) $-\frac{5}{10}$

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی‌برداری؛ به اشتراک‌گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

۷. اگر $\sin x = b - 2a$ ، $\cos x = 2b + a$ ، $b - a = \frac{1}{\sqrt{5}}$ و انتهای کمان x در ناحیه اول باشد، آن‌گاه مقدار $\tan x$ کدام است؟ (فراگیر هفتم، آموزش و پرورش و علوم پزشکی - ۹۸)

(۱) ۳

(۲) ۲

(۳) $\frac{1}{2}$ (۴) $\frac{1}{3}$

۸. اگر α زاویه میان شعاع OA با جهت مثبت محور x ها و $A = (-1, \sqrt{3})$ ، آن‌گاه مقدار $\sin \alpha$ کدام است؟ (فراگیر هفتم، آموزش و پرورش و علوم پزشکی - ۹۸)

(۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ (۳) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (۴) $-\frac{1}{2}$

۹. اگر $\frac{\sin \theta}{\sin \theta - \cos \theta} = \frac{5}{4}$ ، آن‌گاه مقدار $\tan \theta$ کدام است؟ (فراگیر هشتم و آموزش و پرورش - ۹۹)

(۱) ۵

(۲) ۳.۲۵

(۳) ۳

(۴) ۴.۷۵

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی‌برداری؛ به اشتراک‌گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن ([لینک خرید](#))، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

۱۰. اگر $\frac{\pi}{6} < x < \frac{5\pi}{6}$ ، آن گاه بیشترین مقدار عبارت $\frac{1-\cos x}{\sin x - \cot x(1-\cos x)}$ کدام است؟
(فراگیر هشتم و آموزش و پرورش - ۹۹)

- (۱) $\frac{1}{2}$
- (۲) $\sqrt{2}$
- (۳) ۱
- (۴) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

۱۱. انتهای کمان $\frac{13\pi}{5}$ رادیان، در کدام ناحیه مثلثاتی واقع است؟ (دانشگاه‌های علوم پزشکی و وزارت بهداشت - ۹۹)

- (۱) چهارم
- (۲) سوم
- (۳) دوم
- (۴) اول

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن ([لینک خرید](#))، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و داندود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

پاسخ پرسش‌های چهارگزینه‌ای فصل ششم، مثلثات

۱. گزینه ۱.

$$\frac{1 - \sin^2 x}{\sin x - \cos x} = \frac{(\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) - \sin x \cos x}{\sin x - \cos x} = \frac{(\sin x - \cos x)^2}{\sin x - \cos x} = \sin x - \cos x$$

۲. گزینه ۲. علامت $\sin x$ و $\cos x$ در ناحیه سوم مثلثاتی، منفی است بنابراین:

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{1 + \cot^2 x} + \sqrt{1 + \sin^2 x}}{\cos x} &= \frac{\sqrt{\frac{1}{\sin^2 x}} + \sqrt{(\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) + \sin x \cos x}}{\cos x} \\ &= \frac{-1}{\sin x} + \sqrt{(\sin x + \cos x)^2 + \cos x} \\ &= \frac{-1}{\sin x} - (\sin x + \cos x) + \cos x \\ &= \frac{-1}{\sin x} - \sin x \end{aligned}$$

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و داندود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

$$= \frac{-1}{a} - a$$

$$= -\frac{a^2 + 1}{a}$$

۳. گزینه ۱. با توجه به فرمول $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ داریم:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \sin^2 x + \left(-\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2 = 1 \Rightarrow \sin^2 x = \frac{4}{9} \Rightarrow \sin x = \pm \frac{2}{3}$$

با توجه به این که انتهای کمان x در ناحیه سوم است، مقدار $\sin x = -\frac{2}{3}$ قابل قبول است بنابراین:

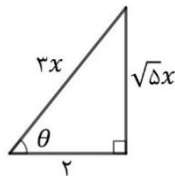
$$\sin x \cos^2 x - \sin x = \left(-\frac{2}{3}\right) \times \left(-\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2 - \left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{8}{27}$$

۴. گزینه ۳. حاصل یک رادیکال با فرجه زوج همواره عددی نامنفی است بنابراین در این جا کسینوس مقداری مثبت است. از طرفی با توجه به عبارت درون رادیکال، لازم است سینوس مقداری منفی باشد. بنابراین انتهای کمان x در ربع چهارم واقع است.

۵. گزینه ۱. اندازه اضلاع این مثلث، ۲ و $\sqrt{5}x$ و اندازه وتر آن $3x$ است. با توجه به قضیه فیثاغورس داریم:

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.



$$2^2 + (\sqrt{5}x)^2 = (3x)^2 \Rightarrow 4 + 5x^2 = 9x^2 \Rightarrow x = 1$$

اندازه وتر برابر با $3x = 3 \times 1 = 3$ است.

۶. گزینه ۱.

$$1 + \tan^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta} \Rightarrow 1 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{\cos^2 \theta} \Rightarrow \frac{1}{\cos^2 \theta} = \frac{10}{9} \Rightarrow \cos^2 \theta = \frac{9}{10} \\ \Rightarrow \cos \theta = -\frac{3}{\sqrt{10}}$$

۷. گزینه ۳. با توجه به $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ داریم:

$$(b - 2a)^2 + (2b + a)^2 = 1 \Rightarrow a^2 + b^2 = \frac{1}{5}$$

طبق فرض داریم $b - a = \frac{1}{\sqrt{5}}$ ، بنابراین: $b - a = \frac{1}{\sqrt{5}} \Rightarrow (b - a)^2 = \frac{1}{5}$

از دو رابطه اخیر نتیجه می شود $a^2 + b^2 = (b - a)^2$ و لذا:

$$a^2 + b^2 = (b - a)^2 \Rightarrow a^2 + b^2 = a^2 - 2ab + b^2 \Rightarrow ab = 0$$

از $ab = 0$ نتیجه می شود $a = 0$ یا $b = 0$. بنابراین دو حالت داریم:

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی‌برداری؛ به اشتراک‌گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

حالت اول: $b = 0$ در این حالت نتیجه می‌شود $\sin x = b - 2a = -2a$ و $\cos x = 2b + a = a$ بنابراین:

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{-2a}{a} = -2$$

این جواب قابل قبول نیست زیرا انتهای کمان x در ناحیه اول است و در ناحیه اول مقدار تانژانت مثبت است.

حالت دوم: $a = 0$ در این حالت نتیجه می‌شود $\sin x = b - 2a = b$ و $\cos x = 2b + a = 2b$ بنابراین:

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{b}{2b} = \frac{1}{2}$$

این جواب قابل قبول است.

۸. گزینه ۳. اگر $A = (x_0, y_0)$ آن گاه $\sin \alpha = \frac{y_0}{r}$ که در آن $r = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$ بنابراین داریم:

$$\sin \alpha = \frac{y}{r} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{(-1)^2 + \sqrt{3}^2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

۹. گزینه ۱.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی‌برداری؛ به اشتراک‌گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

$$\frac{\sin \theta}{\sin \theta - \cos \theta} = \frac{5}{4} \Rightarrow 4 \times \sin \theta = 5 \times (\sin \theta - \cos \theta)$$

$$\Rightarrow 4 \sin \theta = 5 \sin \theta - 5 \cos \theta$$

$$\Rightarrow \sin \theta = 5 \cos \theta$$

$$\Rightarrow \tan \theta = 5$$

۱۰. گزینه ۳. عبارت داده شده معادل با $\sin x$ است.

$$\frac{1 - \cos x}{\sin x - \cot x(1 - \cos x)} = \frac{1 - \cos x}{\sin x - \frac{\cos x(1 - \cos x)}{\sin x}} = \frac{1 - \cos x}{\frac{\sin^2 x - \cos x + \cos^2 x}{\sin x}} = \frac{1 - \cos x}{\frac{1 - \cos x}{\sin x}} = \sin x$$

بیشترین مقدار $\sin x$ در بازه $\frac{\pi}{6} < x < \frac{5\pi}{6}$ به ازای $x = \frac{\pi}{2}$ اتفاق می افتد و این بیشترین مقدار برابر ۱ است.

۱۱. گزینه ۳. $\frac{13\pi}{5}$ رادیان معادل $\frac{13 \times 180}{5} = 468$ درجه است و $468^\circ = 360^\circ + 90^\circ + 18^\circ$ در ناحیه دوم قرار می گیرد.

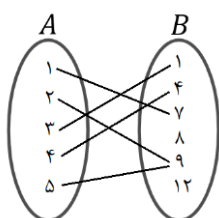
این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی‌برداری؛ به اشتراک‌گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و داندود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

فصل هفتم، تابع

بخش اول: مفهوم تابع

منظور از تابع، تناظری بین دو مجموعه از اعداد با این خاصیت است که به هر عدد در مجموعه اول، یک و فقط یک عدد در مجموعه دوم نظیر می‌شود.



مثال: فرض کنید $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ و $B = \{1, 4, 7, 8, 9, 12\}$ ، در شکل زیر تناظری از A به B نشان داده شده که به هر عدد از مجموعه اول یعنی A ، یک و فقط یک عدد در مجموعه دوم یعنی B ، نظیر شده است، این تناظر معرف یک تابع از A به B است.

مجموعه اول (در این جا مجموعه A) را قلمرو یا دامنه تابع می‌نامیم و با نماد D نشان می‌دهیم و مجموعه مقادیری که به اعضای مجموعه اول نظیر شده اند، برد تابع می‌گوییم و با نماد R نشان می‌دهیم. در مثال فوق دامنه و برد تابع به صورت زیر است:

$$\text{دامنه} \quad D = \{1, 2, 3, 4, 5\} \quad \text{برد} \quad R = \{1, 4, 7, 9\}$$

با توجه به تعریف، لازم است که همه اعداد از مجموعه اول به عددی در مجموعه دوم نظیر شود در حالی که ممکن است بعضی از اعضای مجموعه دوم در این تناظر حضور نداشته باشند.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی‌برداری؛ به اشتراک‌گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و داندود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

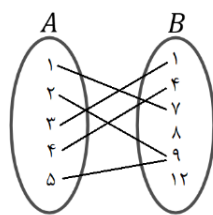
این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی‌برداری؛ به اشتراک‌گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

نماد تابع

قاعده یا روندی را که در تناظر وجود دارد، نام‌گذاری می‌کنیم به این ترتیب که اگر x از مجموعه اول به y از مجموعه دوم نظیر شود می‌نویسیم:

$$y = f(x)$$

در مثال قبل تناظر را با این نماد نشان می‌دهیم:



$$f(1) = 7$$

$$f(2) = 9$$

$$f(3) = 1$$

$$f(4) = 4$$

$$f(5) = 9$$

طریقه دیگر نمایش یک تابع به صورت نمایش با زوج‌های مرتب است، با این خاصیت که هیچ دو زوج مرتب (x, y) در تابع، مولفه اول یکسان نداشته باشند (اگر مولفه اول دو زوج، یکسان بود آن‌گاه مولفه دوم آن‌ها نیز یکسان باشد).

تابع معرفی شده در مثال قبل را f می‌نامیم و به صورت زوج‌های مرتب نشان می‌دهیم:

$$f = \{(1, 7), (2, 9), (3, 1), (4, 4), (5, 9)\}$$

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی‌برداری؛ به اشتراک‌گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی‌برداری؛ به اشتراک‌گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و داندود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

تست: رابطه $\{(3, m^2), (2, 1), (-3, m), (-2, m), (3, m+2), (m, 4)\}$ به ازای کدام مقدار m تابع است؟

(۱) -۲ (۲) -۱ (۳) ۲ (۴) هیچ مقدار

پاسخ: گزینه ۲. دو زوج مرتب $(3, m^2)$ و $(3, m+2)$ در این رابطه دارای مولفه اول یکسان اند، برای این که این رابطه، تابع باشد لازم است مولفه‌های دوم نیز برابر باشند پس داریم:

$$m^2 = m + 2 \Rightarrow m^2 - m - 2 = 0 \Rightarrow m = -1 \text{ یا } m = 2$$

به ازای $m = 2$ رابطه فوق به صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$\{(3, 4), (2, 1), (-3, 2), (-2, 2), (3, 4), (2, 4)\}$$

به علت وجود دو زوج مرتب $(2, 1)$ و $(2, 4)$ که مولفه اول برابر دارند و مولفه دوم نابرابر، نتیجه می‌شود به ازای $m = 2$ ، رابطه مورد نظر تابع نیست.

به ازای $m = -1$ رابطه فوق به صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$\{(3, 1), (2, 1), (-3, -1), (-2, -1), (3, 1), (-1, 4)\} \\ = \{(3, 1), (2, 1), (-3, -1), (-2, -1), (-1, 4)\}$$

که معرف یک تابع است.

مثال: فرض کنیم تابع f ، جذر عدد x را بگیرد. در این صورت،

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی‌برداری؛ به اشتراک‌گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و داندود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

$$f(x) = \sqrt{x}$$

$\sqrt{x}$ را ضابطه تابع می نامیم. وسیع ترین مجموعه ای که این تابع بر آن تعریف می شود، مجموعه همه اعداد نامنفی است، زیرا نمی توان از اعداد منفی جذر گرفت. چند مقدار نمونه از این تابع عبارت اند از:

$$f(0) = \sqrt{0} = 0, \quad f(9) = \sqrt{9} = 3, \quad f(98) = \sqrt{98} = 7\sqrt{2}$$

هرگاه ضابطه یک تابع بدون هیچ اطلاعی از دامنه آن داده شده باشد، فرض آن است که دامنه آن تابع، وسیع ترین مجموعه مقادیری است که ضابطه به ازای آن ها با معنی است. مثلاً دامنه تابع $f(x) = \sqrt{x}$ به صورت $D_f = [0, +\infty)$ است.

مثال: دامنه تابع $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ را مشخص کنید.

چون اعداد منفی جذر ندارند لازم است عبارت $1-x^2$ نامنفی باشد،

$$1-x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1$$

بنابراین $D_f = [-1, +1]$.

مثال: فرض کنید $f(x) = \frac{1}{x^2-9}$ ، مقادیر $f(1)$ ، $f(2)$ و $f(3)$ را بیابید.

پاسخ: برای یافتن $f(1)$ ، $x = 1$ را در ضابطه تابع قرار می دهیم که نتیجه می دهد، $f(1) = \frac{1}{1^2-9} =$

$-\frac{1}{8}$

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی‌برداری؛ به اشتراک‌گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و داندود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

به همین نحو، و $f(2) = \frac{1}{2-9} = -\frac{1}{5}$ ، از طرفی، $f(3) = \frac{1}{3^2-9} = \frac{1}{9-9}$ تعریف نشده است، زیرا تقسیم بر صفر ممکن نیست! توجه کنید دامنه این تابع به صورت $D_f = R - \{-3, +3\}$ است.

اعمال بر توابع

دو تابع f و g داده شده اند. فرض کنیم D بزرگترین مجموعه‌ای باشد که هر دوی f و g بر آن تعریف شده اند در این صورت:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x)$$

$$(f \times g)(x) = f(x) \times g(x)$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \quad ; \quad g(x) \neq 0$$

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی‌برداری؛ به اشتراک‌گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و داندود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

مثال: فرض کنیم $f(x) = \sqrt{4-x^2}$ و $g = \{(0,0), (2,0), (1,-1), (3,3), (5,4)\}$ می‌خواهیم تابع $\frac{g}{f}$ را به صورت زوج‌های مرتب نمایش دهیم. دامنه g به صورت $\{0,2,1,3,5\}$ است و دامنه f به صورت $[-2,2]$. از این که $f(2) = \sqrt{4-2^2} = 0$ نتیجه می‌شود،

$$D_{\frac{g}{f}} = D_g \cap D_f - \{x | f(x) = 0\} = [-2,2] \cap \{0,2,1,3,5\} - \{2\} = \{0,1\}$$

و داریم:

$$\frac{g}{f}(0) = \frac{g(0)}{f(0)} = \frac{0}{2} = 0, \quad \frac{g}{f}(1) = \frac{g(1)}{f(1)} = \frac{-1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

بنابراین نمایش تابع $\frac{g}{f}$ به صورت زوج‌های مرتب به صورت زیر است:

$$\frac{g}{f} = \left\{ (0,0), \left(1, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \right\}$$

توابع مرکب

عمل ترکیب دو تابع، یکی از پرکاربردترین اعمال در توابع است و هنگامی است که خروجی یک تابع، به عنوان ورودی تابعی دیگر باشد. نماد $f \circ g$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

مثال: فرض کنیم $f(x) = x + 1$ و $g(x) = x^2$ ، در این صورت:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2) = x^2 + 1$$

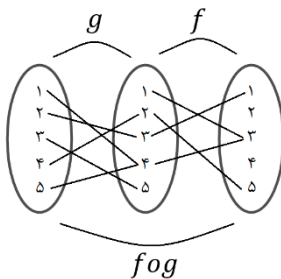
این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و داندود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

9

$$(gof)(x) = g(f(x)) = g(x+1) = (x+1)^2$$

مثال: فرض کنیم $f = \{(1,3), (2,5), (3,1), (4,3)\}$ و $g = \{(1,4), (2,3), (3,5), (4,2), (5,4)\}$.



برای به دست آوردن تابع fog به کمک نمودار، (که عموماً در این گونه مسائل راه حلی مناسب است) به نمودار مقابل دقت کنید! با توجه به نمودار مشخص است که:

$$fog = \{(1,3), (2,1), (3,5), (4,2), (5,4)\}$$

تست: توابع $f = \{(2,1), (3,2), (4,5), (1,7)\}$ و $g = \{(1,2), (3,1), (a,3), (b,1)\}$ مفروض اند. اگر $(4,2) \in fog$ و $(4,1) \in gof$ آن گاه دوتایی (a,b) کدام است؟

(۴, ۵)

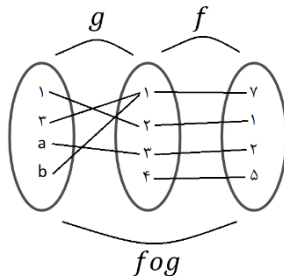
(۳, ۴)

(۲, ۳)

(۱, ۳)

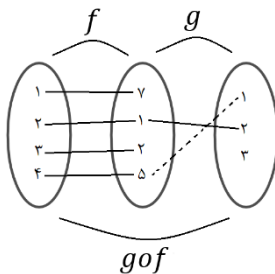
این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و داندود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی‌برداری؛ به اشتراک‌گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.



پاسخ: گزینه ۳. نمودار تابع fog در شکل مقابل رسم شده است.

با توجه به نمودار $(a, 2) \in fog$ و طبق فرض $(4, 2) \in fog$ ، که نتیجه می‌دهد $a = 4$. از این که $(4, 1) \in g \circ f$ نتیجه می‌گیریم در تابع g باید ۵ به ۱ نظیر شود و از این که $(b, 1) \in g$ نتیجه می‌گیریم $b = 5$.



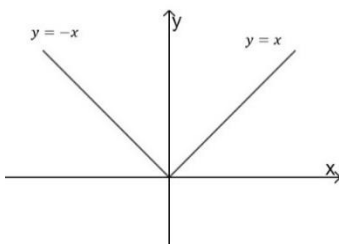
نمودار تابع

نمودار یک تابع، شکل هندسی در صفحه است که از رسم همه نقاط که مختصاتشان در ضابطه تابع صدق می‌کند به دست می‌آید.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی‌برداری؛ به اشتراک‌گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

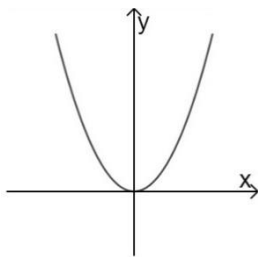
این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی‌برداری؛ به اشتراک‌گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

نمودار تابع قدرمطلق



هرگاه $x \geq 0$ ، آن‌گاه $|x| = x$ و تابع $y = |x|$ به خط مستقیم $y = x$ تبدیل می‌شود و هرگاه $x < 0$ ، آن‌گاه $|x| = -x$ و تابع $y = |x|$ به خط مستقیم $y = -x$ تبدیل می‌شود. بنابراین نمودار این تابع از دو قطعه از خطوط $y = x$ و $y = -x$ تشکیل می‌شود.

نمودار تابع درجه دوم



نمودار این تابع به نام سهمی، در شکل زیر رسم شده است.

تابع جزء صحیح

برای هر عدد حقیقی x ، عدد صحیح n وجود دارد به طوری که $n \leq x < n + 1$. در این صورت جزء صحیح عدد حقیقی x را برابر n تعریف می‌کنیم. جزء صحیح عدد x را که با نماد $[x]$ نشان می‌دهیم در واقع بزرگ‌ترین عدد صحیحی است که کوچک‌تر یا مساوی x است. به عنوان مثال:

$$[5.4] = 5 \text{ و } [-3.7] = -4 \text{ و } [-5] = -5$$

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی‌برداری؛ به اشتراک‌گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی‌برداری؛ به اشتراک‌گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و داندود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

تابعی که به هر عدد حقیقی x ، جزء صحیح x را نسبت دهد تابع جزء صحیح نامیده می‌شود. چون جزء صحیح برای هر عدد حقیقی تعریف شده است، دامنه‌ی این تابع مجموعه‌ی اعداد حقیقی و برد آن اعداد صحیح است.

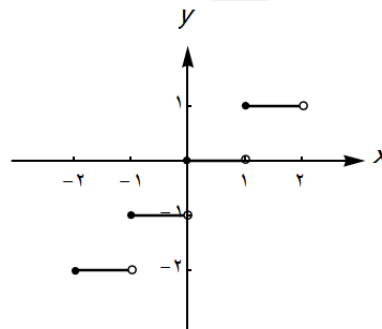
در شکل زیر نمودار تابع $y = [x]$ در بازه‌ی $[-2, 2]$ رسم شده است.

$$\begin{aligned} -2 \leq x < -1 &\Rightarrow y = [x] \\ &= -2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -1 \leq x < 0 &\Rightarrow y = [x] \\ &= -1 \end{aligned}$$

$$0 \leq x < 1 \Rightarrow y = [x] = 0$$

$$1 \leq x < 2 \Rightarrow y = [x] = 1$$



قضیه: (انتقال نمودار یک تابع)

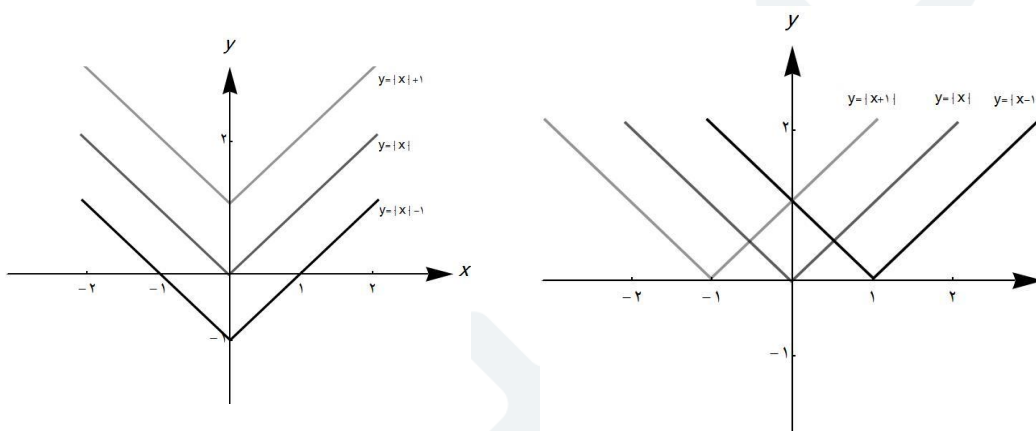
تابع $y = f(x)$ داده شده است. نمودار تابع $y = f(x - c)$ حاصل انتقال افقی نمودار $y = f(x)$ به اندازه $|c|$ واحد است، به راست اگر $c > 0$ و به چپ اگر $c < 0$.

به همین نحو، نمودار تابع $y = f(x) + c$ حاصل انتقال قائم به اندازه $|c|$ واحد است، به بالا اگر $c > 0$ و به پایین اگر $c < 0$.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی‌برداری؛ به اشتراک‌گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و داندود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

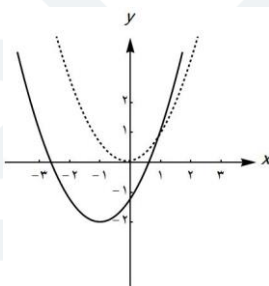
مثال: نمودار تابع $y = |x - 1|$ از انتقال نمودار تابع $y = |x|$ به اندازه یک واحد به راست و نمودار تابع $y = |x + 1|$ از انتقال نمودار $y = |x|$ به اندازه یک واحد به چپ به دست می‌آید. به همین نحو، نمودار $y = |x| + 1$ از انتقال نمودار $y = |x|$ به اندازه یک واحد به بالا و نمودار $y = |x| - 1$ از انتقال نمودار $y = |x|$ به پایین به دست می‌آید.



مثال: نمودار تابع $y = x^2 + 2x - 1$ را رسم کنید.

پاسخ: با کامل کردن مربع داریم:

$$y = x^2 + 2x - 1 = (x + 1)^2 - 2$$



نمودار این تابع از انتقال افقی به اندازه یک واحد به سمت چپ و دو واحد به سمت پایین نمودار $y = x^2$ به دست می‌آید.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی‌برداری؛ به اشتراک‌گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و داندود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

تابع وارون

هر تابع $y = f(x)$ دارای این خاصیت است که مقدار متغیر y به وسیله‌ی مقدار متغیر x معین می‌شود. بعضی از توابع این خاصیت اضافی را دارند که مقدار x نیز منحصرأ به وسیله‌ی y معین می‌شود. این توابع را یک به یک می‌نامند. به هر چنین تابع $y = f(x)$ می‌توان یک تابع معکوس $x = f^{-1}(y)$ را مربوط کرد که مقادیر y را به مقادیر x برمی‌گرداند.

در تابع یک به یک f و فقط در این مورد، می‌توان تابع دیگری تعریف کرد که با نماد f^{-1} نشان داده می‌شود به طوری که اگر $y = f(x)$ آن‌گاه $x = f^{-1}(y)$. به عنوان مثال، در تابع یک به یک $f = \{(1,2), (2,4), (3,5)\}$ داریم $f^{-1} = \{(2,1), (4,2), (5,3)\}$. مشاهده می‌شود که $f(1) = 2$ ، $f^{-1}(2) = 1$ و $f(2) = 4$ ، $f^{-1}(4) = 2$.

مثال: تابع $y = \frac{1+x}{1-x}$ ، $x \neq 1$ یک به یک است. معکوس آن را بیابید.

پاسخ: از $y = \frac{1+x}{1-x}$ معلوم می‌شود که $1 + x = y - xy$ یا معادل آن $x + xy = y - 1$. بنابراین $x = \frac{y-1}{y+1}$. واضح است که اگر $y = f(x)$ در این صورت $x = f^{-1}(y)$. بنابراین داریم $f^{-1}(y) = \frac{y-1}{y+1}$. پس می‌توان نوشت $f^{-1}(x) = \frac{x-1}{x+1}$.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی‌برداری؛ به اشتراک‌گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و داندود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و داندود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

پرسش های چهارگزینه ای فصل هفتم، تابع

۱. اگر $f(x) = \begin{cases} 3 + 2[-\frac{x}{3}] & x > 0 \\ 7 - \frac{[x^2-3]}{11} & x \leq 0 \end{cases}$ ، آن گاه مقدار $f(f(5))$ کدام است؟ $([])$ ، تابع جز صحیح است. (فراگیر دوم - ۹۴)

- (۱) $\frac{76}{11}$
- (۲) ۴
- (۳) ۷
- (۴) $\frac{71}{11}$

۲. طول قسمتی از منحنی $y = 1 + |3x - 1|$ در بازه $[0, 1]$ کدام است؟ (فراگیر هشتم و آموزش و پرورش - ۹۹)

- (۱) $5\sqrt{2}$
- (۲) $3\sqrt{10}$
- (۳) $\sqrt{10}$
- (۴) $3\sqrt{3}$

۳. منحنی تابع $y = x^2 + a$ دو واحد به سمت چپ محور x ها منتقل شده و خط $y = x - 1$ را در نقاطی با طول صحیح و منفی قطع می کند. بیشترین مقدار a کدام است؟ (فراگیر دوم - ۹۴)

- (۱) ۱
- (۲) -۲
- (۳) -۳
- (۴) -۱

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و داندود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی‌برداری؛ به اشتراک‌گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

۴. اگر $[a, b]$ برد تابع $y = x - \frac{1}{x} [4x]$ باشد، آن‌گاه حاصل $2 - b$ ، کدام است؟ $([])$ تابع جزء صحیح است. (فراگیر سوم - ۹۵)

- (۱) $\frac{2}{3}$
- (۲) $\frac{1}{3}$
- (۳) $\frac{5}{3}$
- (۴) $\frac{4}{3}$

۵. اگر رابطه $\{(1, 4), (m+n, 8), (2m-1, 4), (5, 8), (1, mn)\}$ یک تابع وارون‌پذیر باشد، مقدار n کدام است؟ (وزارت نیرو - ۹۶)

- (۱) ۴
- (۲) ۳
- (۳) ۵
- (۴) ۶

۶. دامنه و برد تابع $y = f(x)$ ، به ترتیب بازه‌های $[-2, 4]$ و $[-5, 3]$ است. برد تابع $g(x) = 1 - 2f(x+3)$ ، کدام است؟ (فراگیر چهارم و آموزش و پرورش - ۹۶)

- (۱) $[-11, 5]$
- (۲) $[-5, 5]$
- (۳) $[-5, 7]$
- (۴) $[1, 13]$

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی‌برداری؛ به اشتراک‌گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی‌برداری؛ به اشتراک‌گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

۷. اگر $f = \left\{ (1, -2), \left(-\frac{3}{4}, 7\right), (4, 11), (-1, 6) \right\}$ و $g = \{(-3, 8), (0, 2), (5, -2)\}$ ، آن‌گاه برد تابع $f\left(\frac{1}{4}g(x)\right)$ کدام است؟ (آموزش و پرورش - ۹۴)

(۱) $\{11, -2, 6\}$

(۲) $\{11, -2, 7\}$

(۳) $\{1, -1, 4\}$

(۴) $\{-1, 3, 4\}$

۸. اگر $f = \{(1, 2), (3, 4), (0, -1), (5, 6)\}$ و $g = \{(1, -1), (5, 0), (-2, -2)\}$ آن‌گاه مقدار $fog(5)$ کدام است؟ (تأمین اجتماعی - ۹۳ و ۹۴)

(۱) ۶

(۲) ۲

(۳) -۴

(۴) -۱

۹. اگر $[a, b]$ دامنه تابع $f(x) = x\sqrt{\frac{x-x^2+6}{x^2+1}}$ باشد، آن‌گاه مقدار $a + b$ چند برابر a است؟ (وزارت نیرو - ۹۶)

(۱) -۰.۵

(۲) ۰.۵

(۳) -۲

(۴) ۲

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی‌برداری؛ به اشتراک‌گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی‌برداری؛ به اشتراک‌گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

۱۰. اگر $x \leq 2$ $f(x) = \begin{cases} 3x - 1 \\ x^2 - 3x \end{cases}$ آن‌گاه حاصل $f(2 - x^2) + f(3 + x^2)$ کدام است؟
(فراگیر اول - ۹۴)

- (۱) $x^4 + 5$
- (۲) $3x^4 - 5$
- (۳) $3x^4 + 5x$
- (۴) $4x^4 - 3x + 5$

۱۱. برد تابع $y = \frac{1-2x}{2x^2-2x+2}$ کدام است؟ (دستگاه‌های اجرایی - فراگیر اول - ۹۴)

- (۱) $[-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$
- (۲) $[\frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}]$
- (۳) $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$
- (۴) $[\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}]$

۱۲. اگر در تابع $f = \{(1, -2), (3, 5), (7, 3a + 1)\}$ تساوی $f(1) + f(7) = f(3)$ برقرار باشد، آن‌گاه مقدار a کدام است؟ (فراگیر پنجم و آموزش و پرورش - ۹۷)

- (۱) ۲
- (۲) $\frac{4}{3}$
- (۳) $\frac{1}{3}$
- (۴) ۱

۱۳. معکوس تابع $f(x) = 3x + |x|$ به صورت $f^{-1}(x) = ax + b|x|$ است. مقدار $\frac{a}{b}$ کدام است؟
(فراگیر پنجم و آموزش و پرورش - ۹۷)

- (۱) ۳
- (۲) $\frac{1}{3}$
- (۳) -۳
- (۴) $-\frac{1}{3}$

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی‌برداری؛ به اشتراک‌گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی‌برداری؛ به اشتراک‌گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

۱۴. منحنی y به صورت $y = x^2 + x + 1$ است. اگر مبدأ مختصات را به نقطه A انتقال دهیم، آن‌گاه منحنی y در دستگاه جدید به صورت $y = x^2 + 5x + 8$ می‌شود. مختصات نقطه A کدام است؟ (فراگیر پنجم و آموزش و پرورش - ۹۷)

- (۱) $(-1, 2)$
- (۲) $(-2, 1)$
- (۳) $(1, -2)$
- (۴) $(2, -1)$

۱۵. اگر $f(-x) + (x+1)f(x) = x^2 + 4$ آن‌گاه مقدار $f(1)$ کدام است؟ (فراگیر پنجم و آموزش و پرورش - ۹۷)

- (۱) ۱۱
- (۲) ۱۳
- (۳) ۳
- (۴) ۵

۱۶. مبدأ مختصات را به نقطه $(2, 5)$ انتقال می‌دهیم، معادله منحنی y در دستگاه جدید به صورت $y = x^2$ در آمده است. معادله منحنی y قبل از انتقال مبدأ، کدام است؟ (فراگیر پنجم و آموزش و پرورش - ۹۷)

- (۱) $y = x^2 + 4x - 1$
- (۲) $y = x^2 - 4x$
- (۳) $y = x^2 + 1$
- (۴) $y = x^2 - 4x + 9$

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی‌برداری؛ به اشتراک‌گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی‌برداری؛ به اشتراک‌گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

۱۷. مجموعه برد تابع $f = \{(2, m^2 + n^2), (n, 3), (-1, 4), (2, 8), (-1, 2m)\}$ ، چند عضو دارد؟
(وزارت نیرو - ۹۷)

(۱) ۲

(۲) ۳

(۳) ۴

(۴) ۵

۱۸. اگر رابطه $f = \{(1, -a^2), (1, b), (-1, a - b), (-1, 2), (a, 2a)\}$ یک تابع باشد، آن گاه مقدار ab کدام است؟ (فراگیر هفتم، آموزش و پرورش و علوم پزشکی - ۹۸)

(۱) -۱

(۲) ۱

(۳) -۸

(۴) ۸

۱۹. نمودار تابع خطی $f(x)$ از نقاط $(0, -1)$ و $(1, 1)$ می‌گذرد. کدام نقطه، روی نمودار این تابع قرار دارد؟ (فراگیر هفتم، آموزش و پرورش و علوم پزشکی - ۹۸)

(۱) $(3, 2)$ (۲) $(4, 3)$ (۳) $(2, 3)$ (۴) $(3, 4)$

۲۰. اگر $f = \{(0, 1), (3, 3), (-2, 0), (4, -2), (1, 4), (-1, 2)\}$ ، آن گاه تابع $f \circ f$ کدام است؟
(فراگیر هفتم، آموزش و پرورش و علوم پزشکی - ۹۸)

(۱) $\{(0, 4), (-2, 1), (3, 3), (4, 0), (1, -2)\}$ (۲) $\{(0, -2), (-2, 1), (3, 3), (4, 0), (1, -2)\}$ (۳) $\{(0, -2), (-2, 1), (3, 3), (4, 0), (1, 2)\}$ (۴) $\{(0, 4), (-2, 1), (3, 0), (4, 1), (1, 2)\}$

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی‌برداری؛ به اشتراک‌گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی‌برداری؛ به اشتراک‌گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

۲۱. اگر $۲x + ۳a = ۶۰$ آن‌گاه، بیشترین مقدار تابع $y = ax + ۲۰۰$ کدام است؟
(فراگیر هشتم و آموزش و پرورش - ۹۹)

- (۱) ۱۵۰
- (۲) ۳۵۰
- (۳) ۲۵۰
- (۴) ۲۰۰

۲۲. چه تعداد از زیرمجموعه‌های رابطه $R = \{(۷, -۱), (۸, -۱), (۷, ۴)\}$ تابع هستند؟
(فراگیر هشتم و آموزش و پرورش - ۹۹)

- (۱) ۶
- (۲) ۳
- (۳) ۴
- (۴) ۵

۲۳. اگر $f(\sin x) + ۲f(\cos x) = ۳\sin^2 x$ ، ضابطه تابع $f(x)$ کدام است؟
(فراگیر هشتم و آموزش و پرورش - ۹۹)

- (۱) $۳ - ۲x^2$
- (۲) $۳x^2 - ۳$
- (۳) $۲ - ۳x^2$
- (۴) $۲x^2 - ۳$

۲۴. مقدار دو تابع $f(x) = x^2 - x$ و $f(x - ۱)$ در کدام نقطه با هم مساوی هستند؟
(فراگیر هشتم و آموزش و پرورش - ۹۹)

- (۱) ۱.۵
- (۲) -۱.۵
- (۳) -۱
- (۴) ۱

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی‌برداری؛ به اشتراک‌گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی‌برداری؛ به اشتراک‌گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و داندود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

۲۵. تابع $y = x^2$ ، دو واحد به سمت راست محور x ها منتقل شده است. اگر در بازه $[a, b]$ ، مقادیر تابع جدید، کمتر یا مساوی مقادیر تابع $y = \sqrt{2-x}$ باشد، آن‌گاه مقدار $a + b$ کدام است؟ (فراگیر هشتم و آموزش و پرورش - ۹۹)

-۲ (۱)

۳ (۲)

-۳ (۳)

۲ (۴)

۲۶. اگر $f(x) = \sqrt{\frac{2x^2+1}{x^2-3}}$ ، آن‌گاه $f(x) - 1 - \frac{6}{f(x)}$ به ازای چند مقدار، برابر صفر می‌شود؟ (فراگیر هشتم و آموزش و پرورش - ۹۹)

۲ (۱)

۳ (۲)

۴ (۳)

۱ (۴)

۲۷. اگر $f = \{(1,2), (2,3), (3,4), (4,5), (5,5)\}$ مقدار عبارت $f(2f(1))$ کدام است؟ (دانشگاه‌های علوم پزشکی و وزارت بهداشت - ۹۹)

۲ (۱)

۳ (۲)

۴ (۳)

۵ (۴)

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی‌برداری؛ به اشتراک‌گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و داندود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی‌برداری؛ به اشتراک‌گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

۲۸. اگر در تابع خطی f ، $f(-1) = 2$ و $f(2) = -4$ ، آن گاه شیب خط کدام است؟
(دانشگاه‌های علوم پزشکی و وزارت بهداشت - ۹۹)

- (۱) ۲
- (۲) ۱
- (۳) -۱
- (۴) -۲

۲۹. اگر $f = \{(0,1), (-1,0), (1,2), (2,-2), (3,3), (4,1)\}$ و $g = \{(2,2), (-2,1), (1,1), (0,0), (-1,-2)\}$ ، آن گاه مقدار $f(g(-2)) + f(f(3))$ کدام است؟
(دانشگاه‌های علوم پزشکی و وزارت بهداشت - ۹۹)

- (۱) ۲
- (۲) ۱
- (۳) ۵
- (۴) ۳

۳۰. نمودار تابع $|x| + |y| = 4$ ، نمایش کدام شکل هندسی است؟
(دانشگاه‌های علوم پزشکی و وزارت بهداشت - ۹۹)

- (۱) لوزی
- (۲) مربع
- (۳) متوازی الاضلاع
- (۴) مستطیل

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی‌برداری؛ به اشتراک‌گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی‌برداری؛ به اشتراک‌گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و داندود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

۳۱. اگر $f(x) = x + \frac{2}{x}$ ، آن‌گاه مقدار $f(1 + \sqrt{2}) + f(1 - \sqrt{2})$ کدام است؟

(دانشگاه‌های علوم پزشکی - ۹۹)

(۱) ۲-

(۲) ۱-

(۳) ۱

(۴) ۲

۳۲. اگر $f(x) = 2x + 3$ و $g(x) = x - 4$ ، آن‌گاه مقدار $\frac{f(g(2))}{g(f(-1))}$ کدام است؟

(دانشگاه‌های علوم پزشکی - ۹۹)

(۱) $-\frac{7}{3}$

(۲) $-\frac{3}{5}$

(۳) $\frac{1}{3}$

(۴) ۳

۳۳. دامنه تابع $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{|x|-1}$ کدام است؟ (دانشگاه‌های علوم پزشکی - ۹۹)

(۱) R

(۲) $[0, \infty) - \{1\}$

(۳) $R - \{\pm 1\}$

(۴) $(-1, 1)$

۳۴. توابع $f = \{(-1, 4), (2, 0), (-3, \frac{3}{4})\}$ و $g = \{(0, \frac{3}{4}), (2, -1), (-1, 1)\}$ مفروض اند. تابع

$f + g$ کدام است؟ (دانشگاه‌های علوم پزشکی - ۹۹)

(۱) $\{(-1, 5), (2, -1), (-3, \frac{3}{4})\}$

(۲) $\{(-1, 5), (2, -1), (0, \frac{3}{4})\}$

(۳) $\{(-2, 5), (2, -1)\}$

(۴) $\{(-1, 5), (2, -1)\}$

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی‌برداری؛ به اشتراک‌گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و داندود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی‌برداری؛ به اشتراک‌گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و داندود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

۳۵. اگر $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x-1} & x \geq 1 \\ x^2 - x & x < 1 \end{cases}$ ، آن گاه مقدار $f(f(\frac{5}{4}))$ کدام است؟
(دانشگاه‌های علوم پزشکی - ۹۹)

- (۱) $\frac{-3}{4}$
- (۲) $\frac{-1}{4}$
- (۳) $\frac{1}{4}$
- (۴) $\frac{3}{4}$

۳۶. به ازای کدام مقدار m رابطه $\{(1,4), (2,1), (5,3), (2,m^2), (m,3)\}$ تابع است؟
(دانشگاه‌های علوم پزشکی - ۹۹)

- (۱) -۱
- (۲) ۱
- (۳) ۲
- (۴) ۵

۳۷. دامنه تابع $y = \sqrt{x+4}$ کدام است؟ (دانشگاه‌های علوم پزشکی - ۹۹)

- (۱) $x \geq 4$
- (۲) $x \leq 4$
- (۳) $x \geq -4$
- (۴) $x \leq -4$

۳۸. دامنه تابع $y = \frac{x}{x^2-2x+1}$ کدام است؟ (راه آهن - ۹۴)

- (۱) $x \in R$
- (۲) $x \in R - \{1\}$
- (۳) $x \in R - \{0\}$
- (۴) $x \in Z - \{1\}$

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی‌برداری؛ به اشتراک‌گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و داندود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی‌برداری؛ به اشتراک‌گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

۳۹. فرض کنید $y = 4 + \sqrt{2x}$ دامنه (D) و برد (R) تابع کدام است؟ (شهرداری‌ها - ۹۰)

(۱) $R = [0, \infty), D = R$

(۲) $R = [4, \infty), D = [0, \infty)$

(۳) $R = [0, \infty), D = [0, \infty)$

(۴) $R = [4, \infty), D = [0, \infty)$

۴۰. اگر $f\left(\frac{x+1}{5}\right) = 3x - 2$ ، آن‌گاه مقدار $f(2)$ کدام است؟ (شهرداری‌ها - ۹۱)

(۱) ۴

(۲) ۲۵

(۳) ۱۶

(۴) ۳۱

۴۱. دامنه تابع $y = \sqrt{x-7}$ کدام است؟ (دستگاه‌های اجرایی - فراگیر ششم - ۹۷)

(۱) $[7, +\infty)$

(۲) $(7, +\infty)$

(۳) $(-\infty, 7]$

(۴) $(-\infty, 7)$

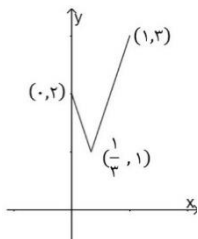
این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی‌برداری؛ به اشتراک‌گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی‌برداری؛ به اشتراک‌گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و داندود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

پاسخ پرسش‌های چهارگزینه‌ای فصل هفتم، تابع

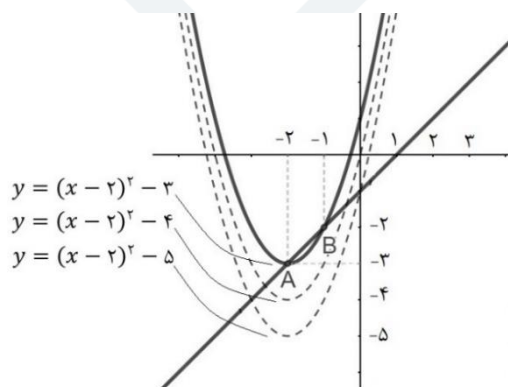
۱. گزینه ۲. $f(2f(5)) = f(2 \times (-3)) = f(-6) = 4$

۲. گزینه ۳. در شکل زیر نمودار این تابع در بازه $[0, 1]$ رسم شده است. طول قسمتی از این منحنی در این بازه برابر است با:



$$\begin{aligned} \sqrt{(0 - \frac{1}{3})^2 + (2 - 1)^2} + \sqrt{(1 - \frac{1}{3})^2 + (2 - 1)^2} &= \sqrt{\frac{1}{9} + 1} + \sqrt{\frac{4}{9} + 1} \\ &= \frac{\sqrt{10}}{3} + \frac{\sqrt{10}}{3} = \sqrt{10} \end{aligned}$$

۳. گزینه ۳. منحنی تابع $y = x^2 + a$ را دو واحد به سمت چپ محور x ها منتقل می‌کنیم و معادله آن به صورت $y = (x - 2)^2 + a$ می‌شود.



با توجه به شکل، بیشترین مقدار a ، عدد ۳- است.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی‌برداری؛ به اشتراک‌گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و داندود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

۴. گزینه ۲. با توجه به تعریف تابع جزء صحیح می دانیم $1 + [x] < x \leq [x] + 1$ ، که نتیجه می دهد $0 \leq x - [x] < 1$ ، اگر به جای x قرار دهیم $4x$ ، آن گاه این نامعادله به صورت $0 \leq 4x - [4x] < 1$ تبدیل می شود بنابراین:

$$y = x - \frac{1}{4}[4x] = \frac{1}{4}(4x - [4x]) \Rightarrow 0 \leq y < \frac{1}{4}$$

برد تابع داده شده به صورت $[a, b) = [0, \frac{1}{4})$ است و داریم:

$$2 - b = 2 - \frac{1}{4} = \frac{7}{4}$$

۵. گزینه ۱. با توجه به این که تابع داده شده وارون پذیر است نتیجه می شود وارون آن نیز تابع است بنابراین شرط تابع بودن وارون آن را بررسی می کنیم.
 $f^{-1} = \{(4, 1), (8, m+n), (4, 2m-1), (8, 5), (mn, 1)\}$

لازم است $1 = 2m - 1$ و $5 = m + n$ ، که مقادیر $m = 1$ و $n = 4$ به دست می آید.

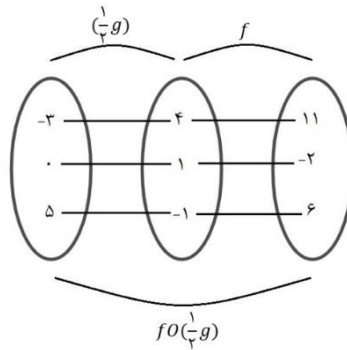
۶. گزینه ۱.

$$-5 \leq f(x+3) \leq 3 \Rightarrow -10 \leq 2f(x+3) \leq 6 \Rightarrow -11 \leq 2f(x+3) - 1 \leq 5 \Rightarrow -11 \leq g(x) \leq 5$$

۷. گزینه ۱. با توجه به نمودار تابع $f \circ (\frac{1}{p}g)$ ، نتیجه می شود برد آن مجموعه $\{11, -2, 6\}$ است.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.



۸. گزینه ۴. $f \circ g(5) = f(g(5)) = f(0) = -1$

۹. گزینه ۱.

$$\frac{x - x^2 + 6}{x^2 + 1} \geq 0 \Rightarrow x - x^2 + 6 \geq 0 \Rightarrow x^2 - x - 6 \leq 0 \Rightarrow (x + 2)(x - 3) \leq 0$$

از حل نامعادله $(x + 2)(x - 3) \leq 0$ نتیجه می شود $-2 \leq x \leq 3$ بنابراین، $a = -2$ و $b = 3$.
بنابراین:

$$\frac{a + b}{a} = \frac{-1}{2}$$

۱۰. گزینه ۱.

$$f(2 - x^2) + f(3 + x^2) = 3(2 - x^2) - 1 + (3 + x^2)^2 - 3(3 + x^2) = x^4 + 5$$

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و داندود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

۱۱. گزینه ۲.

$$y = \frac{1 - 2x}{2x^2 - 2x + 2} \Rightarrow 2yx^2 - 2yx + 2y = 1 - 2x \Rightarrow 2yx^2 + (2 - 2y)x + (2y - 1) = 0$$

معادله درجه دوم فوق بر حسب متغیر x است و ضرایب آن عباراتی بر حسب y . محدوده y (برد تابع)، به صورتی است که این معادله دارای جواب باشد و شرط آن این است که در این معادله درجه دوم $\Delta \geq 0$.

$$\Delta = (2 - 2y)^2 - 4 \times 2y(2y - 1) = -12y^2 + 4 \geq 0 \Rightarrow y^2 \leq \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{-1}{\sqrt{3}} \leq y \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$$

۱۲. گزینه ۲.

$$f(1) + f(7) = f(3) \Rightarrow -2 + (3a + 1) = 5 \Rightarrow a = 2$$

۱۳. گزینه ۳.

با فرض $x = 1$ و $x = -1$ نتیجه می شود $f(1) = 4$ و $f(-1) = -2$ ، بنابراین $f^{-1}(4) = 1$ و $f^{-1}(-2) = -1$. با توجه به $f^{-1}(x) = ax + b|x|$ داریم:

$$f^{-1}(4) = 1 \Rightarrow 4a + 4b = 1$$

$$f^{-1}(-2) = -1 \Rightarrow -2a + 2b = -1$$

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و داندود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

از حل دستگاه دو معادله دو مجهولی به دست آمده مقادیر $a = \frac{3}{8}$ و $b = \frac{-1}{8}$ به دست می آیند
بنابراین $\frac{a}{b} = -3$.

۱۴. گزینه ۴. اگر مبدأ مختصات در دستگاه مختصات دو بعدی x, y را به نقطه با مختصات (α, β) انتقال دهیم و دستگاه مختصات جدید x', y' را که محورهای آن به موازات محورهای دستگاه قبلی است و مبدأ آن نقطه با مختصات (α, β) است به دست آید، آن گاه هر نقطه در صفحه دارای دو مختصات یکی در دستگاه x, y و یکی در دستگاه x', y' است. ارتباط این دو مختصات به صورت زیر است:

$$\begin{cases} x = x' + \alpha \\ y = y' + \beta \end{cases} \text{ یا } \begin{cases} x' = x - \alpha \\ y' = y - \beta \end{cases}$$

فرض کنیم $A = (\alpha, \beta)$ ، پس از انتقال مبدأ مختصات به نقطه A و تشکیل دستگاه مختصات جدید، ارتباط دو دستگاه به صورت زیر است:

$$\begin{cases} x = x' + \alpha \\ y = y' + \beta \end{cases}$$

با جانشانی در معادله $y = x^2 + x + 1$ و مقایسه با معادله جدید، α و β به دست می آیند.

$$y = x^2 + x + 1 \Rightarrow y' + \beta = (x' + \alpha)^2 + (x' + \alpha) + 1$$

این معادله، همان معادله $y' = x'^2 + 5x' + 8$ است.

$$y' + \beta = (x' + \alpha)^2 + (x' + \alpha) + 1 \Rightarrow y' = x'^2 + (2\alpha + 1)x' + (\alpha^2 + \alpha - \beta + 1)$$

بنابراین $2\alpha + 1 = 5$ که نتیجه می دهد $\alpha = 2$ و داریم:

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی‌برداری؛ به اشتراک‌گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و داندود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

$$\alpha^2 + \alpha - \beta + 1 = 8 \Rightarrow 2^2 + 2 - \beta + 1 = 8 \Rightarrow \beta = -1$$

در آخر نتیجه می‌شود:

$$A = (\alpha, \beta) = (2, -1)$$

ممکن است در حل این مسأله به روش‌های دیگر مثلاً تعیین رأس سهمی‌ها، به اشتباه به جواب $A = (-2, 1)$ برسید، اگر دچار این خطا شدید، دوباره به روش خود فکر کنید!

۱۵. گزینه ۴. با جانشانی $x = -1$ در معادله داده شده، داریم:

$$f(1) + 0 \times f(-1) = (-1)^2 + 4 \Rightarrow f(1) = 5$$

۱۶. گزینه ۴. اگر مبدأ مختصات در دستگاه مختصات دو بعدی x, y را به نقطه با مختصات $(2, 5)$ انتقال دهیم و دستگاه مختصات جدید x', y' به دست آید، آنگاه ارتباط این دو مختصات به صورت زیر است:

$$\begin{cases} x = x' + 2 \\ y = y' + 5 \end{cases} \quad \text{یا} \quad \begin{cases} x' = x - 2 \\ y' = y - 5 \end{cases}$$

معادله جدید به صورت $y' = x'^2$ است. با جانشانی در این معادله داریم:

$$y' = x'^2 \Rightarrow y - 5 = (x - 2)^2 \Rightarrow y = x^2 - 4x + 9$$

۱۷. گزینه ۲. از این که f تابع است، $f(2) = m^2 + n^2 = 8$ و $f(-1) = 2m = 4$ ، نتیجه می‌شود $m = 2$ و $2^2 + n^2 = 8$ که نتیجه می‌دهد $n = \pm 2$.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی‌برداری؛ به اشتراک‌گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و داندود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

$n = 2$ قابل قبول نیست زیرا در این صورت هر دو زوج مرتب $(2, 3)$ و $(2, 8)$ عضو تابع f اند. که متناقض با تابع بودن f است. پس $n = -2$ و تابع f به صورت زیر بازنویسی می شود:

$$f = \{(2, m^2 + n^2), (n, 3), (-1, 4), (2, 8), (-1, 2m)\} = \{(2, 8), (-2, 3), (-1, 4)\}$$

بنابراین برد تابع f دارای سه عضو است.

$$R_f = \{8, 3, 4\}$$

۱۸. گزینه ۴. از این که f تابع است، $f(1) = -a^2 = b$ و $f(-1) = a - b = 2$ ، بنابراین داریم:

$$a - b = 2 \Rightarrow a - (-a^2) = 2 \Rightarrow a^2 + a - 2 = 0 \Rightarrow a = 1 \text{ یا } a = -2$$

اگر $a = 1$ آن گاه $b = -1$ و تابع f به صورت زیر بازنویسی می شود:

$$f = \{(1, -1), (-1, 2), (1, 2)\}$$

که ممکن نیست زیرا در این صورت f تابع نیست. بنابراین این حالت ممکن نیست.

اگر $a = -2$ آن گاه $b = -4$ و تابع f به صورت زیر بازنویسی می شود:

$$f = \{(1, -4), (-1, 2), (-2, -4)\}$$

$a = -2$ و $b = -4$ قابل قبول اند بنابراین $ab = 8$.

۱۹. گزینه ۳. معادله خط گذرنده از نقاط $(0, 1)$ و $(1, 1)$ را به دست می آوریم:

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

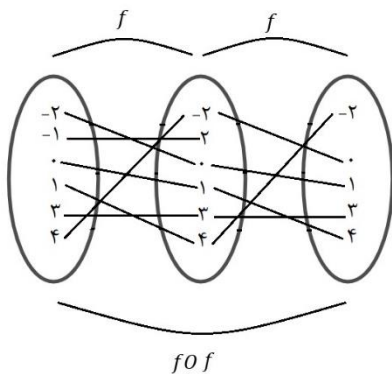
این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی‌برداری؛ به اشتراک‌گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و داندود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

$$y - (-1) = \frac{1 - (-1)}{1 - 0}(x - 0) \Rightarrow y = 2x - 1 \Rightarrow f(x) = 2x - 1$$

از این که $f(2) = 3$ نتیجه می‌شود نقطه $(2, 3)$ روی نمودار این تابع قرار دارد.

۲۰. گزینه ۱

با توجه به نمودار داریم:



$$f \circ f = \{(0, 4), (-2, 1), (3, 3), (4, 0), (1, -2)\}$$

۲۱. گزینه ۲. از $2x + 3a = 60$ نتیجه می‌شود $a = 20 - \frac{2}{3}x$ ، با جانشانی a در ضابطه $y = ax + 200$ نتیجه می‌گیریم:

$$y = \left(20 - \frac{2}{3}x\right)x + 200 = -\frac{2}{3}x^2 + 20x + 200$$

بیشترین مقدار تابع $f(x) = ax^2 + bx + c$ برابر است با $\frac{-\Delta}{4a}$ که در این جا این بیشترین مقدار برابر است با:

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی‌برداری؛ به اشتراک‌گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و داندود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی‌برداری؛ به اشتراک‌گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

$$\frac{-\Delta}{4a} = \frac{-(b^2 - 4ac)}{4a} = \frac{-(20^2 - 4 \times \frac{-2}{3} \times 200)}{4 \times \frac{-2}{3}} = 350$$

۲۲. گزینه ۱. زیر مجموعه‌هایی از رابطه R ، تابع اند که از دو زوج $(7, 4)$ و $(7, -1)$ حداکثر یکی را داشته باشد. متمم این مسأله، شمارش تعداد زیرمجموعه‌هایی از R است که شامل هر دو زوج نامبرده اند. بنابراین جواب برابر است با:

$$2^3 - 2 = 8 - 2 = 6$$

۲۳. گزینه ۳. با فرض $t = \sin x$ نتیجه می‌شود $\cos x = \sqrt{1 - t^2}$ و داریم:

$$f(\sin x) + 2f(\cos x) = 3\sin^2 x \Rightarrow f(t) + 2f(\sqrt{1 - t^2}) = 3t^2$$

اکنون اگر به جای t قرار دهیم $\sqrt{1 - t^2}$ داریم:

$$f(\sqrt{1 - t^2}) + 2f(\sqrt{1 - \sqrt{1 - t^2}^2}) = 3\sqrt{1 - t^2}^2 \Rightarrow f(\sqrt{1 - t^2}) + 2f(t) = 3 - 3t^2$$

به این ترتیب دستگاه زیر به دست آمده است، در ادامه معادله دوم را در عدد ۲ ضرب می‌کنیم،

$$\begin{cases} f(t) + 2f(\sqrt{1 - t^2}) = 3t^2 \\ 2f(t) + f(\sqrt{1 - t^2}) = 3 - 3t^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(t) + 2f(\sqrt{1 - t^2}) = 3t^2 \\ -4f(t) - 2f(\sqrt{1 - t^2}) = -6 + 6t^2 \end{cases}$$

دو معادله آخر را با هم جمع می‌کنیم و داریم:

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی‌برداری؛ به اشتراک‌گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

$$-3f(t) = 9t^2 - 6 \Rightarrow f(t) = -3t^2 + 2$$

با جانشانی x به جای t ، ضابطه $f(x)$ به دست می آید:

$$f(x) = -3x^2 + 2$$

روش دیگری که برای حل این تست می توان به کار برد این است که با فرض $x = \frac{\pi}{4}$ نتیجه می شود:

$$\begin{aligned} f\left(\sin \frac{\pi}{4}\right) + 2f\left(\cos \frac{\pi}{4}\right) &= 3\sin^2 \frac{\pi}{4} \Rightarrow f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 2f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{3}{2} \Rightarrow 3f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{3}{2} \\ \Rightarrow f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

در بین چهار گزینه داده شده، $f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{1}{2}$ فقط در گزینه سوم اتفاق می افتد و سایر گزینه ها رد می شوند.

۲۴. گزینه ۴.

$f(x) = x^2 - x$ و $f(x-1) = (x-1)^2 - (x-1)$ ، معادله $f(x-1) = f(x)$ را حل می کنیم:

$$(x-1)^2 - (x-1) = x^2 - x \Rightarrow x^2 - 2x + 1 - x + 1 = x^2 - x \Rightarrow x = 1$$

۲۵. گزینه ۲. اگر منحنی تابع $y = x^2$ را دو واحد به سمت راست محور x ها منتقل کنیم آن گاه معادله آن به صورت $y = (x-2)^2$ تبدیل می شود. نامعادله $(x-2)^2 \leq \sqrt{2-x}$ را حل می کنیم:

$$(x-2)^2 \leq \sqrt{2-x} \Rightarrow (2-x)^2 \leq \sqrt{2-x} \Rightarrow \sqrt{2-x}^4 \leq \sqrt{2-x}$$

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

عبارت $\sqrt{2-x}$ ، نامنفی است پس هنگام تقسیم طرفین نامعادله فوق بر $\sqrt{2-x}$ ، جهت نامعادله تغییر نمی‌کند.

$$\sqrt{2-x}^3 \leq 1 \Rightarrow \sqrt{2-x} \leq 1 \Rightarrow 2-x \leq 1 \Rightarrow 1 \leq x$$

ضمناً عبارت $\sqrt{2-x}$ وقتی معنی دارد که $2-x \geq 0$ پس $x \leq 2$ ، که نتیجه می‌دهد در بازه $[1, 2]$ ، مقادیر تابع $y = (x-2)^2$ ، کمتر یا مساوی از مقادیر تابع $y = \sqrt{2-x}$ است. بنابراین $a+b=3$.

۲۶. گزینه ۱.

$$f(x) - 1 - \frac{6}{f(x)} = 0 \Rightarrow f(x)^2 - f(x) - 6 = 0$$

$$\Rightarrow (f(x) - 3)(f(x) + 2) = 0$$

$$\Rightarrow f(x) = 3 \text{ یا } f(x) = -2$$

از این که $f(x) = \sqrt{\frac{2x^2+1}{x^2-3}} \geq 0$ نتیجه می‌شود $f(x) = -2$ قابل قبول نیست. اکنون معادله $f(x) = 3$ را حل می‌کنیم:

$$f(x) = 3 \Rightarrow \sqrt{\frac{2x^2+1}{x^2-3}} = 3 \Rightarrow \frac{2x^2+1}{x^2-3} = 9 \Rightarrow 2x^2+1 = 9x^2-27 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$$

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

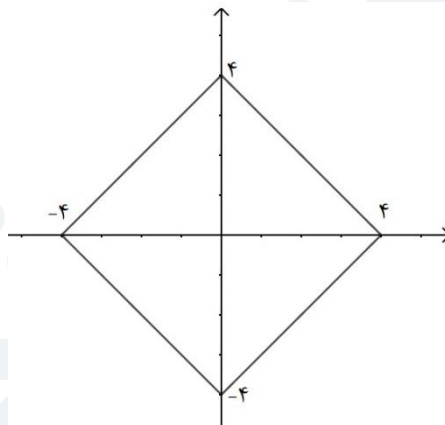
هر دو جواب به دست آمده قابل قبول اند.

$$f(2f(1)) = f(2 \times 2) = f(4) = 5 \quad \text{گزینه ۴. ۲۷}$$

$$m = \frac{f(2) - f(-1)}{2 - (-1)} = \frac{-4 - 2}{3} = -2 \quad \text{گزینه ۴. ۲۸}$$

$$f(g(-2)) + f(f(3)) = f(1) + f(3) = 2 + 3 = 5 \quad \text{گزینه ۳. ۲۹}$$

۳۰. گزینه ۱. نمودار این تابع به صورت زیر است.



$$f(1 + \sqrt{2}) + f(1 - \sqrt{2}) = 1 + \sqrt{2} + \frac{2}{1 + \sqrt{2}} + 1 - \sqrt{2} + \frac{2}{1 - \sqrt{2}} = -2 \quad \text{گزینه ۱. ۳۱}$$

۳۲. گزینه ۳.

$$\frac{f(g(2))}{g(f(-1))} = \frac{f(-2)}{g(1)} = \frac{-1}{-3} = \frac{1}{3}$$

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

۳۳. گزینه ۲.

۳۴. گزینه ۴. دامنه تابع $f + g$ ، اشتراک دامنه توابع f و g است.

$$D_{f+g} = D_f \cap D_g = \{-1, 2, -3\} \cap \{0, 2, -1\} = \{-1, 2\}$$

همچنین:

$$(f + g)(-1) = f(-1) + g(-1) = 4 + 1 = 5$$

$$(f + g)(2) = f(2) + g(2) = 0 - 1 = -1$$

بنابراین:

$$f + g = \{(-1, 5), (2, -1)\}$$

۳۵. گزینه ۲.

$$f\left(f\left(\frac{5}{4}\right)\right) = f\left(\sqrt{\frac{5}{4}} - 1\right) = f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}$$

۳۶. گزینه ۱. فرض کنیم $f = \{(1, 4), (2, 1), (5, 3), (2, m^2), (m, 3)\}$ تابع باشد، $f(2) = m^2$ ،
۱، بنابراین $m = \pm 1$

اگر $m = 1$ آن گاه تابع f به صورت $f = \{(1, 4), (2, 1), (5, 3), (1, 3)\}$ بازنویسی می شود که ممکن نیست زیرا در این صورت f تابع نیست. بنابراین این حالت ممکن نیست.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

اگر $m = -1$ آن گاه f به صورت $f = \{(1, 4), (2, 1), (5, 3), (-1, 3)\}$ بازنویسی می شود که نشان می دهد $m = -1$ قابل قبول است.

$$x + 4 \geq 0 \Rightarrow x \geq -4 \quad \text{۳۷. گزینه ۳.}$$

$$D = R - \{1\} \quad \text{۳۸. گزینه ۲. ریشه مخرج تابع داده شده } x = 1 \text{ است. بنابراین:}$$

۳۹. گزینه ۲. برای تعیین دامنه لازم است $2x \geq 0$ بنابراین $x \geq 0$ و $D = [0, \infty)$. برای تعیین برد با توجه به این که $\sqrt{2x} \geq 0$ نتیجه می شود $y = 4 + \sqrt{2x} \geq 4$ پس داریم $R = [4, \infty)$.

۴۰. گزینه ۲. با فرض $x = 9$ داریم:

$$f\left(\frac{9+1}{5}\right) = 3 \times 9 - 2 = 25 \Rightarrow f(2) = 25$$

$$x - 7 \geq 0 \Rightarrow x \geq 0 \quad \text{۴۱. گزینه ۱.}$$

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی‌برداری؛ به اشتراک‌گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و داندود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

فصل هشتم، آنالیز ترکیبی

بخش اول: اصول

اصل ضرب

اگر انجام کاری شامل چند مرحله مجزا مانند $A_1, A_2, \dots, A_k$ باشد و مرحله A_1 به n_1 طریق، مرحله A_2 به n_2 طریق، ... و مرحله A_k به n_k طریق قابل اجرا باشند در این صورت کار به $n_1 \times n_2 \times \dots \times n_k$ طریق، قابل انجام است.

مثال:

۱. چند کلمه سه حرفی با حروف a, b, c, d و e می‌توان نوشت؟

پاسخ: ساخت یک کلمه سه حرفی با این حروف، سه مرحله کار دارد، در هر مرحله برای تعیین حرف مورد نظر ۵ حرف وجود دارد، بنابر اصل ضرب این کار به $5 \times 5 \times 5 = 125$ طریق قابل انجام است.

۲. در چند کلمه حروف مجاور متمایزند؟

پاسخ: مرحله اول به ۵ طریق اجرا می‌شود، حرفی که در مرحله دوم استفاده می‌شود باید با حرف مرحله اول، متفاوت باشد و به ۴ طریق اجرا می‌شود در مرحله آخر، حرفی که استفاده می‌شود باید با حرفی که در مرحله دوم استفاده شده متفاوت باشد (این حرف می‌تواند همان حرفی باشد که در مرحله اول تعیین شده است). بنابراین تعیین حرف مرحله سوم به ۴ طریق ممکن است. بنابر اصل ضرب این کار به $5 \times 4 \times 4 = 80$ طریق قابل انجام است.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی‌برداری؛ به اشتراک‌گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و داندود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی‌برداری؛ به اشتراک‌گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و داندود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

۳. در چند کلمه هر سه حرف متمایزند؟

پاسخ: مرحله اول به ۵ طریق اجرا می‌شود، مرحله دوم به ۴ طریق و مرحله سوم به ۳ طریق اجرا می‌شود، بنابر اصل ضرب این کار به $60 = 5 \times 4 \times 3$ طریق قابل انجام است.

اصل جمع

اگر همه شیوه‌های انجام کاری، $A_1, A_2, \dots, A_k$ باشند به نحوی که هریک از این شیوه‌ها به تنهایی بتواند کار را به انجام برساند و شیوه A_1 به n_1 طریق، ... و A_k به n_k طریق قابل اجرا باشند در این صورت کار به $n_1 + n_2 + \dots + n_k$ طریق قابل انجام است.

مثال: چند عدد سه رقمی زوج با ارقام متمایز وجود دارد؟

پاسخ: حالت اول این که رقم یکان عدد مورد نظر صفر باشد، در این حالت رقم صدگان به ۹ طریق و رقم دهگان به ۸ طریق، تعیین می‌شود، این حالت به $72 = 9 \times 8 \times 1$ طریق ممکن است.

حالت دوم این که رقم یکان عددی زوج و مخالف صفر باشد که ۴ طریق ممکن دارد، رقم صدگان به غیر از صفر باید با عددی که در یکان نشسته، متفاوت باشد بنابراین برای تعیین رقم صدگان ۸ طریق ممکن است و تعیین رقم یکان نیز به ۸ طریق است زیرا از بین ۱۰ رقم باید با رقم یکان و صدگان متفاوت باشد. بنابر اصل ضرب این حالت به $256 = 8 \times 8 \times 4$ طریق ممکن است.

اکنون طبق اصل جمع نتیجه می‌شود $72 + 256 = 328$ عدد سه رقمی زوج با ارقام متمایز وجود دارد.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی‌برداری؛ به اشتراک‌گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و داندود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی‌برداری؛ به اشتراک‌گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و داندود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

اصل متمم

در برخی از مسائل، شمردن حالت‌های نامطلوب از شمردن حالت‌های مطلوب ساده‌تر است. در این موارد راحت‌تر است که از اصل متمم استفاده شود. فرض کنید A زیرمجموعه‌ای از مجموعه متناهی S باشد. در این صورت تعداد اعضای S که در A قرار ندارند $n(S) - n(A)$ است.

مثال: در چند عدد ۴ رقمی، رقم ۵ وجود دارد؟

تعداد اعداد ۴ رقمی $9 \times 10^3 = 9000$ است و از این تعداد در $8 \times 9^3 = 5832$ تا عدد ۴ رقمی رقم ۵ وجود ندارد بنابراین در $9000 - 5832 = 3168$ عدد ۴ رقمی، رقم ۵ وجود دارد.

اصل شمول و عدم شمول

اصل شمول و عدم شمول برای دو مجموعه متناهی A و B به صورت زیر است:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

برای سه مجموعه متناهی A ، B و C ، اصل شمول و عدم شمول به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\begin{aligned} n(A \cup B \cup C) \\ = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C) \end{aligned}$$

فاکتوریل‌ها

در بسیاری از وضعیت‌ها برای حاصل‌ضرب‌هایی مانند $1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7$ و $1 \times 2 \times 3 \times 4$ که هر کدام از آن‌ها حاصل‌ضرب دنباله‌ای از اعداد صحیح متوالی بوده و تمام آن‌ها

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی‌برداری؛ به اشتراک‌گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و داندود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

به یک ختم می‌شوند، داشتن نماد ساده‌ای مفید است. چنین حاصل ضرب‌هایی فاکتوریل نامیده می‌شوند. در حالت کلی n فاکتوریل را که با نماد $n!$ نمایش می‌دهیم به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$n! = n \times (n - 1) \times (n - 2) \times \dots \times 2 \times 1$$

همچنین صفر فاکتوریل را برابر ۱ تعریف می‌کنیم، ممکن است این تعریف عجیب به نظر آید ولی تعریف مفیدی است.

جایگشت

هر یک از حالت‌هایی که بتوان n شیء متمایز را کنار هم در یک ردیف خطی قرار داد یک جایگشت از آن n شیء نامیده می‌شود. بنابر اصل ضرب تعداد جایگشت‌های n شیء متمایز برابر است با:

$$n \times (n - 1) \times (n - 2) \times \dots \times 2 \times 1 = n!$$

مثال: چند جایگشت از حروف کلمه *table* وجود دارد؟

پاسخ: تعداد جایگشت‌های ۵ حرف متمایز برابر با $5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$ است.

جایگشت‌های r تایی از n شیء: $P(n, r)$

فرض کنیم n حرف متمایز داشته باشیم و بخواهیم تعداد جایگشت‌های r حرفی از این n حرف را بیابیم، بنا بر اصل ضرب این تعداد برابر است با:

$$n \times (n - 1) \times (n - 2) \times \dots \times (n - r + 1)$$

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی‌برداری؛ به اشتراک‌گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و داندود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

و می‌توان آن را به صورت $\frac{n!}{(n-r)!}$ نوشت. این عدد را با نماد $P(n, r)$ نمایش می‌دهیم. بنابراین تعداد جایگشت‌های r تایی از n شیء متمایز برابر است با:

$$P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

مثال: چند جایگشت ۶ حرفی از حروف کلمه *logarithm* وجود دارد؟

پاسخ: کلمه *logarithm* دارای ۹ حرف است و تعداد جایگشت‌های ۶ حرفی از این ۹ حرف متمایز، برابر است با:

$$P(9, 6) = \frac{9!}{(9-6)!} = \frac{9!}{3!}$$

جایگشت‌های با تکرار

اگر n شیء، شامل n_1 تا از نوع اول، n_2 تا از نوع دوم، ... و n_k تا از نوع k ام موجود باشد و $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$ ، آن‌گاه $\frac{n!}{n_1! \times n_2! \times \dots \times n_k!}$ جایگشت برای n شیء مفروض وجود دارد.

مثال: چند جایگشت از حروف کلمه *mississippi* وجود دارد؟

تعداد حروف ۱۱ تا که در آن ۲ تا p ، ۴ تا s و ۴ تا i است، بنابراین تعداد جایگشت‌های حروف کلمه *mississippi* برابر است با:

$$\frac{11!}{2! \times 4! \times 4!}$$

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی‌برداری؛ به اشتراک‌گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و داندود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی‌برداری؛ به اشتراک‌گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و داندود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

ترکیب $\binom{n}{r}$

در حالی که یک جایگشت، آرایش مرتب اشیا است، یک ترکیب، انتخابی بدون درنظر گرفتن ترتیب است. تعداد انتخاب‌های r تایی از بین n حرف متمایز برابر است با:

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

با توجه به این‌که ترتیب قرار گرفتن اعضا در یک مجموعه اهمیت ندارد، تعداد زیرمجموعه‌های r عضوی یک مجموعه n عضوی برابر است با:

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

مثال: از میان ۷ مرد و ۶ زن به چند طریق می‌توان کمیته‌ای ۵ نفره متشکل از ۳ مرد و ۲ زن تشکیل داد؟

پاسخ: ۳ مرد از بین ۷ مرد به $\binom{7}{3}$ طریق و ۲ زن از بین ۶ زن به $\binom{6}{2}$ طریق، انتخاب می‌شود. بنابراین تعداد راه‌های انتخاب کمیته‌ای ۵ نفره متشکل از ۳ مرد و ۲ زن، بنابر اصل ضرب برابر است با:

$$\binom{7}{3} \times \binom{6}{2} = \frac{7!}{3!4!} \times \frac{6!}{2!4!} = 35 \times 15 = 525$$

مثال: مجموعه $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ چند زیرمجموعه ۴ عضوی دارد؟

پاسخ: تعداد زیرمجموعه‌های ۴ عضوی یک مجموعه ۹ عضوی برابر است با:

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی‌برداری؛ به اشتراک‌گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و داندود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن ([لینک خرید](#))، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

$$\binom{9}{4} = \frac{9!}{4!(9-4)!} = \frac{9!}{4!5!} = 126$$

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن ([لینک خرید](#))، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی‌برداری؛ به اشتراک‌گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و داندود از لینک قانونی آن ([لینک خرید](#))، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

پرسش‌های چهارگزینه‌ای فصل هشتم، آنالیز ترکیبی

۱. چند عدد شش رقمی با ارقام {۰, ۱, ۲, ۳, ۴, ۵} می‌توان ساخت، به‌طوری که فقط صفر یک در میان و تکراری ظاهر شود؟ (آموزش و پرورش - ۹۴)

۱۲۰ (۱)

۹۰ (۲)

۶۰ (۳)

۳۰ (۴)

۲. با حروف کلمه AZMON چند رمز عبور سه حرفی با حروف غیرتکراری می‌توان ساخت؟ (فراگیر هفتم، آموزش و پرورش و علوم پزشکی - ۹۸)

۶۰ (۱)

۱۲۰ (۲)

۱۲۵ (۳)

۱۵۰ (۴)

۳. چه تعداد از جایگشت‌های حروف کلمه summit شامل یکی از الگوهای sum یا it است؟ (فراگیر هشتم و آموزش و پرورش - ۹۹)

۸۴ (۱)

۵۸ (۲)

۶۴ (۳)

۷۸ (۴)

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی‌برداری؛ به اشتراک‌گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و داندود از لینک قانونی آن ([لینک خرید](#))، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و داندود از لینک قانونی آن ([لینک خرید](#))، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

۴. تعداد جایگشت‌های حروف کلمه *teacher* کدام است؟

(فراگیر هشتم و آموزش و پرورش - ۹۹)

(۱) ۳۶۰

(۲) ۵۰۴۰

(۳) ۲۵۲۰

(۴) ۷۲۰

۵. به چند طریق می‌توان سه عدد از میان اعداد ۷، ۸، ۹، ...، ۲۴ و ۲۵ انتخاب کرد، به طوری

که مجموع آن‌ها زوج باشد؟ (فراگیر هشتم و آموزش و پرورش - ۹۹)

(۱) ۴۰۵

(۲) ۴۸۹

(۳) ۵۷۰

(۴) ۸۴

۶. با حروف کلمه آموزش چند کلمه پنج حرفی می‌توان ساخت به طوری که حرف "و" حرف وسط

کلمه باشد؟ (آموزش و پرورش - ۹۴)

(۱) ۱۲۰

(۲) ۹۶

(۳) ۵۴

(۴) ۲۴

۷. با ارقام ۷، ۷، ۷، ۷، ۷، ۳، ۷، ۷، ۵، ۷، ۷ و ۳، چند عدد دوازده رقمی می‌توان نوشت؟

(دستگاه‌های اجرایی - فراگیر دوم - ۹۴)

(۱) ۱۳۲۰

(۲) ۶۶۰

(۳) ۳۳۰

(۴) ۲۶۴۰

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و داندود از لینک قانونی آن ([لینک خرید](#))، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی‌برداری؛ به اشتراک‌گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن ([لینک خرید](#))، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

۸. با حروف کلمه "اشتغال"، چند کلمه چهار حرفی می‌توان نوشت، به طوری که حرف "الف"، یک در میان ظاهر شود؟ (دیوان محاسبات - ۹۴)

- ۱۲ (۱)
- ۲۴ (۲)
- ۳۶۰ (۳)
- ۷۲۰ (۴)

۹. چند عدد شش رقمی می‌توان با اعداد ۳، ۵ و ۷ نوشت، بطوری که هر عدد حداقل یکبار ظاهر شود؟ (دستگاه‌های اجرایی - فراگیر سوم - ۹۵)

- ۲۷۰ (۱)
- ۷۲۰ (۲)
- ۵۴۰ (۳)
- ۳۶۰ (۴)

۱۰. یک میوه فروش می‌خواهد ۳ جعبه پرتقال، ۴ جعبه سیب و ۲ جعبه نارنگی را در سه ردیف به طور ستونی روی هم قرار دهد، به طوری که میوه‌ها در هر ستون از یک نوع باشد، وی به چند طریق می‌تواند این کار را انجام دهد؟ (وزن همه جعبه‌ها، متفاوت است.) (دستگاه‌های اجرایی - فراگیر اول - ۹۴)

- ۱۷۲۸ (۱)
- ۱۳۹۴ (۲)
- ۸۶۴ (۳)
- ۲۸۸ (۴)

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی‌برداری؛ به اشتراک‌گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن ([لینک خرید](#))، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن ([لینک خرید](#))، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

۱۱. تعداد زیر مجموعه های ۲ عضوی یک مجموعه ۱۰ عضوی کدام است؟ (بانک گردشگری - ۹۶)

۲۰ (۱)

۲۸ (۲)

۴۵ (۳)

۹۰ (۴)

۱۲. به چند طریق می توان از بین ۵ شهر استان A و ۶ شهر استان B، ۳ شهر را برای راه اندازی شعبه جدید انتخاب کرد. به طوری که حداقل یک شهر استان A انتخاب شود؟ (بانک سپه - ۹۳)

۱۵۵ (۱)

۱۴۵ (۲)

۱۳۵ (۳)

۷۵ (۴)

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن ([لینک خرید](#))، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی‌برداری؛ به اشتراک‌گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

پاسخ پرسش‌های چهارگزینه‌ای فصل هشتم، آنالیز ترکیبی

۱. گزینه ۱. دو حالت ممکن در شکل زیر نشان داده شده و تعداد اعداد ۶ رقمی مطلوب در هر حالت $60 = 3 \times 4 \times 5$ است، بنابراین ۱۲۰ عدد ۶ رقمی با این شرایط وجود دارد.

—	°	—	°	—	°					
↓	↓	↓	↓	↓	↓					
۵	×	۱	×	۴	×	۱	×	۳	×	۱
حالت		حالت		حالت		حالت		حالت		حالت

یا

°	—	°	—	°	—					
↓	↓	↓	↓	↓	↓					
۱	×	۵	×	۱	×	۴	×	۱	×	۳
حالت		حالت		حالت		حالت		حالت		حالت

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی‌برداری؛ به اشتراک‌گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

۲. گزینه ۱. تعداد جایگشت‌های ۳ حرفی متمایز از بین ۵ حرف متمایز برابر است با:

$$P(5,3) = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5!}{2!} = \frac{120}{2} = 60$$

۳. گزینه ۴. فرض کنیم A مجموعه جایگشت‌های حروف کلمه *summit* شامل الگوی *sum* و B مجموعه جایگشت‌های شامل الگوی *it*

باشد، هدف شمارش تعداد اعضای مجموعه $A \cup B$ است.

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

$$= 4! + \frac{5!}{2!} - 3!$$

$$= 24 + 60 - 6$$

$$= 78$$

۴. گزینه ۳. تعداد حروف ۷ تا که در آن ۲ تا e ، تکراری است، بنابراین تعداد جایگشت‌های حروف کلمه *teacher* برابر است با:

$$\frac{7!}{2!} = \frac{5040}{2} = 2520$$

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

۵. گزینه ۲. تعداد این اعداد ۱۹ تا است که ۱۰ تا از آن‌ها فرد و ۹ تا از آن‌ها عدد زوج است. برای انتخاب ۳ عدد که مجموعشان زوج باشد یا باید هر سه عدد انتخابی زوج باشد یا دو تا فرد انتخاب شود و یکی زوج. این تعداد برابر است با:

$$\binom{9}{3} + \binom{10}{2} \times \binom{9}{1} = 84 + 45 \times 9 = 84 + 405 = 489$$

۶. گزینه ۴. حرف "و" را در وسط می‌نشانیم و سپس ۴ حرف دیگر به $4! = 24$ حالت نشانده می‌شوند.

۷. گزینه ۲. تعداد ارقام ۱۲ تا است که در آن ۹ تا ۷ و ۲ تا ۳ تکراری است، بنابراین تعداد اعداد دوازده رقمی ساخته شده برابر است با:

$$\frac{12!}{2! \times 9!} = \frac{12 \times 11 \times 10}{2} = 660$$

۸. گزینه ۲. دو حالت ممکن در شکل زیر نشان داده شده و تعداد کلمات چهار حرفی مطلوب در هر حالت $12 = 3 \times 4$ است، بنابراین ۲۴ کلمه چهار حرفی با این شرایط وجود دارد.



۹. گزینه ۳. A را مجموعه اعداد ۶ رقمی ساخته شده با ارقام ۳، ۵ و ۷ در نظر می‌گیریم که در آن رقم ۳ نباشد، به همین ترتیب در B رقم ۵ نباشد و در C رقم ۷ نباشد. هدف شمارش تعداد اعضای

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و داندود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

مجموعه $\overline{A \cup B \cup C}$ است. بنابر اصل شمول و عدم شمول برای سه مجموعه این تعداد برابر است با:

$$3^6 - 3 \times 2^6 + 3 \times 1^6 = 729 - 192 + 3 = 540$$

۱۰. گزینه ۱. ۳ جعبه پرتقال به $3! = 6$ حالت، ۴ جعبه سیب به $4! = 24$ حالت و ۲ جعبه نارنگی به $2! = 2$ حالت در هر ستون چیده می شوند، ضمناً ترتیب چیدمان میوه ها در ستون ها نیز $3! = 6$ حالت دارد، بنابر اصل ضرب تعداد حالت های مطلوب برابر است با:

$$3! \times (3! \times 4! \times 2!) = 6 \times 6 \times 24 \times 2 = 1728$$

۱۱. گزینه ۳. تعداد زیر مجموعه های ۲ عضوی یک مجموعه ۱۰ عضوی برابر است با:

$$\binom{10}{2} = \frac{10!}{2! \times 8!} = 45$$

۱۲. گزینه ۲.

$$\binom{5}{1} \times \binom{6}{2} + \binom{5}{2} \times \binom{6}{1} + \binom{5}{3} \times \binom{6}{0} = 5 \times 15 + 10 \times 6 + 10 \times 1 = 145$$

یا

$$\binom{11}{3} - \binom{6}{3} = 165 - 20 = 145$$

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و داندود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و داندود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

فصل نهم، احتمال

بخش اول: فضای نمونه و پیشامدها

مجموعه کلیه نتایج آزمایش تصادفی را از نظری که ما می‌خواهیم بررسی کنیم، فضای نمونه می‌نامیم و با S نشان می‌دهیم.

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

به هر یک از نتایج آزمایش تصادفی، یا هر یک از اعضای فضای نمونه، یک برآمد می‌گوییم.

هر زیرمجموعه از فضای نمونه‌ی آزمایش تصادفی را یک پیشامد می‌گوییم. به عنوان مثال در پرتاب یک تاس فضای نمونه عبارت است از $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ و برآمدها اعداد ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ و ۶ اند.

چون هر زیرمجموعه از فضای نمونه را یک پیش‌آمد می‌گوییم پس پیشامدها عبارتند از:

$$\emptyset, \{1\}, \{2\}, \dots, \{1, 2\}, \dots, \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

هنگامی که می‌گوییم یک پیشامد رخ داده است منظورمان این است که نتیجه آزمایش متعلق به آن پیشامد است. مثلاً در پرتاب یک تاس اگر نتیجه ۱ باشد می‌توانیم بگوییم که پیشامد $\{1, 2, 3\}$ یا پیشامد $\{1, 4\}$ رخ داده است.

اعمال روی پیشامدها

چون پیشامدها مجموعه هستند، همه اعمال مجموعه‌ها در مورد آن‌ها امکان‌پذیر است.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و داندود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و داندود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

۱. پیشامد $A \cup B$ ، هنگامی رخ می دهد که حداقل یکی از پیشامدهای A یا B رخ دهد.

۲. پیشامد $A \cap B$ ، هنگامی رخ می دهد که هر دو پیشامد A و B رخ دهند.

۳. پیشامد $A - B$ ، هنگامی رخ می دهد که پیشامد A رخ داده و پیشامد B رخ ندهد.

۴. پیشامد A' ، هنگامی رخ می دهد که پیشامد A رخ ندهد.

پیشامدهای ناسازگار

دو پیشامد A و B را ناسازگار گوئیم هرگاه $A \cap B = \emptyset$.

قضیه: اگر A پیشامدی از فضای نمونه هم شانسی متناهی S باشد، احتمال پیشامد A از رابطه زیر محاسبه می شود:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

تست: در پرتاب سه سکه با هم احتمال این که فقط دو سکه رو بیاید کدام است؟

$$\frac{1}{2} (۴)$$

$$\frac{1}{4} (۳)$$

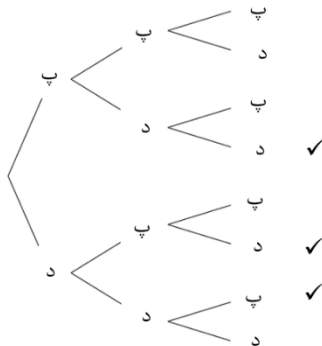
$$\frac{3}{8} (۲)$$

$$\frac{5}{8} (۱)$$

پاسخ: فضای نمونه پرتاب سه سکه دارای $2^3 = ۸$ برآمد (عضو) است که در شکل زیر نشان داده شده است.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و داندود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی‌برداری؛ به اشتراک‌گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.



تعداد حالاتی که دو سکه از این سه سکه، رو آمده باشد برابر با $3 = \binom{3}{2}$ است. بنابراین احتمال مورد نظر برابر است با:

$$\frac{\binom{3}{2}}{2^3} = \frac{3}{8}$$

تست: دو تاس را با هم می‌ریزیم. با کدام احتمال جمع دو عدد رو شده، یک عدد اول است؟

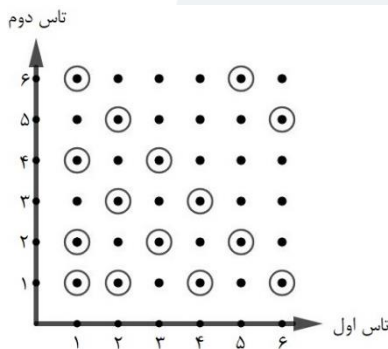
$$\frac{7}{12} (4)$$

$$\frac{5}{9} (3)$$

$$\frac{4}{9} (2)$$

$$\frac{5}{12} (1)$$

پاسخ: فضای نمونه پرتاب دو تاس، دارای $6^2 = 36$ برآمد است. در شکل زیر حالاتی که جمع دو عدد رو شده، عددی اول است مشخص شده است.



تعداد حالاتی که جمع دو عدد رو شده، عددی اول است، ۱۵ است بنابراین احتمال مورد نظر برابر است با:

$$\frac{15}{36} = \frac{5}{12}$$

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی‌برداری؛ به اشتراک‌گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

مثال: از ۴ دانش آموز سال اول و ۵ دانش آموز سال دوم ۶ نفر برای شرکت در یک اردو انتخاب شده‌اند. احتمال آن که ۲ نفر از سال اول و ۴ نفر از سال دوم انتخاب شوند کدام است؟

$$\frac{3}{5} (۴) \quad \frac{5}{14} (۳) \quad \frac{2}{7} (۲) \quad \frac{3}{14} (۱)$$

پاسخ: تعداد اعضای فضای نمونه برابر با تعداد راه‌های انتخاب ۶ نفر از مجموع ۹ نفر است و برابر $n(S) = \binom{9}{6}$ است. تعداد اعضای پیشامد مطلوب در این مسئله، برابر با $n(A) = \binom{4}{2} \times \binom{5}{4}$ است. بنابراین احتمال مورد نظر برابر است با:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{\binom{4}{2} \times \binom{5}{4}}{\binom{9}{6}} = \frac{6 \times 5}{84} = \frac{5}{14}$$

قضیه: فرض کنیم S فضای نمونه یک آزمایش تصادفی باشد و A و B دو پیشامد در این فضای نمونه باشند، در این صورت:

$$1. P(A') = 1 - P(A)$$

$$2. P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$$

$$3. P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

تست: از مجموعه‌ی اعداد $S = \{100, 101, 102, \dots, 600\}$ عددی به تصادف انتخاب شده است. با کدام احتمال این عدد مضرب ۴ یا مضرب ۹ است؟

$$\frac{13}{36} (۴) \quad \frac{1}{3} (۳) \quad \frac{1}{4} (۲) \quad \frac{2}{9} (۱)$$

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و داندود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

پاسخ: فرض کنیم A زیرمجموعه S از مضارب ۴ آن و B زیرمجموعه S از مضارب ۹ آن باشد. احتمال مطلوب برابر است با:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$126 \quad 55 \quad 14$$

$$167$$

$$1$$

احتمال شرطی

در محاسبه احتمال یک پیشامد ممکن است اطلاعات جدیدی برسد که این اطلاعات در محاسبه احتمال آن پیشامد، تاثیر بگذارد در این موارد با مسأله احتمال شرطی مواجه هستیم. احتمال وقوع پیشامد A به شرط اطلاع از وقوع پیشامد B یا به طور خلاصه احتمال A به شرط B را با نماد $P(A|B)$ نشان می‌دهیم و تعریف می‌کنیم:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

برای محاسبه احتمال شرطی، می‌توان با توجه به خبری که داده شده یا همان شرایط جدید ایجاد شده، فضای نمونه را کاهش داد و محدود کرد و سپس در فضای نمونه جدید کاهش یافته، احتمال مورد نظر را محاسبه نمود.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و داندود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و داندود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

تست: در پرتاب دو تاس با هم، می دانیم جمع دو عدد رو شده کمتر از ۱۰ است. با کدام احتمال هر دو عدد رو شده فرداند؟

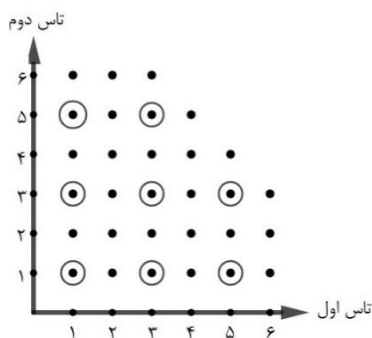
$$\frac{1}{4} (۴)$$

$$\frac{1}{5} (۳)$$

$$\frac{2}{9} (۲)$$

$$\frac{4}{15} (۱)$$

پاسخ: به روش کاهش فضای نمونه مسأله را حل می کنیم. با توجه به محدودیتی که در مسأله وارد شده، شرایط فضای نمونه تغییر می کند، "می دانیم جمع دو عدد رو شده کمتر از ۱۰ است"، فضای نمونه را کاهش می دهد که در شکل زیر کاهش یافته آن دیده می شود.



فضای نمونه کاهش یافته ۳۰ عضو دارد و در این فضا، حالاتی که هر دو عدد رو شده فرد باشند، ۸ تا است پس احتمال مطلوب برابر است با:

$$\frac{8}{30} = \frac{4}{15}$$

تست: اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه S باشند، به طوری که $P(A) = 0.2$ ، $P(B) = 0.22$ و $P(B|A) = 0.7$ آن گاه $P(B'|A')$ کدام است؟

$$0.96 (۴)$$

$$0.92 (۳)$$

$$0.90 (۲)$$

$$0.84 (۱)$$

پاسخ: از $P(B|A) = 0.7$ نتیجه می شود:

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و داندود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و داندود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

$$P(B|A) = 0.7 \Rightarrow \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = 0.7 \Rightarrow P(A \cap B) = 0.7 \times P(A) = 0.7 \times 0.2 = 0.14$$

اکنون $P(B'|A')$ را محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{aligned} P(B'|A') &= \frac{P(B' \cap A')}{1 - P(B \cup A)} \\ &= \frac{1 - (P(A) + P(B) - P(A \cap B))}{1 - (0.2 + 0.22 - 0.14)} \\ &= 0.9 \end{aligned}$$

قاعده ضرب احتمال

فرض کنیم A و B دو پیشامد از فضای نمونه S باشند به طوری که $P(B) \neq 0$ در این صورت با استفاده از فرمول احتمال شرطی داریم:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \Rightarrow P(A \cap B) = P(B) \times P(A|B)$$

رابطه فوق به قاعده ضرب احتمال معروف است.

مثال: در یک کیسه ۳ مهره سفید و ۴ مهره سیاه قرار دارد. از این کیسه ۳ مهره به ترتیب خارج می‌کنیم چه قدر احتمال دارد اولی سفید و دومی سیاه باشد؟

پاسخ:

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و داندود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی‌برداری؛ به اشتراک‌گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

احتمال دومی سیاه به شرط
آن‌که اولی سفید باشد

$$\frac{3}{7} \times \frac{4}{6} = \frac{2}{7}$$

پیشامدهای مستقل

فرض کنیم A و B دو پیشامد از فضای نمونه S باشند، گوییم A و B مستقل‌اند هرگاه:

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

اگر A و B دو پیشامد مستقل از فضای نمونه S باشند آن‌گاه:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A) \times P(B)}{P(B)} = P(A)$$

به این معنی که اطلاع از رخداد پیشامد B در عدد احتمال پیشامد A تأثیری ندارد، به همین ترتیب اطلاع از رخداد پیشامد A در عدد احتمال پیشامد B نیز تأثیری ندارد، زیرا:

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(A) \times P(B)}{P(A)} = P(B)$$

مثال: سه عدد تاس سالم را با هم پرتاب می‌کنیم. با کدام احتمال اعداد رو شده مضرب ۳

نیستند؟

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی‌برداری؛ به اشتراک‌گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

$$\frac{2}{3} (۴)$$

$$\frac{19}{27} (۳)$$

$$\frac{4}{9} (۲)$$

$$\frac{8}{27} (۱)$$

پاسخ: پرتاب تاس‌ها مستقل از هم‌اند و نتیجه هر یک از تاس‌ها مستقل از دیگری است بنابراین احتمال مورد نظر برابر است با حاصل ضرب احتمال این‌که هر کدام از اعداد رو شده مضرب ۳ نباشند:

$$\frac{4}{6} \times \frac{4}{6} \times \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{8}{27}$$

خواص پیشامدهای مستقل

اگر A و B دو پیشامد مستقل باشند، آن‌گاه پیشامدهای A' و B ، همچنین A و B' و همچنین A' و B' نیز با هم مستقل‌اند.

تست: در دو پیشامد مستقل A و B ، اگر $P(A \cap B) = ۰.۶$ و $P(A \cap B') = ۰.۲$ ، آن‌گاه $P(A \cup B')$ کدام است؟

$$۰.۹ (۴)$$

$$۰.۸۵ (۳)$$

$$۰.۷۵ (۲)$$

$$۰.۷ (۱)$$

پاسخ: چون A و B ، دو پیشامد مستقل‌اند داریم:

$$P(A \cap B) = ۰.۶ \Rightarrow P(A) \times P(B) = ۰.۶$$

$$P(A \cap B') = ۰.۲ \Rightarrow P(A) \times P(B') = ۰.۲$$

از تقسیم طرفین دو تساوی فوق برهم داریم:

$$\frac{P(B)}{P(B')} = \frac{۰.۶}{۰.۲} = ۳ \Rightarrow P(B) = ۳P(B') \Rightarrow P(B) = ۳(۱ - P(B)) \Rightarrow P(B) = ۰.۷۵$$

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دائلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

از این که $P(A) \times P(B) = ۰.۶$ و $P(B) = ۰.۷۵$ نتیجه می شود، $P(A) = \frac{۰.۶}{۰.۷۵} = ۰.۸$ بنابراین:

$$P(A \cup B') = P(A) + P(B') - P(A \cap B') = ۰.۸ + ۰.۲۵ - ۰.۲ = ۰.۸۵$$

فرمول احتمال کل

فرض کنیم فضای نمونه S به پیشامدهای $B_1, B_2, \dots, B_n$ تفکیک شده باشد و A پیشامدی در این فضای نمونه باشد، در این صورت:

$$P(A) = P(B_1)P(A|B_1) + \dots + P(B_n)P(A|B_n)$$

تست: دو جعبه یکسان داریم. جعبه اول شامل ۵ مهره سفید و ۷ مهره سیاه و جعبه دوم ۸ مهره سفید و ۴ مهره سیاه است. یک جعبه به تصادف انتخاب و یک مهره از آن اختیار می کنیم. احتمال این که مهره سفید باشد، کدام است؟ (شهرداری ها - ۹۰)

$$\frac{۵}{۶} \quad (۴)$$

$$\frac{۱۱}{۱۲} \quad (۳)$$

$$\frac{۱۳}{۲۴} \quad (۲)$$

$$\frac{۱۱}{۲۴} \quad (۱)$$

پاسخ: پیشامد B_1 ، پیشامد انتخاب جعبه اول و پیشامد B_2 ، را پیشامد انتخاب جعبه دوم در نظر می گیریم. فرض کنیم A پیشامد انتخاب مهره سفید باشد، بنابر فرمول احتمال کل داریم:

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دائلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن ([لینک خرید](#))، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

$$P(A) = P(B_1)P(A|B_1) + P(B_2)P(A|B_2) = \frac{1}{2} \times \frac{5}{12} + \frac{1}{2} \times \frac{8}{12} = \frac{13}{24}$$

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن ([لینک خرید](#))، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی‌برداری؛ به اشتراک‌گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و داندود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

پرسش‌های چهارگزینه‌ای فصل نهم، احتمال

۱. خانواده‌ای دارای سه فرزند دختر است. احتمال این‌که فرزند چهارم پسر باشد، کدام است؟
(آموزش و پرورش - ۹۴)

- (۱) $\frac{1}{16}$
- (۲) $\frac{1}{8}$
- (۳) $\frac{1}{2}$
- (۴) $\frac{1}{4}$

۲. در یک خانواده ۵ فرزندی، با کدام احتمال، تعداد دخترها بیشتر از پسرهاست؟ (دستگاه‌های اجرایی - فراگیر دوم - ۹۴)

- (۱) $\frac{15}{32}$
- (۲) $\frac{5}{16}$
- (۳) $\frac{3}{8}$
- (۴) $\frac{1}{2}$

۳. کلاس A دارای ۵ ردیف صندلی است، به طوری که به جز ردیف اول که ۴ صندلی دارد، سایر ردیف‌ها دارای ۷ صندلی هستند. با فرض خالی بودن همه صندلی‌ها، احتمال این‌که احمد، ردیف اول را برای نشستن انتخاب نکند، کدام است؟ (آموزش و پرورش - ۹۴)

- (۱) $\frac{4}{5}$
- (۲) $\frac{1}{5}$
- (۳) $\frac{1}{8}$
- (۴) $\frac{7}{8}$

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی‌برداری؛ به اشتراک‌گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و داندود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی‌برداری؛ به اشتراک‌گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و داندود از لینک قانونی آن ([لینک خرید](#))، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

۴. در یک خانواده فرزند بزرگتر از میان سه فرزند دختر است، با کدام احتمال دو فرزند دیگر نیز دختر است؟ (آموزش و پرورش - ۹۵)

- (۱) $\frac{1}{4}$
(۲) $\frac{1}{2}$
(۳) $\frac{1}{7}$
(۴) $\frac{1}{8}$

۵. از کیسه‌ای که شامل کارت‌هایی به شماره‌های ۱، ۲، ۴، ۵ و ۷ است. سه کارت به تصادف خارج می‌کنیم و به تصادف کنار هم قرار می‌دهیم. احتمال این‌که این عدد سه رقمی زوج باشد کدام است؟ (دستگاه‌های اجرایی - فراگیر سوم - ۹۵)

- (۱) $\frac{1}{5}$
(۲) $\frac{2}{15}$
(۳) $\frac{1}{15}$
(۴) $\frac{2}{5}$

۶. جعبه A شامل ۳ مهره سفید و ۲ مهره سیاه و جعبه B شامل ۶ مهره سفید و ۴ مهره سیاه است. از هر جعبه مهره‌ای خارج می‌کنیم. احتمال این‌که هر دو مهره از یک رنگ نباشند کدام است؟ (شهرداری‌ها - ۹۲)

- (۱) $\frac{6}{25}$
(۲) $\frac{12}{25}$
(۳) $\frac{8}{25}$
(۴) $\frac{13}{25}$

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی‌برداری؛ به اشتراک‌گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و داندود از لینک قانونی آن ([لینک خرید](#))، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی‌برداری؛ به اشتراک‌گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و داندود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

۷. ده درصد از مراجعه کنندگان به یک بیمارستان در یک روز خاص، دارای بیمه تکمیلی اند. احتمال این‌که در این روز خاص، پنجمین بیماری که در این بیمارستان درمان می‌شود اولین بیماری باشد که بیمه تکمیلی دارد، کدام است؟ (تأمین اجتماعی - ۹۳ و ۹۴)

- (۱) $\frac{94}{105}$
(۲) $\frac{94}{510}$
(۳) $\frac{59}{310}$
(۴) $\frac{95}{104}$

۸. در یک بزرگراه سه خودروی پژو، پراید و اتوبوس تصادف کرده اند. احتمال این‌که خودروی پژو بیمه بدنه نداشته باشد، برابر ۰.۳ و احتمال این‌که هر کدام از دو خودروی دیگر بیمه بدنه نداشته باشند، برابر با ۰.۲ است. احتمال این‌که حداقل دو خودروی سواری، بیمه بدنه نداشته باشند، کدام است؟ (تأمین اجتماعی - ۹۳ و ۹۴)

- (۱) ۰.۰۱۲
(۲) ۰.۰۴۸
(۳) ۰.۰۶
(۴) ۰.۰۹۶

۹. شرکت بیمه A دارای ۴ کارشناس و شرکت بیمه B دارای ۵ کارشناس است. این دو شرکت می‌خواهند برای صرفه‌جویی از بین کارشناسان، دو نفر را برای هر واحد سیار خسارت در یک بزرگراه انتخاب کنند. احتمال این‌که هر دو نفر از یک شرکت باشند کدام است؟ (تأمین اجتماعی - ۹۳)

- (۱) $\frac{2}{13}$
(۲) $\frac{4}{31}$
(۳) $\frac{5}{19}$
(۴) $\frac{7}{9}$

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی‌برداری؛ به اشتراک‌گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و داندود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و داندود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

۱۰. تخلفات اداری شعبه‌ای از یک بانک، توسط بازرسان با احتمال ۰.۱ تأیید می‌شود. احتمال این که ششمین شعبه‌ای که تخلفات آن توسط بازرسان بررسی شده سومین شعبه‌ای باشد که تخلفات آن شعبه توسط بازرسان تأیید شده باشد، کدام است؟ (بانک سپه - ۹۳)

(۱) ۰.۰۰۰۸۱

(۲) ۰.۰۰۱۶۲

(۳) ۰.۰۰۷۲۹

(۴) ۰.۰۱۱۵۸

۱۱. با انجام یک آزمایش تصادفی، فقط یکی از پیشامدهای A_1, A_2 و A_3 رخ می‌دهد. اگر $P(A_1) = 3P(A_2) = 2P(A_3)$ آن گاه احتمال رخ دادن پیشامد A_1 کدام است؟ (شهرداری‌ها - ۹۱)

(۱) $\frac{3}{11}$ (۲) $\frac{2}{11}$ (۳) $\frac{4}{11}$ (۴) $\frac{6}{11}$

۱۲. دو پیشامد A و B از فضای نمونه S هستند. اگر $P(A \cap B) = \frac{1}{6}$ و $P(A) = \frac{2}{3}$ آن گاه، مقدار $P(A \cap B')$ کدام است؟ (فراگیر پنجم و آموزش و پرورش - ۹۷)

(۱) $\frac{1}{3}$ (۲) $\frac{1}{6}$ (۳) $\frac{5}{6}$ (۴) $\frac{3}{4}$

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و داندود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و داندود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

۱۳. خانواده‌ای دارای ۴ فرزند است. می‌دانیم فرزند چهارم این خانواده دختر است. با کدام احتمال، این خانواده فقط یک فرزند پسر دارد؟ (فراگیر هفتم، آموزش و پرورش و علوم پزشکی - ۹۸)

- (۱) $\frac{3}{8}$
(۲) $\frac{1}{8}$
(۳) $\frac{3}{16}$
(۴) $\frac{1}{16}$

۱۴. حسن و ۶ نفر دیگر وارد اتاقی می‌شوند که در آن، ۷ صندلی تعبیه شده است. با کدام احتمال، حسن روی صندلی وسط می‌نشیند؟ (دانشگاه‌های علوم پزشکی و وزارت بهداشت - ۹۹)

- (۱) $\frac{5}{6}$
(۲) $\frac{6}{7}$
(۳) $\frac{1}{6}$
(۴) $\frac{1}{7}$

۱۵. سه دانش آموز به طور مستقل روی یک مسأله ریاضی کار می‌کنند اگر شانس موفقیت آن‌ها در حل مسأله به ترتیب ۰.۵، ۰.۴ و ۰.۳ باشد، احتمال این که هیچ یک نتواند به حل مسأله دست یابند کدام است؟ (شهرداری‌ها - ۹۰)

- (۱) ۰.۳۲
(۲) ۰.۲۵
(۳) ۰.۲۱
(۴) ۰.۱۲

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و داندود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

۱۶. دو تاس پرتاب می‌کنیم. احتمال این که خال‌های ۳ و ۴ را مشاهده کنیم در حالی که بدانیم مجموع خال‌ها ۷ است، کدام است؟ (شهرداری‌ها - ۹۰)

- (۱) $\frac{1}{3}$
- (۲) $\frac{1}{6}$
- (۳) $\frac{1}{7}$
- (۴) $\frac{3}{7}$

۱۷. اگر A و B دو پیشامد مستقل و $P(A) = ۰.۴$ باشد و $P(A \cap B) = ۰.۲$ ، احتمال این که یکی از این دو پیشامد A و B رخ دهد چقدر است؟ (آموزش و پرورش - ۸۹)

- (۱) ۰.۶
- (۲) ۰.۷
- (۳) ۰.۸
- (۴) ۰.۹

۱۸. از بین ۱۰ تعمیرکار منزل فقط ۳ نفر از آنان قادر به تعمیر لباس شویی هستند. اگر ۲ نفر از آنان را به طور کامل تصادفی انتخاب کنیم احتمال آن که هر دو نفر قادر به تعمیر لباس شویی باشند چقدر است؟ (آموزش و پرورش - ۸۹)

- (۱) ۰.۰۶
- (۲) ۰.۱۵
- (۳) ۰.۳
- (۴) ۰.۴۶

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

۱۹. اگر برای دو پیشامد A و B ، $P(B) = 0.9$ ، $P(A|\bar{B}) = 0.7$ و $P(A|B) = 0.2$ ، آنگاه مقدار $P(A)$ کدام است؟ (شهرداری‌ها - ۹۱)

- (۱) ۰.۲۵
- (۲) ۰.۳۵
- (۳) ۰.۱۱
- (۴) ۰.۸۸

۲۰. اگر A و B دو پیشامد مستقل و $P(A|B') = \alpha$ و $P(B'|A) = \beta$ ، آنگاه کدام مورد صحیح است؟ (بانک سپه - ۹۳)

- (۱) $P(A) = \alpha$ ، $P(B) = 1 - \beta$
- (۲) $P(A) = 1 - \alpha$ ، $P(B) = \beta$
- (۳) $P(B) = \alpha$ ، $P(A) = 1 - \beta$
- (۴) $P(A) = \beta$ ، $P(B) = 1 - \alpha$

۲۱. رئیس، معاون و چهار کارمند، دور یک میز نشسته‌اند، با چه احتمالی رئیس و معاون روبروی هم هستند؟ (فراگیر نهم - ۱۴۰۰)

- (۱) $\frac{1}{2}$
- (۲) $\frac{1}{3}$
- (۳) $\frac{1}{4}$
- (۴) $\frac{1}{5}$

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و داندود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

پاسخ پرسش‌های چهارگزینه‌ای فصل نهم، احتمال

۱. گزینه ۳. پیشامد پسر بودن فرزند چهارم مستقل است از شرط این که سه فرزند خانواده دختر اند بنابراین احتمال پسر بودن فرزند چهارم در این شرایط برابر $\frac{1}{2}$ است.

۲. گزینه ۴. فضای نمونه دارای $32 = 2^5$ عضو است و تعداد حالاتی که تعداد دخترها بیشتر از پسرهاست برابر است با:

$$\binom{5}{5} + \binom{5}{4} + \binom{5}{3} = 1 + 5 + 10 = 16$$

بنابراین احتمال مورد نظر برابر است با:

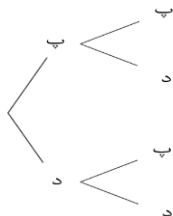
$$\frac{\binom{5}{5} + \binom{5}{4} + \binom{5}{3}}{2^5} = \frac{1 + 5 + 10}{32} = \frac{1}{2}$$

۳. گزینه ۴. تعداد کل صندلی‌ها ۳۲ تا است که ۴ تا از این صندلی‌ها در ردیف اول اند. احتمال این که احمد در ردیف اول بنشیند $\frac{4}{32} = \frac{1}{8}$ است بنابراین احتمال این که او در ردیف اول ننشیند $\frac{7}{8}$ است.

۴. گزینه ۱.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و داندود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.



جنسیت فرزندان خانواده، پیشامدهای مستقل از هم ایجاد می‌کند بنابراین مسأله را چنین می‌توان دید که با چه احتمالی در یک خانواده دو فرزندی، هر دو فرزند دختر اند که برابر با $\frac{1}{4}$ است.

۵. گزینه ۴. تعداد حالت‌های چینش ۳ کارت از بین ۵ کارت برابر با $p(5,3) = 5 \times 4 \times 3 = 60$ یا $60 = 10 \times 6 = 3! \times \binom{5}{3}$ است و تعداد حالاتی که عدد سه رقمی زوج تشکیل شود، برابر است با $24 = 4 \times 3 \times 2$. بنابراین احتمال مورد نظر برابر است با: $\frac{4 \times 3 \times 2}{5 \times 4 \times 3} = \frac{2}{5}$

۶. گزینه ۲. دو حالت در نظر می‌گیریم، حالت اول این که مهره جعبه A سفید و مهره جعبه B سیاه باشد و حالت دوم این که مهره جعبه A سیاه و مهره جعبه B سفید باشد. این احتمال برابر است با: $\frac{3}{5} \times \frac{4}{10} + \frac{2}{5} \times \frac{6}{10} = \frac{24}{50} = \frac{12}{25}$

۷. گزینه ۱. چهار بیمار اول بیمه تکمیلی ندارند و بیمار پنجم بیمه تکمیلی دارد با توجه به استقلال پیشامدها، احتمال مورد نظر برابر است با:

$$\frac{9}{10} \times \frac{9}{10} \times \frac{9}{10} \times \frac{9}{10} \times \frac{1}{10} = \frac{9^4}{10^5}$$

۸. گزینه ۳. احتمال این که حداقل دو خودروی سواری (پژو و پراید)، بیمه بدنه نداشته باشند، برابر است با: $0.3 \times 0.2 = 0.06$

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی‌برداری؛ به اشتراک‌گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

$$9. \text{ گزینه } 2. \quad \frac{\binom{4}{2} + \binom{5}{2}}{\binom{4+5}{2}} = \frac{6+10}{36} = \frac{16}{36} = \frac{4}{9}$$

۱۰. گزینه ۳. از این که ششمین شعبه مورد بررسی، سومین شعبه‌ای است که تخلف آن تأیید شده، نتیجه می‌گیریم در ۵ شعبه اول مورد بررسی، تخلف ۲ شعبه تأیید شده و در بررسی شعبه ششم نیز تخلف تأیید شده است بنابراین احتمال مورد نظر برابر است با:

$$\binom{5}{2} \times 0.1^2 \times 0.9^3 \times 0.1 = 0.00729$$

۱۱. گزینه ۲. از این که فقط یکی از پیشامدهای A_1, A_2, A_3 رخ می‌دهد، داریم:

$$P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) = 1$$

با توجه به فرض $P(A_3) = 2P(A_2) = 3P(A_1)$ داریم:

$$P(A_3) = 3P(A_1), \quad P(A_2) = \frac{3}{2}P(A_1)$$

بنابراین:

$$P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) = 1 \Rightarrow P(A_1) + \frac{3}{2}P(A_1) + 3P(A_1) = 1$$

$$\Rightarrow \frac{11}{2}P(A_1) = 1$$

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی‌برداری؛ به اشتراک‌گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و داندود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

$$\Rightarrow P(A_1) = \frac{2}{11}$$

$$P(A \cap B') = P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) = \frac{2}{3} - \frac{1}{6} = \frac{1}{2} \quad \text{۱۲. گزینه ۲.}$$

۱۳. گزینه ۱. مسأله را چنین در نظر می گیریم که در یک خانواده ۳ فرزندی با چه احتمالی فقط یک فرزند پسر است. احتمال مورد نظر برابر است با:

$$\frac{\binom{3}{1}}{2^3} = \frac{3}{8}$$

۱۴. گزینه ۴. احتمال این که حسن روی یک صندلی خاص از بین ۷ صندلی بنشیند $\frac{1}{7}$ است.

۱۵. گزینه ۳. با توجه به استقلال پیشامدهای مورد نظر، احتمال مطلوب برابر است با:

$$(1 - 0.5) \times (1 - 0.4) \times (1 - 0.3) = 0.5 \times 0.6 \times 0.7 = 0.21$$

۱۶. گزینه ۱. فضای نمونه کاهش یافته در این مسأله به صورت $\{(1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (6,1)\}$ است، احتمال مشاهده خالهای ۳ و ۴ در این فضا برابر $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ است.

۱۷. گزینه ۲. از استقلال دو پیشامد A و B نتیجه می شود:

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و داندود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و داندود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

$$P(A \cap B) = 0.2 \Rightarrow P(A) \times P(B) = 0.2 \Rightarrow 0.4 \times P(B) = 0.2 \Rightarrow P(B) = 0.5$$

بنابراین احتمال این که یکی از این دو پیشامد A و B رخ دهد برابر است با:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.4 + 0.5 - 0.2 = 0.7$$

۱۸. گزینه ۱.

$$\frac{\binom{3}{2}}{\binom{10}{2}} = \frac{3}{45} = \frac{1}{15} \approx 0.06$$

۱۹. گزینه ۱. از $P(A|B) = 0.2$ داریم:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A \cap B)}{0.9} = 0.2 \Rightarrow P(A \cap B) = 0.18$$

از $P(A|\bar{B}) = 0.7$ داریم:

$$P(A|\bar{B}) = \frac{P(A \cap \bar{B})}{P(\bar{B})} = \frac{P(A - B)}{1 - P(B)} = \frac{P(A) - P(A \cap B)}{0.1} = 0.7 \Rightarrow P(A) - 0.18 = 0.07$$

بنابراین: $P(A) = 0.25$

۲۰. گزینه ۱. از این که A و B دو پیشامد مستقل اند نتیجه می شود A و B' نیز مستقل اند
بنابراین:

$$P(A|B') = \alpha \Rightarrow P(A) = \alpha$$

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و داندود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

9

$$P(B'|A) = \beta \Rightarrow P(B') = \beta \Rightarrow P(B) = 1 - \beta$$

۲۱. گزینه ۴. تعداد اعضای فضای نمونه، تعداد جایگشت‌های دوری ۶ نفر و برابر است با: $120 = 5! = (6 - 1)!$ ، پیشامدی که در آن، رئیس و معاون روبروی هم قرار بگیرند دارای $1 = (5 - 1)!$ عضو است. بنابراین احتمال مورد نظر برابر است با:

$$\frac{4!}{5!} = \frac{1}{5}$$

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی‌برداری؛ به اشتراک‌گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

فصل دهم، آمار

بخش اول: آمار چیست؟

آمار به معنی روش‌هایی برای جمع‌آوری، تنظیم و تجزیه و تحلیل اطلاعات عددی درباره‌ی یک موضوع است. از نظر مطالعات علمی، اطلاعات باید با معیارهای مناسب اندازه‌گیری و به صورت اعداد و ارقام بیان شوند.

جامعه و نمونه

مجموعه‌ای از افراد یا اشیاء که درباره‌ی اعضای آن موضوع یا موضوعاتی را مطالعه می‌کنیم، جامعه‌ی آماری نام دارد. به عنوان مثال می‌توان جامعه‌ی ماشین‌هایی که در دو سال گذشته به بازار آمده‌اند از نظر قدرت ترمز و جامعه‌ی نوزادانی را که در سال گذشته به دنیا آمده‌اند از نظر مصرف شیر خشک در نظر گرفت. جامعه‌ی آماری ممکن است متناهی یا نامتناهی باشد. برای مثال جامعه‌ی افرادی که در دو سال گذشته به دنیا آمده‌اند متناهی است اما جامعه‌ی افرادی که از فروردین امسال به بعد به دنیا می‌آیند نامتناهی است. گاهی جامعه‌ی مورد مطالعه به قدری انبوه است که عملاً می‌توان آن را نامتناهی فرض کرد. مانند جامعه‌ی دانه‌های گندم که در یک مزرعه برداشت می‌شود.

اگر همه‌ی افراد جامعه را مورد مطالعه قرار دهیم گوییم سرشماری کرده‌ایم. معمولاً در سرشماری با مشکلاتی مواجه هستیم که مهم‌ترین آن‌ها عبارتند از:

۱. در دسترس نبودن همه‌ی اعضای جامعه
۲. وقت‌گیر بودن دسترسی به همه‌ی اعضای جامعه

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی‌برداری؛ به اشتراک‌گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی‌برداری؛ به اشتراک‌گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

۳. گران تمام شدن بررسی همه‌ی اعضای جامعه
۴. از بین رفتن جامعه در برخی مطالعات.

قسمتی از جامعه را که طبق ضوابطی قابل قبول انتخاب می‌شود و مطالعه‌ی آن به جای مطالعه‌ی همه‌ی جامعه مقدور است نمونه‌ی/ از جامعه می‌نامیم. نتیجه‌ی حاصل از مطالعه‌ی نمونه را به تمام جمعیت تعمیم می‌دهند. این مفهوم از ضرب‌المثل «مشت نمونه‌ی خروار است» استنباط می‌شود. ولی باید محطاط بود! زیرا هر مشت نمی‌تواند نمونه‌ی خروار باشد. بی‌غرضی در انتخاب مشت و اندازه‌ی مشت، نقش مهمی دارد. مسأله‌ی انتخاب یک نمونه‌ی خوب به قدری مهم است که عمل نمونه‌گیری مهم‌ترین بخش آمار را تشکیل می‌دهد.

اگر جامعه کوچک باشد بیشتر اوقات آن را با سرشماری مطالعه می‌کنیم. اما اگر جامعه بزرگ باشد لازم است مطالعات از طریق نمونه‌گیری انجام شوند. برای حفظ بی‌طرفی و کسب حقیقت، اغلب نمونه‌هایی را در نظر می‌گیرند که انتخاب آن‌ها کاملاً تصادفی باشد. این گونه نمونه‌ها را نمونه‌های تصادفی می‌نامند.

۱. اعضای نمونه، تصادفی انتخاب شوند. یعنی انتخاب اعضای نمونه نباید از قانون خاصی پیروی کند.

۲. به اندازه‌ی کافی بزرگ باشد.

جمع‌آوری داده‌ها

داده‌ها به روش‌های زیر جمع‌آوری می‌شوند:

۱. استفاده از داده‌های از پیش تهیه شده.
۲. از طریق پرسش.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی‌برداری؛ به اشتراک‌گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی‌برداری؛ به اشتراک‌گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

۳. از طریق مشاهده و ثبت وقایع. ۴. از طریق انجام آزمایش.

یکی از روش‌های جمع‌آوری داده‌ها پرسش است که به دو صورت مصاحبه یا پرسش‌نامه‌ی کتبی انجام می‌شود. در طراحی پرسش‌نامه از سؤال‌های هدایت‌کننده نباید استفاده کرد. مثلاً اگر می‌خواهید برنامه‌ی جدید مدرسه را بررسی کنید هرگز نپرسید «نظرتان را راجع به برنامه‌ی کامل شده‌ی مدرسه بیان کنید». عبارت «برنامه‌ی کامل شده» به طور غیر مستقیم در خواننده نظر مثبت القا می‌کند.

متغیرهای تصادفی

یک ویژگی (برای مثال: گروه خونی، مهارت، هوش، وزن یا میزان آلودگی هوا) در اعضای مختلف جامعه یکسان نیست و معمولاً از عضوی به عضو دیگر کاهش یا افزایش می‌یابد. از این رو این ویژگی را متغیر می‌نامیم. موضوع یا موضوعاتی را که در یک جامعه بررسی می‌کنیم متغیر تصادفی می‌نامیم. دو نوع متغیر داریم:

۱. کمی: متغیرهایی که قابل اندازه‌گیری اند. مانند وزن، فاصله، طول، جمعیت، و ...

۲. کیفی: متغیرهایی که قابل اندازه‌گیری نیستند. مانند گروه خونی، مراحل زندگی یک فرد و ...

متغیرهای کمی را می‌توان به دو دسته تقسیم کرد:

۱. پیوسته: متغیر پیوسته یک متغیر کمی است که اگر دو مقدار a و b را بتواند اختیار کند هر مقدار بین آن‌ها را نیز بتواند اختیار کند.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی‌برداری؛ به اشتراک‌گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

۲. گسسته: به متغیر کمی که پیوسته نباشد، گسسته گوئیم. این مقادیر با اعداد صحیح بیان می‌شوند.

متغیرهای کیفی را نیز می‌توان به دو دسته تقسیم کرد:

۱. ترتیبی: متغیرهای کیفی را که در آن‌ها نوعی ترتیب طبیعی وجود دارد متغیرهای کیفی ترتیبی می‌گوئیم.

۲. اسمی: متغیر کیفی که ترتیبی نباشد متغیر کیفی اسمی نام دارد.

دسته‌بندی داده‌ها و جدول فراوانی

ایده‌ی اصلی در تشکیل جدول فراوانی از بین بردن اختلافات جزئی و یک کاسه کردن داده‌های نزدیک به هم است.

طول بازه‌ای را که متغیر در آن تغییر می‌کند دامنه‌ی تغییرات گوئیم. به بیان روشن‌تر فرض کنید a کوچک‌ترین داده کمی و b بزرگ‌ترین داده کمی باشد. در این صورت تفاضل a از b را با R نشان می‌دهیم و آن را دامنه‌ی تغییرات می‌گوئیم. یعنی: $R = b - a$

اگر داده‌های آماری با دامنه‌ی تغییرات R را به k دسته تقسیم کنیم طول دسته از رابطه‌ی $C = \frac{R}{k}$ به دست می‌آید. اگر طول دسته اعشاری باشد، آن را به طرف بالا گرد می‌کنیم.

برای دسته‌ی $[a_i, b_i)$ ، داده‌ی a_i را کران پایین و داده‌ی b_i را کران بالا و $x_i = \frac{a_i + b_i}{2}$ را مرکز دسته می‌نامیم.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

اختلاف کران بالا و کران پایین یک دسته برابر با طول دسته است. یعنی: $C = b_i - a_i$.

اختلاف کران‌های بالایی دو دسته‌ی متوالی، اختلاف کران‌های پایینی دو دسته‌ی متوالی و نیز اختلاف مرکز دو دسته متوالی برابر با طول دسته است.

منظور از ارزش یا اندازه‌ی مشترک داده‌های یک دسته، همان مرکز دسته است.

فراوانی مطلق دسته‌ی i ام را که با f_i نشان می‌دهیم برابر با تعداد اعضایی است که در دسته‌ی i ام قرار گرفته‌اند.

اگر f_i فراوانی دسته‌ی i ام و n تعداد داده‌ها باشد، کسر $F_i = \frac{f_i}{n}$ را فراوانی نسبی دسته‌ی i ام می‌گوییم.

اگر فراوانی نسبی دسته‌ی i ام را در عدد ۱۰۰ ضرب کنیم، درصد فراوانی نسبی دسته‌ی i ام به دست می‌آید.

مثال: نمرات درس ریاضی دانش‌آموزان کلاس به شرح زیر است:

۱ ۱ ۱ ۱ ۱ ۱ ۱ ۱ ۱ ۱ ۱ ۱ ۱ ۱ ۱ ۱ ۱ ۱ ۲ ۲
۱ ۲ ۲ ۲ ۳ ۳ ۴ ۴ ۵ ۵ ۵ ۶ ۶ ۶ ۶ ۶ ۷ ۸ ۰ ۰

واضح است بزرگ‌ترین داده $b = ۲۰$ و کوچک‌ترین داده $a = ۱۱$ است. دامنه‌ی تغییرات برابر با $R = ۲۰ - ۹ = ۱۱$ است. اگر داده‌ها را در سه دسته طبقه‌بندی کنیم، طول هر دسته برابر با $C = ۳$ است. حال می‌توان جدول فراوانی را برای این داده‌ها به صورت زیر مشخص کرد:

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی‌برداری؛ به اشتراک‌گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

درصد فراوانی نسبی	فراوانی نسبی	فراوانی مطلق	مرکز دسته	حدود دسته‌ها
۳۰	$\frac{6}{20} = 0.3$	۶	۱۲.۵	[۱۱, ۱۴)
۵۰	$\frac{10}{20} = 0.5$	۱۰	۱۵.۵	[۱۴, ۱۷)
۲۰	$\frac{4}{20} = 0.2$	۴	۱۸.۵	[۱۷, ۲۰]
۱۰۰	۱	۲۰		مجموع

همان طور که از جدول دیده می‌شود:

۱. در جدول فراوانی، مجموع فراوانی مطلق دسته‌ها برابر با تعداد کل داده‌ها است.

۲. در جدول فراوانی، مجموع فراوانی نسبی دسته‌ها برابر با یک است.

۳. در جدول فراوانی، مجموع درصد فراوانی نسبی دسته‌ها برابر با ۱۰۰ است.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی‌برداری؛ به اشتراک‌گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی‌برداری؛ به اشتراک‌گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

فراوانی تجمعی هر دسته برابر با فراوانی مطلق آن دسته بعلاوه‌ی مجموع فراوانی‌های دسته‌های قبل است، همچنین فراوانی نسبی تجمعی هر دسته برابر فراوانی نسبی آن دسته بعلاوه‌ی مجموع فراوانی‌های نسبی دسته‌های قبل است.

مثال: داده‌های زیر را در ۳ دسته با طول دسته‌ی ۳ دسته‌بندی کرده‌ایم و داریم:

۱ ۱ ۱ ۱ ۱ ۱ ۱ ۱ ۱ ۱ ۱ ۱ ۱ ۱ ۱ ۱ ۱ ۱ ۲ ۲
۱ ۲ ۲ ۲ ۳ ۳ ۴ ۴ ۵ ۵ ۵ ۶ ۶ ۶ ۶ ۶ ۷ ۸ ۰ ۰

فراوانی نسبی تجمعی	فراوانی نسبی	فراوانی تجمعی	فراوانی مطلق	حدود دسته‌ها
۰.۳	۰.۳	۶	۶	[۱۱,۱۴)
۰.۸	۰.۵	۱۶	۱۰	[۱۴,۱۷)
۱	۰.۲	۲۰	۴	[۱۷,۲۰]

با توجه به تعریف و با کمک جدول فوق، نتایج زیر واضح است:

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی‌برداری؛ به اشتراک‌گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی‌برداری؛ به اشتراک‌گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

۱. فراوانی مطلق دسته‌ی اول برابر با فراوانی تجمعی دسته‌ی اول است.

۲. فراوانی تجمعی دسته‌ی آخر برابر با مجموع فراوانی‌ها یا کل داده‌ها است.

۳. اگر فراوانی تجمعی دسته‌ی ما قبل را از فراوانی تجمعی آن دسته کم کنیم فراوانی مطلق آن دسته به دست می‌آید.

۴. فراوانی نسبی تجمعی دسته‌ی آخر برابر با یک است.

فراوانی نسبی هر دسته برابر تفاضل فراوانی نسبی تجمعی هر دسته از فراوانی نسبی تجمعی دسته‌ی قبل است.

نمودارها و تحلیل داده‌ها

نمایش داده‌ها به صورت هندسی و طبق قراردادهای خاص را نمودار آماری گویند. نمودارها یا شاخص‌های هندسی وسیله‌ای سودمند برای به تصویر درآوردن و تجسم جامعه است. شاخص‌های هندسی عبارتند از: نمودار میله‌ای، نمودار مستطیلی، چندبر فراوانی، نمودار دایره‌ای، نمودار ساقه و برگ، و نمودار جعبه‌ای که به ترتیب آن‌ها را معرفی می‌کنیم.

نمودار میله‌ای: این نمودار بیشتر برای متغیرهای گسسته و کیفی مناسب است. آنچه که در این نمودار مهم است مقایسه‌ی فراوانی‌ها است. نمودار میله‌ای شامل قسمت‌های زیر است:

۱. عنوان: عنوان نمودار، موضوع مورد مطالعه را بیان می‌کند.

۲. برچسب محورها: هر یک از محورها برچسبی دارند که مشخص کننده‌ی متغیری است که آن محور نشان می‌دهد. در داده‌های دسته‌بندی شده محور افقی مرکز آن دسته را نمایش می‌دهد. با

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی‌برداری؛ به اشتراک‌گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

توجه به اینکه نمودار میله‌ای فراوانی‌ها را مقایسه می‌کند محور عمودی همواره فراوانی را نمایش می‌دهد.

۳. مقیاس: مقیاس هر محور با توجه به موضوع باید مشخص باشد.

نمودار هیستوگرام (مستطیلی)

این نمودار برای متغیرهای کمی پیوسته مناسب است و مجموعه‌ای از ستون‌های در کنار هم است و ارتفاع در هر ستون بیانگر میزان فراوانی دسته آن ستون است. در نمودار مستطیلی مساحت مستطیل‌ها با یکدیگر مقایسه می‌شوند. هر قدر مساحت مستطیل بیشتر باشد فراوانی آن دسته بیشتر است و در صورتی که طول دسته‌ها (قاعده‌ی مستطیل‌ها) با یکدیگر برابر باشند؛ ارتفاع مستطیل‌ها (فراوانی دسته‌ها) با یکدیگر مقایسه خواهند شد. نمودار مستطیلی نمایشی از داده‌های دسته‌بندی شده است که در آن سطح مستطیل‌ها متناسب با فراوانی دسته‌ها است.

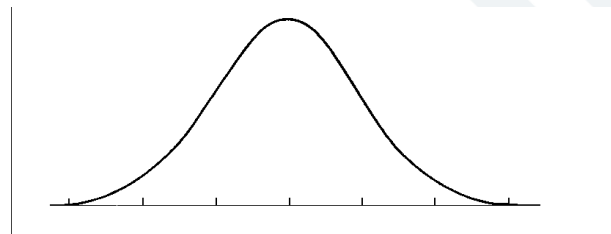
نمودار چندبر فراوانی

همانند نمودار مستطیلی این نمودار برای متغیرهای کمی پیوسته مناسب است. البته این نمودار تغییرات متغیر را بهتر نمایش می‌دهد. در این نمودار نقاطی را در صفحه در نظر می‌گیریم که طول هر یک از آن‌ها مرکز دسته و عرض هر یک از آن‌ها فراوانی مربوطه باشد. سپس آن نقاط را به ترتیب به هم وصل می‌کنیم. برای آن که سطح زیر این منحنی برابر با مساحت نمودار مستطیلی $\sum f_i$ دو دسته، یکی قبل از دسته‌ی اول و یکی بعد از دسته‌ی آخر را با فراوانی صفر در نظر می‌گیریم و دو سر نمودار فوق را به مراکز این دو دسته‌ی فرضی وصل می‌کنیم.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

ما بر اساس داده‌های حاصل از یک نمونه‌ی n تایی از یک جامعه‌ی آماری، به نمودار چندبر فراوانی دست پیدا می‌کنیم. اگر اندازه‌ی نمونه را افزایش دهیم چون تعداد داده‌ها زیاد می‌شود تعداد دسته‌ها افزایش خواهد یافت و در این صورت معمولاً طول دسته‌ها کاهش می‌یابد. در نتیجه چندبر فراوانی از پاره‌خط‌های بیشتری تشکیل خواهد شد. اگر به همین ترتیب ادامه و تعداد داده‌ها را افزایش دهیم در نهایت به یک چندبر فراوانی دست خواهیم یافت که بیشتر به یک منحنی هموار شبیه است تا یک چندبر فراوانی. در اکثر مطالعات آماری این منحنی هموار به شکل زیر است. این منحنی متقارن که شبیه زنگ است، منحنی نرمال نام دارد.



نمودار دایره‌ای

یکی دیگر از نمودارهایی که می‌تواند اطلاعات موجود در داده‌ها را به سرعت در معرض دید قرار دهد نمودار دایره‌ای است. فرض کنید متغیر تصادفی مورد مطالعه دارای k حالت باشد. در این صورت دایره‌ای به شعاع دلخواه را به وسیله‌ی زاویه‌های مرکزی به k قسمت تقسیم می‌کنیم و اندازه‌ی زاویه‌ی مرکزی هر یک از این قسمت‌ها را از رابطه‌ی زیر محاسبه می‌کنیم:

$$\frac{\alpha}{360} = \frac{f}{n} \Rightarrow \alpha = \frac{f}{n} \times 360^\circ = \text{فراوانی نسبی} \times 360^\circ$$

استفاده از نمودار دایره‌ای برای متغیرهای کیفی مناسب است.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

نمودار تجمعی (اجایو)

هنگامی که جدول توزیع فراوانی در دست است از این نمودار استفاده می کنیم. در این نمودار حدود دسته ها منطبق بر محور طول هاست و در انتهای هر دسته فراوانی تجمعی (مطلق یا نسبی) دسته متناظر قرار می گیرد. این نمودار همواره به صورت صعودی است.

نمودار ساقه و برگ

در این نمودار تمام داده ها را می توان دید و در حقیقت اعداد شکل دهنده ی آن هستند. نمودار ساقه و برگ به صورت زیر ساخته می شود:

۱. هر داده را دو قسمت می کنیم. رقم دهگان را ساقه و رقم یکان را برگ می نامیم. برای مثال، در داده ی ۴۵ رقم ۴ ساقه و رقم ۵ برگ را می سازد.

۲. ساقه ها را به ترتیب صعودی از بالا به پایین و در طرف چپ یک خط عمودی می گذاریم.

۳. برگ های هر ساقه را به ترتیب صعودی از چپ به راست و در طرف دیگر خط عمودی پهلوی آن ساقه می گذاریم.

این طور مرتب کردن اعداد، یک نمودار میله ای از اعداد را مشخص می کند. (کافی است نمودار را ۹۰ درجه بچرخانید). در حالت کلی بزرگترین رقمی را که همه ی داده ها در آن مشترک اند به عنوان ساقه مشخص می کنیم. برای مثال اگر داده ها به صورت اعشاری باشند قسمت صحیح را به عنوان ساقه و اگر داده ها سه رقمی باشند دو رقم سمت چپ را به عنوان ساقه در نظر می گیریم. ولی اغلب در نمودار ساقه و برگ طریقه ی خواندن نمودار را تحت عنوان کلید نمودار بیان می کنند. به طور مثال، کلید $۱۳۴ = ۱۳.۴$ یعنی اعداد به صورت اعشاری هستند که قسمت صحیح ساقه و

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

قسمت اعشاری برگ محسوب می شوند. در نمودار ساقه و برگ، تعداد کل داده ها برابر با تعداد برگ ها است.

هنگامی که بخواهیم دو دسته را با هم مقایسه کنیم دو نمودار ساقه و برگ با ساقه های مشترک می سازیم. برگ های یک نمودار را در سمت راست و دیگری را در سمت چپ می گذاریم. با این روش نموداری به دست می آید که آن را نمودار ساقه و برگ پشت به پشت می نامند.

شاخص های مرکزی

شاخص های مرکزی عبارتند از مد، میانه و میانگین.

مد داده ای است که بیشترین فراوانی را دارد.

ممکن است در جامعه ای، مد منحصر به فرد نباشد و ۲ مد داشته باشد. چنین جامعه هایی را ۲ مدي گویند. جامعه ممکن است چند مدي باشد. مد در چنین جامعه هایی شاخص معتبری نیست زیرا وجود چندین مد نشان دهنده این واقعیت است که جامعه یک دست نیست.

پس از مرتب کردن داده ها، مقداری را که تعداد داده های پس از آن با تعداد داده های پیش از آن برابر باشد، میانه می نامیم. میانه را به روش زیر می یابیم:

۱. داده ها را از کوچک به بزرگ مرتب می کنیم.

۲. اگر تعداد داده ها فرد باشد داده ی وسط برابر با میانه است و اگر تعداد داده ها زوج باشد نصف مجموع دو داده ای که در وسط قرار گرفته اند برابر با میانه است.

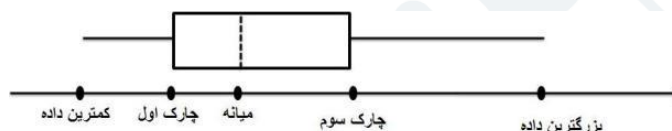
این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی‌برداری؛ به اشتراک‌گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

اگر داده‌ها k برابر شوند مد و میانه نیز k برابر می‌شوند. همچنین اگر داده‌ها با عدد m جمع شوند میانه و مد نیز با عدد m جمع می‌شوند.

در داده‌های آماری، میانه‌ی نیمه‌ی اول داده‌ها را چارک اول می‌نامند و با Q_1 نشان می‌دهند. همچنین میانه‌ی نیمه‌ی دوم داده‌ها را چارک سوم می‌نامند و با Q_3 نشان می‌دهند. چارک دوم همان میانه‌ی داده‌ها است که با Q_2 نشان می‌دهند.

نمودار جعبه‌ای: نموداری تصویری است که داده‌ها را بر اساس پنج مقدار کوچک‌ترین داده، چارک اول، میانه، چارک سوم و بزرگ‌ترین داده نشان می‌دهد.



همان طور که از تعریف چارک مشخص است ۲۵ درصد داده‌ها بین کم‌ترین داده تا چارک اول، ۲۵ درصد داده‌ها بین چارک اول تا چارک دوم، ۲۵ درصد داده‌ها بین چارک دوم و چارک سوم، و ۲۵ درصد داده‌ها بین چارک سوم بزرگ‌ترین داده هستند.

اگر داده‌های آماری باشند میانگین این داده‌ها را با نماد $\bar{x}$ نمایش می‌دهیم و داریم:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

برای n داده‌ی آماری $x_1, x_2, \dots, x_n$ همواره مجموع انحراف از میانگین برابر با صفر است. یعنی:

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی‌برداری؛ به اشتراک‌گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

$$\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) = (x_1 - \bar{x}) + (x_2 - \bar{x}) + \dots + (x_n - \bar{x}) = 0$$

در نمودار ساقه برگ برای به دست آوردن مجموع داده‌ها، به منظور کمتر کردن محاسبات بهتر است به صورت زیر عمل شود:

مجموع برگ‌ها + (تعداد برگ‌ها × ساقه‌ی آخر) + ... + (تعداد برگ‌ها × ساقه‌ی دوم) + (تعداد برگ‌ها × ساقه‌ی اول)

میانگین وزن دار: در حالت کلی فرض کنید داده‌های $x_1, x_2, \dots, x_n$ به ترتیب دارای ضریب‌های $w_1, w_2, \dots, w_n$ باشند. این اطلاعات را برای سادگی می‌توانیم در جدول زیر خلاصه کنیم.

داده‌ها	x_1	x_2	...	x_n
ضریب (وزن)	w_1	w_2	...	w_n

در این صورت میانگین داده‌های بالا با احتساب ضرایب مربوطه به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\bar{x} = \frac{w_1 x_1 + w_2 x_2 + \dots + w_n x_n}{w_1 + w_2 + \dots + w_n}$$

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

اگر همه داده‌ها را در a ضرب و با b جمع کنیم میانگین داده‌های اولیه نیز در a ضرب و با b جمع می‌شود:

$$\overline{ax + b} = a\bar{x} + b$$

محاسبه‌ی میانگین به روش سریع: می‌دانیم که اگر عددی را به همه‌ی داده‌ها اضافه یا کم کنیم میانگین نیز با آن عدد جمع یا تفریق می‌شود. بنابراین در برخی از مسائل که با اعداد نسبتاً بزرگ سر و کار داریم می‌توانیم همه‌ی داده‌ها از عدد دلخواهی (میانگین تخمینی) کم کنیم سپس میانگین اعداد به دست آمده را محاسبه و با میانگین تخمینی جمع کنیم.

شاخص‌های پراکندگی

معمولاً اعضای جامعه از نظر ویژگی مورد مطالعه با هم تفاوت دارند. مثلاً لامپ‌های ۶۰ وات تحت شرایط مساوی از نظر طول عمر یکسان نیستند. چگونه می‌توان میزان این تفاوت‌ها را سنجید؟ و چطور می‌توان درباره‌ی آن قضاوت کرد؟ همان طور که قبلاً دیدیم داده‌ها را معمولاً به صورت یک عدد با استفاده از شاخص‌های مرکزی خلاصه می‌کنند و قسمتی از اطلاعات موجود در آن‌ها را در این عدد جستجو می‌کنند. ولی لازم است درباره‌ی تفاوت داده‌ها با یکدیگر و میزان پراکندگی و تجمع آن‌ها نیز مطالعه کرد. معیاری که می‌تواند این تفاوت‌ها و میزان آن‌ها و به خصوص دوری آن‌ها از میانگین را برای ما اندازه‌گیری کند شاخص پراکندگی نامیده می‌شود. در اینجا چند شاخص برای سنجش پراکندگی را بررسی می‌کنیم.

شاخص‌های پراکندگی عبارتند از: دامنه‌ی تغییرات، واریانس، انحراف معیار، و ضریب تغییرات. همان طور که قبلاً دیدیم دامنه‌ی تغییرات تعدادی داده‌ی آماری تفاضل بین بیشترین و کمترین داده است. با وجود اینکه این شاخص وسعت پراکندگی را مشخص می‌کند و طرز محاسبه‌ی آن ساده است بیانگر خوبی برای تغییرپذیری داده‌ها نیست زیرا این معیار فقط به بزرگ‌ترین و

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی‌برداری؛ به اشتراک‌گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

کوچک‌ترین داده بستگی دارد و اگر سایر داده‌ها تغییر کنند تأثیری در دامنه‌ی تغییرات نخواهد داشت.

واریانس در لغت به معنای تفاوت و تغییر است و در آمار یکی از شاخص‌های پراکندگی است. هر چه مقدار آن افزایش یابد نشان‌گر آن است که داده‌ها از میانگین فاصله‌ی بیشتری دارند. واریانس داده‌های $x_1, x_2, \dots, x_n$ را با نماد σ^2 نشان می‌دهیم و مقدار آن را از رابطه‌ی زیر به دست می‌آوریم:

$$\sigma^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n}$$

می‌توان نشان داد که واریانس را می‌توان از فرمول زیر محاسبه کرد:

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n} - \bar{x}^2$$

اگر در دو نمونه‌ی آماری با میانگین یکسان، واریانس‌ها متفاوت باشند پراکندگی در آن دسته داده‌هایی که واریانس آن‌ها کمتر است، کمتر می‌باشد.

اگر واریانس تعدادی داده‌ی آماری برابر با صفر باشد تمام داده‌ها با هم برابرند و بالعکس، اگر تمام داده‌ها با هم برابر باشند واریانس آن‌ها صفر است.

اگر به هر یک از داده‌های آماری مقدری ثابت اضافه یا کم کنیم واریانس داده‌ها تغییر نمی‌کند. اگر هر یک از داده‌های آماری را در عدد k ضرب کنیم، واریانس داده‌ها k^2 برابر می‌شود.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی‌برداری؛ به اشتراک‌گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و داندود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

فرض کنید داده‌های آماری n جمله‌ی متوالی از یک دنباله‌ی حسابی با قدر نسبت d باشند. در این صورت میانگین این داده‌ها با میانه برابر است و $\bar{x} = \frac{x_1 + x_n}{2}$ و واریانس این داده‌های آماری از رابطه‌ی $(n^2 - 1) \frac{d^2}{12}$ محاسبه می‌شود.

در جدول فراوانی داده‌های دسته‌بندی شده اگر x_i مرکز دسته‌ی i ام و f_i فراوانی مطلق باشد، آن‌گاه واریانس داده‌ها را از روابط زیر به دست می‌آوریم:

$$\sigma^2 = \frac{\sum f_i (x_i - \bar{x})^2}{\sum f_i} \quad \text{یا} \quad \sigma^2 = \frac{\sum f_i x_i^2}{\sum f_i} - \bar{x}^2$$

جذر واریانس را انحراف معیار می‌نامند و با نماد σ نمایش می‌دهند. بنابراین:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n}} \quad \text{یا} \quad \sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n} - \bar{x}^2}$$

با توجه به این‌که واریانس از جنس توان دوم متغیر مورد نظر است واحد آن نیز توان دوم واحد متغیر (داده‌ها) است. بنابراین واحد انحراف معیار همان واحد متغیر مسأله است.

اگر به تعدادی داده‌ی آماری k واحد اضافه یا کم کنیم انحراف معیار تغییر نمی‌کند.

اگر همه‌ی داده‌های آماری را در عدد k ضرب کنیم انحراف معیار در $|k|$ ضرب می‌شود.

در جدول فراوانی داده‌های دسته‌بندی شده، اگر x_i مرکز دسته‌ی i ام باشد آن‌گاه انحراف معیار را می‌توان از روابط زیر محاسبه کرد:

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و داندود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n f_i (x_i - \bar{x})^2}{n}} \quad \text{یا} \quad \sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n f_i x_i^2}{n} - \bar{x}^2}$$

ضریب تغییرات

برای مقایسه پراکندگی دو گروه داده که با واحدهای اندازه گیری متفاوتی جمع آوری شده باشند، استفاده از انحراف معیار، واریانس، متوسط قدرمطلق انحرافات از میانگین، دامنه میان چارکی و دامنه تغییرات صحیح نیست. زیرا می دانیم که این اندازه ها با تغییر مقیاس داده ها، تغییر می کنند. برای رفع این مشکل از «ضریب تغییرات» (Coefficient of Variation) استفاده می شود زیرا معیاری است که میزان نسبی پراکندگی را نشان می دهد. ضریب تغییرات، که آن را با نماد CV نشان می دهیم عبارت است از خارج قسمت انحراف معیار بر میانگین.

$$CV = \frac{\sigma}{\bar{x}}$$

با توجه به این که واحد انحراف معیار و میانگین از جنس واحد داده ها هستند پس ضریب تغییرات بدون واحد است. این که ضریب تغییرات بدون واحد است معیار مناسبی برای مقایسه ی میزان پراکندگی بین دو متغیر ناهم جنس است.

با توجه به رابطه ی $CV = \frac{\sigma}{\bar{x}}$ نتیجه می گیریم که ضریب تغییرات عبارت است از میزان پراکندگی به ازای یک واحد از میانگین.

اگر ضریب تغییرات تعدادی داده ی آماری برابر با صفر باشد آن گاه همه ی داده ها با هم برابرند. بالعکس، اگر همه ی داده ها با هم برابر باشند آن گاه ضریب تغییرات داده ها برابر با صفر است.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی‌برداری؛ به اشتراک‌گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و داندود از لینک قانونی آن ([لینک خرید](#))، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

پرسش‌های چهارگزینه‌ای فصل دهم، آمار

۱. به مجموعه‌ای از افراد یا اشیاء که درباره آن‌ها می‌خواهیم موضوع و یا موضوعاتی را مطالعه کنیم، چه می‌گویند؟ (استاندارداری‌ها - ۹۱)

- (۱) جامعه آماری
- (۲) نمونه آماری
- (۳) زیر نمونه آماری
- (۴) زیر مجموعه آماری

۲. ویژگی مشترک بین افراد جامعه را می‌نامند. (استاندارداری‌ها - ۹۱)

- (۱) صفت مشخصه
- (۲) صفت متغیر
- (۳) حجم جامعه
- (۴) داده آماری

۳. در بررسی نمرات درس آمار زیستی دانشجویان یک کلاس، نوع متغیر کدام است؟ (دانشگاه‌های علوم پزشکی و وزارت بهداشت - ۹۹)

- (۱) کیفی - اسمی
- (۲) کیفی - ترتیبی
- (۳) کمی - گسسته
- (۴) کمی - پیوسته

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی‌برداری؛ به اشتراک‌گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و داندود از لینک قانونی آن ([لینک خرید](#))، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی‌برداری؛ به اشتراک‌گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و داندود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

۴. چه نوع صفاتی در آمار فقط با استفاده از مجموع اعداد صحیح بیان می‌شوند؟ (استاندارداری‌ها

- (۹۱)

- (۱) متغیر کیفی
- (۲) متغیر کمی پیوسته
- (۳) صفت مشخصه
- (۴) متغیر کمی ناپیوسته

۵. متغیر تعداد دانشجو، چه نوع متغیری است؟ (دستگاه‌های اجرایی - فراگیر ششم - ۹۷)

- (۱) پیوسته
- (۲) گسسته
- (۳) کیفی
- (۴) اسمی

۶. رنگ چشم علی قهوه‌ای است. متغیرهای تصادفی X و Y رنگ چشم و طول قد هر دو نفری است که به تصادف در سمت چپ و راست علی قرار می‌گیرند. نوع متغیرهای تصادفی X و Y به ترتیب کدام‌اند؟ (دستگاه‌های اجرایی - فراگیر سوم - ۹۵)

- (۱) کیفی اسمی - کمی پیوسته
- (۲) کیفی ترتیبی - کمی پیوسته
- (۳) کیفی اسمی - کمی گسسته
- (۴) کیفی ترتیبی - کمی گسسته

۷. در بررسی رنگ خودروهای ساخته شده توسط یک شرکت خودروساز، چه نوع متغیری استفاده می‌شود؟ (دستگاه‌های اجرایی - فراگیر اول - ۹۴)

- (۱) کیفی - ترتیبی
- (۲) کمی - ترتیبی
- (۳) کیفی - اسمی
- (۴) کمی - گسسته

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی‌برداری؛ به اشتراک‌گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و داندود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی‌برداری؛ به اشتراک‌گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و داندود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

۸. اگر نمره کسب شده معلمان در یک دوره ضمن خدمت بر اساس نمره صفر تا ۴، تنها به صورت عدد حسابی باشد، نوع متغیر تصادفی نمره کدام است؟ (آموزش و پرورش - ۹۴)

- (۱) کمی پیوسته
- (۲) کمی گسسته
- (۳) کیفی اسمی
- (۴) کیفی ترتیبی

۹. چه تعداد از متغیرهای، " میزان آلودگی هوا"، " رنگ میوها" و " زبان مادری"، کیفی اسمی هستند؟ (فراگیر پنجم و آموزش و پرورش - ۹۷)

- (۱) ۳
- (۲) ۰
- (۳) ۱
- (۴) ۲

۱۰. در بررسی علت تصادفات بین شهری، نوع متغیر کدام است؟
(دانشگاه‌های علوم پزشکی و وزارت بهداشت - ۹۹)

- (۱) کیفی - ترتیبی
- (۲) کیفی - اسمی
- (۳) کمی - پیوسته
- (۴) کمی - گسسته

۱۱. اندازه قطر تنه درختان جنگل‌های شمال جزء کدام نوع از متغیرهای تصادفی است؟
(فراگیر هفتم، آموزش و پرورش و علوم پزشکی - ۹۸)

- (۱) کیفی - ترتیبی
- (۲) کیفی - اسمی
- (۳) کمی - گسسته
- (۴) کمی - پیوسته

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی‌برداری؛ به اشتراک‌گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و داندود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی‌برداری؛ به اشتراک‌گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

۱۲. در دسته‌بندی داده‌های آماری، مرکز دسته دوم و هشتم به ترتیب ۱۲ و ۴۸ است. کران بالای دسته دوازدهم کدام است؟ (آموزش و پرورش - ۹۵)

- (۱) ۷۵
(۲) ۷۶
(۳) ۷۸
(۴) ۷۹

۱۳. جدول زیر، فراوانی نسبی مراجعات به اورژانس یک بیمارستان را در ۱۲۰ روز نشان می‌دهد. در چند روز تعداد مراجعات کمتر از ۴ مورد بوده است؟ (فراگیر چهارم و آموزش و پرورش - ۹۶)

تعداد مراجعات در یک روز	۰	۱	۲	۳	۴
فراوانی نسبی	۰.۲	۰.۱	۰.۲۵	x	۰.۳

- (۱) ۳۶
(۲) ۷۲
(۳) ۸۴
(۴) ۹۶

۱۴. در یک توزیع فراوانی دامنه تغییر برابر با ۲۰ و تعداد طبقات برابر با ۵ است. فاصله طبقاتی چند است؟ (دستگاه‌های اجرایی - فراگیر ششم - ۹۷)

- (۱) ۵
(۲) ۱۰
(۳) ۴
(۴) ۲

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی‌برداری؛ به اشتراک‌گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی‌برداری؛ به اشتراک‌گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و داندود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

۱۵. در داده‌های دسته بندی شده، مجموع فراوانی‌های نسبی کدام است؟ (فراگیر پنجم و آموزش و پرورش - ۹۷)

- (۱) کمتر از یک
- (۲) بیشتر از یک
- (۳) مجموع کل فراوانی‌ها
- (۴) یک

۱۶. فراوانی تجمعی داده‌های آماری دسته بندی شده، به صورت جدول زیر است، فراوانی نسبی دسته سوم کدام است؟ (فراگیر پنجم و آموزش و پرورش - ۹۷)

دسته‌ها	۱۲.۹	۱۵.۱۲	۱۸.۱۵	۲۱.۱۸	۲۴.۲۱
فراوانی تجمعی	۱۲	۲۷	۴۵	۶۵	۷۲

- (۱) ۰.۲۰
- (۲) ۰.۲۳
- (۳) ۰.۲۵
- (۴) ۰.۱۸

۱۷. اگر نمودار فراوانی مطلق داده‌ها از دسته وسط به بعد نزولی باشد، نمودار فراوانی تجمعی چگونه تغییر می‌کند؟ (فراگیر پنجم و آموزش و پرورش - ۹۷)

- (۱) بستگی به فراوانی مطلق دسته‌های ما قبل دسته وسط دارد.
- (۲) ثابت
- (۳) نزولی
- (۴) صعودی

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی‌برداری؛ به اشتراک‌گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و داندود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی‌برداری؛ به اشتراک‌گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

۱۸. در جدول ناقص زیر، فراوانی نسبی دسته اول کدام است؟
(فراگیر هشتم و آموزش و پرورش - ۹۹)

دسته	اول	دوم	سوم	چهارم
فراوانی	x	$x + 8$	۱۲	$0.32c$
فراوانی تجمعی	a	۲۲	b	c

(۱) ۰/۱۴

(۲) ۰.۱۱

(۳) ۰.۰۹

(۴) ۰.۱۸

۱۹. فراوانی نسبی ۱۲۰ داده آماری که در ۵ دسته طبقه بندی شده، در جدول زیر ارائه شده است. اگر فراوانی نسبی دسته دوم، دو برابر فراوانی نسبی دسته چهارم باشد، فراوانی مطلق دسته چهارم کدام است؟ (فراگیر پنجم و آموزش و پرورش - ۹۷)

(۱) ۲۵

(۲) ۱۰

(۳) ۵

(۴) ۲۰

دسته‌ها	۱.۷	۷.۱۳	۱۳.۱۹	۱۹.۲۵	۲۵.۳۱
---------	-----	------	-------	-------	-------

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی‌برداری؛ به اشتراک‌گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی‌برداری؛ به اشتراک‌گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و داندود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

فراوانی نسبی	$\frac{1}{4}$	a	$\frac{1}{3}$	b	$\frac{1}{6}$
-----------------	---------------	-----	---------------	-----	---------------

۲۰. ۱۲۰ داده آماری در ۹ طبقه دسته‌بندی شده‌اند. درصد فراوانی تجمعی نسبی در دسته‌های چهارم و پنجم به ترتیب ۶۷ و ۸۲ است. فراوانی دسته پنجم کدام است؟ (دانشگاه‌های علوم پزشکی و وزارت بهداشت - ۹۹)

- ۱۵ (۱)
- ۱۶ (۲)
- ۱۸ (۳)
- ۲۰ (۴)

۲۱. داده‌های آماری در بازه $[۳۳, ۶۰]$ قرار دارند. اگر این داده‌ها در ۹ طبقه دسته‌بندی شوند، مرکز دسته وسط کدام است؟ (دانشگاه‌های علوم پزشکی و وزارت بهداشت - ۹۹)

- ۴۶ (۱)
- ۴۶.۵ (۲)
- ۴۳ (۳)
- ۴۳.۵ (۴)

۲۲. ۲۰۰ داده در ۱۰ طبقه دسته‌بندی شده است. اگر فراوانی تجمعی دسته نهم برابر ۱۸۰ باشد، درصد فراوانی نسبی دسته دهم کدام است؟ (دانشگاه‌های علوم پزشکی و وزارت بهداشت - ۹۹)

- ۱۵ (۱)
- ۱۷ (۲)
- ۱۰ (۳)
- ۱۲ (۴)

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی‌برداری؛ به اشتراک‌گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و داندود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی‌برداری؛ به اشتراک‌گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و داندود از لینک قانونی آن ([لینک خرید](#))، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

۲۳. دامنه تغییرات بزرگ، بیانگر کدام مورد در خصوص جامعه است؟ (فراگیر هفتم، آموزش و پرورش و علوم پزشکی - ۹۸)

- (۱) زیاد بودن تعداد دسته‌ها
- (۲) بزرگ بودن فراوانی دسته‌ها
- (۳) تفاوت زیاد در جامعه از نظر صفت مورد بررسی
- (۴) تعداد زیاد داده‌ها از نظر متغیر مورد بررسی

۲۴. ۱۸۰ داده آماری را در ۱۲ دسته طبقه‌بندی می‌کنیم. اگر فراوانی تجمعی دسته یازدهم برابر ۱۷۱ باشد، درصد فراوانی نسبی دسته آخر، کدام است؟ (فراگیر هفتم، آموزش و پرورش و علوم پزشکی - ۹۸)

- (۱) ۴
- (۲) ۵
- (۳) ۸
- (۴) ۱۰

۲۵. اگر (۳۲، ۴۰)، حدود دسته سوم جدول فراوانی با ۵ دسته باشد، مرکز دسته دوم کدام است؟ (آموزش و پرورش - ۹۴)

- (۱) ۳۰
- (۲) ۲۸
- (۳) ۲۶
- (۴) ۲۴

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی‌برداری؛ به اشتراک‌گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و داندود از لینک قانونی آن ([لینک خرید](#))، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی‌برداری؛ به اشتراک‌گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

۲۶. جدول زیر نشان دهنده تعداد سال‌های خدمت ۲۵۰ نفر از کارکنان یک بانک است. اگر ۷۶ درصد از کارکنان این بانک حداکثر ۱۹ سال سابقه خدمت داشته باشند مقدار b کدام است؟ (بانک سپه - ۹۳)

i	۱	۲	۳	۴	۵	۶
$l_i - u_i$	۴-۰	۹-۵	۱۴-۱۰	۱۹-۱۵	۲۴-۲۰	۲۹-۲۵
f_i	۳۰	۵۰	۶۰	a	b	۲۰

(۱) ۹۰

(۲) ۵۰

(۳) ۴۰

(۴) ۱۰

۲۷. صد و پنجاه داده آماری در ۹ دسته طبقه‌بندی شده‌اند. درصد فراوانی تجمعی نسبی در دسته‌های چهارم و پنجم به ترتیب ۵۲ و ۶۸ است. فراوانی مطلق دسته وسط کدام است؟ (وزارت نیرو - ۹۶)

(۱) ۱۲

(۲) ۱۵

(۳) ۲۴

(۴) ۱۸

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی‌برداری؛ به اشتراک‌گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی‌برداری؛ به اشتراک‌گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و داندود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

۲۸. در یک جامعه آماری، دامنه تغییرات برابر ۲۰ است اگر کران بالای دسته آخر ۲۱ و مرکز دسته اول ۳ باشد تعداد دسته‌ها کدام است؟ (کران پایین و بالای هر دسته عضوی از این جامعه آماری است.) (فراگیر هفتم، آموزش و پرورش و علوم پزشکی - ۹۸)

(۱) ۹

(۲) ۸

(۳) ۶

(۴) ۵

۲۹. در داده‌های دسته بندی شده، نسبت فراوانی تجمعی دسته آخر به تعداد کل داده‌ها، کدام است؟ (وزارت نیرو - ۹۷)

(۱) کمتر از یک

(۲) بیشتر یا مساوی یک

(۳) یک

(۴) بیشتر از یک

۳۰. در داده‌های دسته‌بندی شده زیر تعداد داده‌ها برابر ۱۲۰ است فراوانی تجمعی دسته ماقبل آخر کدام است؟ (فراگیر هفتم، آموزش و پرورش و علوم پزشکی - ۹۸)

دسته‌ها	۴-۰	۸-۴	۱۲-۸	۱۶-۱۲	۲۰-۱۶
درصد فراوانی نسبی	۱۰	۵	۴۰	a	۱۵

(۱) ۱۰۲

(۲) ۹۶

(۳) ۹۰

(۴) ۸۴

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی‌برداری؛ به اشتراک‌گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و داندود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی‌برداری؛ به اشتراک‌گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و داندود از لینک قانونی آن ([لینک خرید](#))، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

۳۱. کوچکترین داده آماری ۲۳ و بزرگترین آن‌ها ۵۰ است. اگر این داده‌ها در ۹ طبقه دسته بندی شوند، مرکز دسته ششم، کدام است؟ (دانشگاه‌های علوم پزشکی و وزارت بهداشت - ۹۹)

(۱) ۴۰.۵

(۲) ۴۰

(۳) ۳۹.۵

(۴) ۳۹

۳۲. در کدام یک از نمودارهای آماری، فقط از فراوانی نسبی برای رسم آن استفاده می‌شود؟ (تأمین اجتماعی - ۹۳ و ۹۴)

(۱) دایره‌ای

(۲) چندضلعی

(۳) ستونی

(۴) مستطیلی

۳۳. برای نمایش داده‌هایی که با مقیاس اسمی اندازه‌گیری شده‌اند از کدام نمودار استفاده می‌شود؟ (دستگاه‌های اجرایی - فراگیر ششم - ۹۷)

(۱) هیستوگرام

(۲) میله‌ای

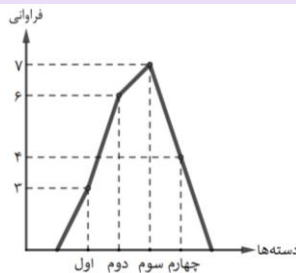
(۳) چندضلعی

(۴) اجایو

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی‌برداری؛ به اشتراک‌گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و داندود از لینک قانونی آن ([لینک خرید](#))، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

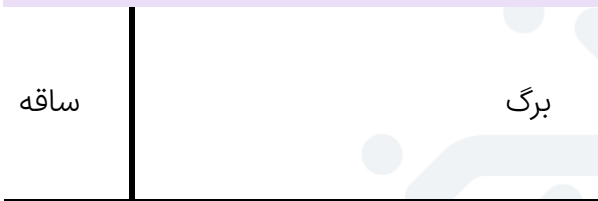
این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و داندود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

۳۴. در نمودار چندبر فراوانی زیر، زاویه مربوط به دسته سوم در نمودار دایره‌ای تهیه شده از این داده‌ها، کدام است؟ (فراگیر پنجم و آموزش و پرورش - ۹۷)



- ۱۰۸ (۱)
- ۶۳ (۲)
- ۵۴ (۳)
- ۱۲۶ (۴)

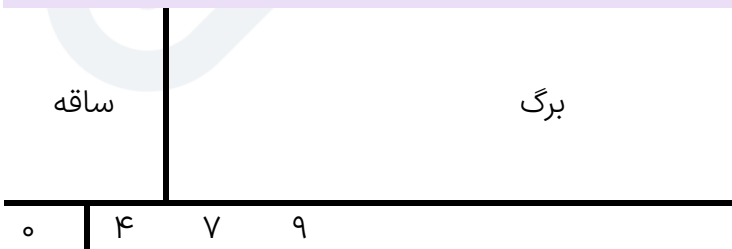
۳۵. در نمودار ساقه و برگ زیر، کلید نمودار $۵۶ = ۵.۶$ است. میانگین داده‌های آماری جدول، کدام است؟ (فراگیر پنجم و آموزش و پرورش - ۹۷)



- ۵۳ (۱)
- ۲۴ (۲)
- ۲.۴ (۳)
- ۵.۳ (۴)

۴	۵	۶	۷	۸	۸
۵	۴	۵			
۶	۱	۲	۹		

۳۶. برای داده‌های نمودار ساقه و برگ زیر، اختلاف زاویه مربوط به داده ۱۵ و ۲۵ در نمودار دایره‌ای چند درجه است؟ (آموزش و پرورش - ۹۵)



- ۲۸ (۱)
- ۳۸ (۲)
- ۴۸ (۳)
- ۵۸ (۴)

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و داندود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن ([لینک خرید](#))، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

۱	۵	۱	۲	۵	۵	۵	۹
۲	۲	۳	۵	۷	۹		

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن ([لینک خرید](#))، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی‌برداری؛ به اشتراک‌گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و داندود از لینک قانونی آن ([لینک خرید](#))، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

۳۷. اگر داده‌های نمودار ساقه و برگ زیر را در ۴ دسته، طبقه‌بندی کنیم. فراوانی نسبی دسته سوم کدام است؟ (فراگیر پنجم و آموزش و پرورش - ۹۷)

ساقه	برگ									
	۰.۳۵ (۱)									
	۰.۴ (۲)									
	۰.۲۵ (۳)									
	۰.۳ (۴)									
	۰	۱	۱	۲						
	۱	۳	۴	۴	۵	۶	۶	۷	۸	۹
	۲	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۹	۹	

۳۸. داده‌های آماری پیوسته در ۹ طبقه دسته بندی شده اند، به طوری که [۸۴, ۹۱] آخرین دسته این طبقه‌بندی است. کوچکترین داده کدام است؟ (حد پایین و بالای هر کدام از دسته‌ها یکی از داده‌های آماری است.) (فراگیر هشتم و آموزش و پرورش - ۹۹)

- ۳۴ (۱)
- ۲۱ (۲)
- ۲۴ (۳)
- ۲۸ (۴)

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی‌برداری؛ به اشتراک‌گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و داندود از لینک قانونی آن ([لینک خرید](#))، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی‌برداری؛ به اشتراک‌گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و داندود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

۳۹. در جدول فراوانی نسبی زیر، افراد یک جامعه در هفت دسته طبقه‌بندی شده‌اند، در نمودار دایره‌ای این داده‌ها، زوایه مربوط به دسته ۱۷-۲۳ [] چند درجه است؟ (وزارت نیرو - ۹۷)

دسته‌ها	۷-۱	۱۲-۷	۱۵-۱۲	۱۷-۱۵	۲۳-۱۷	۳۰-۲۳	۱۲۰-۳۰
فراوانی نسبی	۱۱.۰	۱۴.۰	۰۸.۰	۰۸.۰	a	۱۳.۰	۳۶.۰

(۱) ۴۰

(۲) ۳۶

(۳) ۳۰

(۴) ۲۴

۴۰. جامعه آماری با ۱۵ داده به صورت زیر، دسته‌بندی شده است. میانگین جامعه کدام است؟ (آموزش و پرورش - ۹۴)

دسته‌ها	۱۱-۷	۱۵-۱۱	۱۹-۱۵	۲۳-۱۹
فراوانی	۴	۵	۲	۴

(۱) ۱۲.۶

(۲) ۱۳.۹

(۳) ۱۴.۶

(۴) ۱۵.۹

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی‌برداری؛ به اشتراک‌گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و داندود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی‌برداری؛ به اشتراک‌گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

۴۱. در جدول فراوانی تجمعی زیر، میانگین داده‌ها کدام است؟
(دستگاه‌های اجرایی - فراگیر دوم - ۹۴)

مرکز دسته	۲۵	۲۶	۲۷	۲۸	۲۹
فراوانی تجمعی	۸	۲۴	۴۴	۶۸	۸۰

(۱) ۲۶.۸

(۲) ۲۷.۱

(۳) ۲۷.۲

(۴) ۲۶.۷

۴۲. داده‌های ۳، ۴، ۷.۵، ۹، ۱۰، ۱۱، ۱۳.۵، ۱۴، ۱۶، ۱۸، ۱۸ در نمودار جعبه‌ای نمایش داده می‌شود. طول دامنه میان چارکی کدام است؟ (فراگیر چهارم و آموزش و پرورش - ۹۶)

(۱) ۸.۵

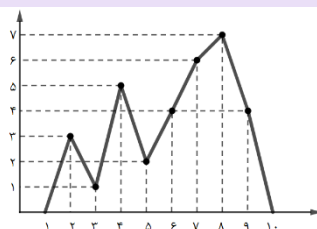
(۲) ۹.۵

(۳) ۱۲

(۴) ۱۵

۴۳. در نمودار زیر، اختلاف میانه و مد داده‌ها کدام است؟ (دستگاه‌های اجرایی - فراگیر سوم -

(۹۵)



(۱) صفر

(۲) ۱

(۳) ۲

(۴) ۳

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی‌برداری؛ به اشتراک‌گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی‌برداری؛ به اشتراک‌گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

۴۴. فرض کنید میانگین ۱۰ داده، برابر ۴ و میانگین ۵ داده دیگر برابر a است. اگر میانگین کل ۱۵ داده برابر ۱۰ باشد مقدار a کدام است؟ (شهرداری‌ها - ۹۰)

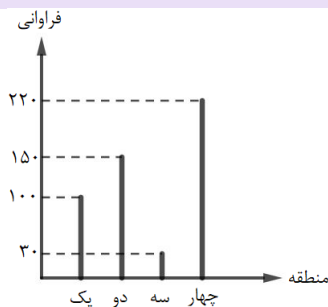
۱۲ (۱)

۱۶ (۲)

۱۸ (۳)

۲۲ (۴)

۴۵. نمودار میله‌ای زیر، نشان دهنده تعداد تصادفات رانندگی ۵۰۰ خودرو در چهار منطقه یک شهر در مدت یک ماه است. زاویه مربوطه به منطقه سه، در نمودار دایره‌ای کدام است؟ (دستگاه‌های اجرایی - فراگیر اول - ۹۴)



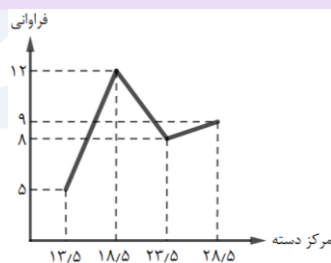
۱۰.۸ (۱)

۲۱.۶ (۲)

۱۵.۲ (۳)

۱۷.۴ (۴)

۴۶. اگر دو داده به مقادیر ۱۹ و ۲۲ به داده‌های نمودار چند ضلعی زیر اضافه شود زاویه مربوط به دسته دوم در نمودار دایره‌ای برای داده‌های جدید کدام است؟ (فراگیر پنجم و آموزش و پرورش - ۹۷)



۱۳۰ (۱)

۱۲۰ (۲)

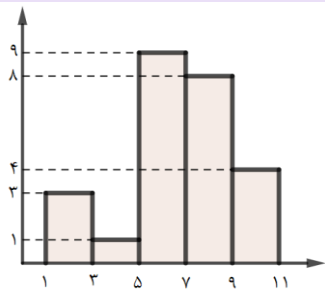
۱۴۰ (۳)

۱۳۴ (۴)

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی‌برداری؛ به اشتراک‌گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی‌برداری؛ به اشتراک‌گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن ([لینک خرید](#))، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

۴۷. میانگین داده‌های نمودار مستطیلی روبه رو کدام است؟ (وزارت نیرو - ۹۷)



(۱) ۵.۲۵

(۲) ۵.۷۵

(۳) ۶.۶۴

(۴) ۶.۷۲

۴۸. میانه داده‌های آماری ۱۶، ۴، ۹، ۲، ۱۲، ۵، ۱، ۷، ۱۰، ۳، کدام است؟

(دستگاه‌های اجرایی - فراگیر اول - ۹۴)

(۱) ۶

(۲) ۶.۵

(۳) ۷.۵

(۴) ۸.۵

۴۹. میانگین داده‌های یک مطالعه آماری ۱۲ است، اگر همه این داده‌ها را بر ۳ تقسیم کنیم و یک واحد به آن‌ها بیفزاییم و در مرحله آخر، داده‌های جدید را دو برابر کنیم. میانگین داده‌های مرحله آخر، کدام است؟ (وزارت نیرو - ۹۶)

(۱) ۷

(۲) ۸

(۳) ۹

(۴) ۱۰

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی‌برداری؛ به اشتراک‌گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن ([لینک خرید](#))، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی‌برداری؛ به اشتراک‌گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

۵۰. در جدول فراوانی مطلق زیر، میانگین برابر ۱۶ است. مقدار a کدام است؟ (فراگیر هفتم، آموزش و پرورش و علوم پزشکی - ۹۸)

حدود دسته	۱۲-۸	۱۶-۱۲	۲۰-۱۶	۲۴-۲۰
فراوانی	۴	a	۴	۵

(۱) ۱۱

(۲) ۹

(۳) ۷

(۴) ۵

۵۱. اگر به همه داده‌های نمودار ساقه و برگ زیر ۴ واحد بیفزاییم و سپس بر ۱۰ تقسیم کنیم، میانگین داده‌های جدید، کدام است؟ (فراگیر هفتم، آموزش و پرورش و علوم پزشکی - ۹۸)

ساقه	برگ
	۴ (۱)
	۴.۵ (۲)
	۵ (۳)
	۵.۵ (۴)

۲	۲	۶	۸		
۳	۱	۲	۴	۷	
۴	۲	۳	۴	۵	۸

۵۲. با توجه به جدول فراوانی ناقص زیر، میانه در کدام دسته قرار دارد؟ (فراگیر هشتم و آموزش و پرورش - ۹۹)

دسته‌ها	اول	دوم	سوم	چهارم
---------	-----	-----	-----	-------

(۱) اول

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی‌برداری؛ به اشتراک‌گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و داندود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

فراوانی	۳	a	۶	۷
فراوانی نسبی	۰.۱۵	b	x	y

(۲) چهارم

(۳) سوم

(۴) دوم

۵۳. میانگین ۱۳ داده، برابر ۶ است. اگر همه داده‌ها به جز a را دو برابر کنیم و با ۱ جمع کنیم، میانگین برابر ۱۱ می‌شود. مقدار a کدام است؟ (فراگیر هشتم و آموزش و پرورش - ۹۹)

(۱) ۲۵

(۲) ۵۱

(۳) ۴۶

(۴) ۳۷

۵۴. از بین داده‌های ۴، ۷، ۱۰، ۱۲، کدام داده تغییر کند تا میانه، میانگین و دامنه تغییرات یکسان و برابر ۸ شوند؟ (فراگیر هشتم و آموزش و پرورش - ۹۹)

(۱) فقط ۱۲

(۲) ۷ یا ۱۰

(۳) ۴ یا ۱۲

(۴) فقط ۱۰

۵۵. در جدول فراوانی تجمعی زیر، میانگین کدام است؟ (فراگیر هشتم و آموزش و پرورش - ۹۹)

حدود دسته	۲-۰	۴-۲	۶-۴	۸-۶
فراوانی تجمعی	۱	۲	۱۲	۱۶

(۱) ۵.۱۲۵

(۲) ۱۲.۶۲۵

(۳) ۱۱.۳۷۵

(۴) ۹

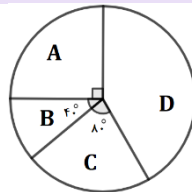
این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و داندود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی‌برداری؛ به اشتراک‌گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و داندود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

۵۶. اگر میانگین اعداد از ۱ تا ۱۰۰ برابر ۵۰.۵ باشد، آن‌گاه میانگین اعداد زوج از ۲ تا ۲۰۰ کدام است؟ (شهرداری‌ها - ۹۲)

- (۱) ۵۰.۵
- (۲) ۱۰۰
- (۳) ۱۰۱
- (۴) ۱۵۰.۵

۵۷. داده‌های آماری که در چهار دسته طبقه‌بندی شده‌اند، به صورت نمودار زیر نمایش داده شده‌اند. اگر مرکز دسته‌های A, B, C و D به ترتیب ۱، ۲، ۳ و ۴ باشد. میانگین داده‌ها تقریباً کدام است؟ (فراگیر هشتم و آموزش و پرورش - ۹۹)



- (۱) ۲.۷
- (۲) ۲.۸۵
- (۳) ۲.۸
- (۴) ۲.۷۵

۵۸. واریانس داده‌های ۱۲۵۶، ۱۲۵۸، ۱۲۶۰، ۱۲۵۹ و ۱۲۵۷، کدام است؟ (آموزش و پرورش - ۹۴)

- (۱) ۲
- (۲) ۳
- (۳) ۲.۵
- (۴) ۳.۵

۵۹. انحراف معیار داده‌های آماری ۶۲، ۷۴، ۶۰، ۶۶ و ۷۸ کدام است؟ (دستگاه‌های اجرایی - فراگیر دوم - ۹۴)

- (۱) $2\sqrt{2}$
- (۲) ۴
- (۳) ۲

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی‌برداری؛ به اشتراک‌گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و داندود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن ([لینک خرید](#))، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

۴ (۴۷۲)

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن ([لینک خرید](#))، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و داندود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

۶۰. انحراف معیار داده‌های جدول مقابل چقدر است؟ (آموزش و پرورش - ۸۹)

x_i	۲	۴	۶	۸
f_i	۱	۲	۳	۴

- (۱) ۱
(۲) ۲
(۳) ۳
(۴) ۴

۶۱. اگر واریانس داده‌های آماری $a, b+1, c-1, d-4$ و ۱۰ برابر صفر باشد، آنگاه میانگین a, b, c و d کدام است؟ (تأمین اجتماعی - ۹۳ و ۹۴)

- (۱) ۱۲
(۲) ۱۱
(۳) ۱۰
(۴) ۹

۶۲. در یک مطالعه آماری انحراف معیار داده‌ها برابر ۱۵ است، اگر همه این داده‌ها را در $\frac{2}{3}$ ضرب و با ۵ جمع کنیم میانگین داده‌های جدید برابر ۱۱ خواهد شد. ضریب تغییرات داده‌های اولیه کدام است؟ (آموزش و پرورش - ۹۵)

- (۱) $\frac{3}{10}$
(۲) $\frac{10}{11}$
(۳) $\frac{15}{13}$
(۴) $\frac{5}{3}$

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و داندود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن ([لینک خرید](#))، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

۶۳. در یک جامعه آماری به هر داده به میزان ۱۵ درصد خودش، اضافه شده است. ضریب تغییرات داده‌های جدید نسبت به داده‌های قبل چه تغییری می‌کند؟ (دستگاه‌های اجرایی - فراگیر سوم - ۹۵)

- (۱) ثابت می‌ماند.
- (۲) ۲.۲۵ برابر می‌شود.
- (۳) ۱.۸۵ برابر می‌شود.
- (۴) ۱.۱۵ برابر می‌شود.

۶۴. دو جامعه دارای مقیاس‌های اندازه‌گیری متمایز هستند، برای مقایسه پراکندگی داده‌های آماری دو جامعه، کدام شاخص مناسب است؟ (آموزش و پرورش - ۹۴)

- (۱) ضریب تغییرات
- (۲) دامنه تغییرات
- (۳) واریانس
- (۴) انحراف معیار

۶۵. میانگین و انحراف معیار ۶ داده آماری به ترتیب ۱۰ و ۲ است. اگر به همه داده‌ها ۶ واحد اضافه کنیم، ضریب تغییرات به چه میزانی تغییر می‌کند؟ (فراگیر چهارم و آموزش و پرورش - ۹۶)

- (۱) +۰.۱۲۵
- (۲) -۰.۱۲۵
- (۳) +۰.۰۷۵
- (۴) -۰.۰۷۵

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن ([لینک خرید](#))، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی‌برداری؛ به اشتراک‌گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و داندود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

۶۶. میانگین سه داده یک رقمی برابر میانه آن‌ها و انحراف معیارشان برابر $\sqrt{2}$ است. اگر مجموع داده‌ها برابر ۱۸ باشد دامنه تغییرات داده‌ها کدام است؟ (فراگیر پنجم و آموزش و پرورش - ۹۷)

- (۱) ۶
- (۲) ۳
- (۳) $2\sqrt{3}$
- (۴) $2\sqrt{2}$

۶۷. اگر انحراف معیار داده‌های، ۱۵، $x_1, x_2, \dots, x_{10}$ ، برابر صفر باشد، میانه داده‌های زیر، کدام است؟ (فراگیر پنجم و آموزش و پرورش - ۹۷)

$$57, 49, 2(x_{10} + 1), \dots, 2(x_3 + 1), 2(x_2 + 1), 2(x_1 + 1)$$

- (۱) ۵۷
- (۲) ۳۱
- (۳) ۳۲
- (۴) ۴۹

۶۸. اگر ۲۰٪ نمره درس آمار هر دانشجو به نمره اولیه او اضافه شود، ضریب تغییرات نمرات جدید، چند برابر ضریب تغییرات نمرات اولیه است؟ (وزارت نیرو - ۹۷)

- (۱) ۱
- (۲) ۱.۲
- (۳) ۱.۴۴
- (۴) ۲

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی‌برداری؛ به اشتراک‌گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و داندود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

۶۹. مجموع ۵۰ داده آماری برابر ۲۵۰ و مجموع مربعات داده‌ها برابر ۱۷۰۰ است. انحراف معیار داده‌ها کدام است؟ (فراگیر هفتم، آموزش و پرورش و علوم پزشکی - ۹۸)

(۱) ۱۶

(۲) ۹

(۳) ۴

(۴) ۳

۷۰. میانگین و انحراف معیار داده‌های $a_1, a_2, \dots, a_n$ به ترتیب ۳ و ۰.۶ است. در داده‌های $3a_n + 1, 3a_1 + 1, \dots, 3a_2 + 1$ ضریب تغییرات، کدام است؟ (فراگیر هشتم و آموزش و پرورش - ۹۹)

(۱) ۰.۴

(۲) ۰.۱۸

(۳) ۰.۲

(۴) ۰.۳۸

۷۱. انحراف مقادیر ۷ داده آماری از میانگین آن‌ها، به صورت اعداد متوالی به دست آمده است. انحراف معیار این داده‌ها کدام است؟ (فراگیر هشتم و آموزش و پرورش - ۹۹)

(۱) ۲

(۲) ۹

(۳) ۴

(۴) ۳

۷۲. انحراف معیار ۱۱ داده آماری صفر است. اگر مجموع مجذورات داده‌ها ۵۳۹ باشد. نما (مُد) در این داده‌ها کدام است؟ (فراگیر هشتم و آموزش و پرورش - ۹۹)

(۱) ۷

(۲) ۸

(۳) ۹

(۴) ۶

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی‌برداری؛ به اشتراک‌گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

۷۳. اگر کوچک‌ترین داده آماری ۸ و بزرگ‌ترین داده ۱۸ باشد، آن‌گاه میانگین داده‌ها کدام می‌تواند باشد؟ (فراگیر نهم - ۱۴۰۰)

- (۱) ۶
(۲) ۷
(۳) ۱۶
(۴) ۲۰

۷۴. اندازه قد ۱۰۰ دانش‌آموز در جدول زیر دسته‌بندی شده است، فراوانی تجمعی دسته چهارم کدام است؟ (فراگیر نهم - ۱۴۰۰)

مرکز دسته	۱۵۵	۱۵۸	۱۶۱	۱۶۴	۱۶۷	۱۷۰
درصد فراوانی نسبی	۱۰	۱۵	۱۸	x	۲۰	۱۲

- (۱) ۶۸
(۲) ۶۳
(۳) ۸۸
(۴) ۷۳

۷۵. برای تعدادی داده، نخست داده‌ها را ۳ برابر و در حالت دوم به هر کدام ۴ واحد می‌افزاییم. میانگین داده‌ها در دو حالت برابر است اما انحراف معیار داده‌ها در حالت نخست یک واحد بیشتر از حالت دوم است. ضریب تغییرات داده‌های اولیه کدام است؟ (فراگیر نهم - ۱۴۰۰)

- (۱) ۰.۷۵
(۲) ۱
(۳) ۰.۲۵
(۴) ۰.۵

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی‌برداری؛ به اشتراک‌گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی‌برداری؛ به اشتراک‌گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و داندود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

پاسخ پرسش‌های چهارگزینه‌ای فصل دهم، آمار

۱. گزینه ۱. مجموعه‌ای از افراد یا اشیاء که درباره‌ی اعضای آن موضوع یا موضوعاتی را مطالعه می‌کنیم، جامعه‌ی آماری نام دارد.

۲. گزینه ۲. یک ویژگی (برای مثال: گروه خونی، مهارت، هوش، وزن یا میزان آلودگی هوا) در اعضای مختلف جامعه یکسان نیست و معمولاً از عضوی به عضو دیگر کاهش یا افزایش می‌یابد. از این رو این ویژگی را متغیر می‌نامیم. موضوع یا موضوعاتی را که در یک جامعه بررسی می‌کنیم متغیر تصادفی می‌نامیم.

۳. گزینه ۴.

۴. گزینه ۴.

۵. گزینه ۲. واژه "تعداد" برای متغیر کمی گسسته و واژه "میزان" یا "اندازه" برای متغیر کمی پیوسته استفاده می‌شود.

۶. گزینه ۱. متغیر رنگ چشم، متغیر کیفی اسمی و طول قد، کمی پیوسته است.

۷. گزینه ۳.

۸. گزینه ۲.

۹. گزینه ۴. "میزان آلودگی هوا"، متغیر کمی پیوسته است و "رنگ میوها" و "زبان مادری"، کیفی اسمی اند.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی‌برداری؛ به اشتراک‌گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و داندود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

۱۰. گزینه ۲.

۱۱. گزینه ۴. واژه "تعداد" برای متغیر کمی گسسته و واژه "میزان" یا "اندازه" برای متغیر کمی پیوسته استفاده می شود.

۱۲. گزینه ۱. مرکز دسته i ام را با x_i نشان می دهیم، بنابراین $x_7 = 12$ و $x_8 = 48$. فاصله بین دو مرکز دسته متوالی برابر با طول دسته است، اگر طول دسته را C در نظر بگیریم، آن گاه، $12 + 6C = 48$ و از آن طول دسته، $C = 6$ به دست می آید.

x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
12	$12 + C$	$12 + 2C$	$12 + 3C$	$12 + 4C$	$12 + 5C$	$12 + 6C$ $= 48$

اکنون می توانیم مرکز دسته دوازدهم را به دست آوریم:

x_8	x_9	x_{10}	x_{11}	x_{12}
↓	↓	↓	↓	↓

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

۴۸ ۵۴ ۶۰ ۶۶ ۷۲

پس مرکز دسته دوازدهم ۷۲ است و اگر نصف طول دسته به آن اضافه شود، آن گاه کران بالای دسته دوازدهم به دست می آید.

$$u_{12} = x_{12} + \frac{1}{p}C = 72 + \frac{1}{p} \times 6 = 75$$

۱۳. گزینه ۳. مجموع های فراوانی نسبی در یک جدول فراوانی برابر یک است بنابراین:

$$0.2 + 0.1 + 0.25 + x + 0.3 = 1 \Rightarrow x = 0.15$$

مجموع های فراوانی نسبی در روزهایی که تعداد مراجعات کمتر از ۴ مورد است برابر است با:

$$0.2 + 0.1 + 0.25 + 0.15 = 0.7$$

بنابراین در $84 = 120 \times 0.7$ روز، تعداد مراجعات کمتر از ۴ مورد بوده است.

۱۴. گزینه ۳. اگر داده های آماری با دامنه ی تغییرات R را به k دسته تقسیم کنیم طول دسته از رابطه ی $C = \frac{R}{k}$ به دست می آید، بنابراین:

$$C = \frac{R}{k} = \frac{20}{5} = 4$$

۱۵. گزینه ۴. در جدول فراوانی، مجموع فراوانی نسبی دسته ها برابر با یک است.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی‌برداری؛ به اشتراک‌گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

۱۶. گزینه ۳. اگر فراوانی تجمعی دسته‌ی ما قبل را از فراوانی تجمعی آن دسته کم کنیم فراوانی مطلق آن دسته به‌دست می‌آید.

در جدول زیر فراوانی مطلق هر یک از دسته‌ها مشخص شده است:

دسته‌ها	۱۲-۹	۱۵-۱۲	۱۸-۱۵	۲۱-۱۸	۲۴-۲۱
فراوانی تجمعی	۱۲	۲۷	۴۵	۶۵	۷۲
فراوانی مطلق	۱۲	۱۵	۱۸	۲۰	۷

فراوانی تجمعی دسته آخر، برابر با تعداد کل داده‌ها است بنابراین فراوانی نسبی دسته سوم برابر است با:

$$F_3 = \frac{f_3}{\sum f_i} = \frac{18}{72} = 0.25$$

۱۷. گزینه ۴. نمودار فراوانی تجمعی داده‌ها همواره صعودی است.

۱۸. گزینه ۱. اگر فراوانی تجمعی دسته‌ی ما قبل را از فراوانی تجمعی آن دسته کم کنیم فراوانی مطلق آن دسته به‌دست می‌آید. فراوانی تجمعی دسته اول با فراوانی مطلق یا همان فراوانی دسته اول یکسان است. در جدول داده شده، داریم:

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی‌برداری؛ به اشتراک‌گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

$$x + (x + 8) = 22 \Rightarrow x = 7, \quad a = x = 7$$

$$b = 22 + 12 = 34$$

$$b + 0.32c = c \Rightarrow 34 + 0.32c = c \Rightarrow 0.68c = 34 \Rightarrow c = \frac{34}{0.68} = 50$$

فراوانی تجمعی دسته آخر، برابر با تعداد کل داده‌ها است بنابراین فراوانی نسبی دسته اول برابر است با:

$$F_1 = \frac{f_1}{\sum f_i} = \frac{7}{50} = 0.14$$

۱۹. گزینه ۲. در جدول فراوانی، مجموع فراوانی نسبی دسته‌ها برابر با یک است. بنابراین:

$$\frac{1}{4} + a + \frac{1}{3} + b + \frac{1}{6} = 1 \Rightarrow a + b = \frac{1}{4}$$

از این‌که فراوانی نسبی دسته دوم، دو برابر فراوانی نسبی دسته چهارم است $a = 2b$ پس $2b +$

$$\frac{1}{12} \times 120 = 10 \text{ و فراوانی مطلق دسته چهارم برابر است با } b = \frac{1}{4} \Rightarrow b = \frac{1}{12}$$

۲۰. گزینه ۳. اگر فراوانی تجمعی نسبی دسته‌ی ما قبل را از فراوانی تجمعی نسبی آن دسته کم

کنیم فراوانی نسبی آن دسته به دست می‌آید. بنابراین فراوانی نسبی دسته پنجم برابر است با:

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی‌برداری؛ به اشتراک‌گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

$$F_5 = \frac{82}{100} - \frac{67}{100} = \frac{15}{100}$$

و فراوانی مطلق دسته پنجم برابر است با:

$$f_5 = \frac{15}{100} \times 120 = 18$$

۲۱. گزینه ۲. دامنه تغییرات داده‌ها، $R = 60 - 33 = 27$ و تعداد طبقات $k = 9$ است، لذا طول

هر دسته ۳ $C = \frac{R}{k} = \frac{27}{9} = 3$ و حدود دسته وسط یعنی دسته پنجم، $(45, 48]$ است، بنابراین مرکز دسته پنجم، $x_5 = \frac{45+48}{2} = 46.5$ است.

مرکز دسته	حدود دسته
۵.۳۴	$[33, 36)$
۵.۳۷	$[36, 39)$
۵.۴۰	$[39, 42)$
۵.۴۳	$[42, 45)$
۵.۴۶	$[45, 48)$

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی‌برداری؛ به اشتراک‌گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

۵.۴۹	(۴۸, ۵۱)
۵.۵۲	(۵۱, ۵۴)
۵.۵۵	(۵۴, ۵۷)
۵.۵۸	(۵۷, ۶۰]

۲۲. گزینه ۳. فراوانی مطلق دسته دهم ۲۰ است و درصد فراوانی نسبی آن برابر است با:

$$\frac{20}{200} \times 100 = 10$$

۲۳. گزینه ۳.

۲۴. گزینه ۲. از این که فراوانی تجمعی دسته یازدهم ۱۷۱ و تعداد کل داده ها ۱۸۰ است، فراوانی مطلق دسته آخر $180 - 171 = 9$ به دست می آید و درصد فراوانی نسبی دسته آخر برابر است با:

$$\frac{9}{180} \times 100 = 5$$

۲۵. گزینه ۲. اختلاف کران بالا و پایین در هر یک از دسته ها، برابر با طول دسته است پس $C = 8 = 40 - 32$ و $x_3 = \frac{32+40}{2} = 36$ مرکز دسته سوم، ضمناً مرکز دسته دوم به اندازه یک طول دسته از مرکز دسته سوم کمتر است بنابراین:

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی‌برداری؛ به اشتراک‌گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و داندود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

$$x_2 = x_3 - 8 = 36 - 8 = 28$$

۲۶. گزینه ۳. مجموع فراوانی‌ها برابر با تعداد کل داده‌ها است بنابراین:

$$30 + 50 + 60 + a + b + 20 = 250 \Rightarrow a + b = 90$$

تعداد کارکنانی که حداکثر ۱۹ سال سابقه خدمت دارند برابر است با:

$$30 + 50 + 60 + a = 140 + a$$

این تعداد برابر با ۷۶ درصد از ۲۵۰ است بنابراین:

$$140 + a = \frac{76}{100} \times 250 \Rightarrow 140 + a = 190 \Rightarrow a = 50$$

در آخر از این‌که $a + b = 90$ و $a = 50$ نتیجه می‌شود، $b = 40$

۲۷. گزینه ۳. اگر فراوانی تجمعی نسبی دسته‌ی ما قبل را از فراوانی تجمعی نسبی آن دسته کم کنیم فراوانی نسبی آن دسته به‌دست می‌آید. بنابراین فراوانی نسبی دسته پنجم برابر است با:

$$F_5 = \frac{68}{100} - \frac{52}{100} = \frac{16}{100}$$

و فراوانی مطلق دسته پنجم که همان دسته وسط است، برابر است با:

$$f_5 = \frac{16}{100} \times 150 = 24$$

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی‌برداری؛ به اشتراک‌گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و داندود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

۲۸. گزینه ۴. دامنه تغییرات ($R = ۲۰$) برابر با اختلاف بزرگترین و کوچکترین داده است، در این مسئله بزرگترین داده همان کران بالای دسته آخر یعنی ۲۱ است بنابراین کوچکترین داده برابر با ۱ است. فاصله مرکز دسته اول از کران پایین آن به اندازه نصف طول دسته معادل ۲ واحد است بنابراین طول دسته برابر است با: $C = ۴$ و از رابطه $C = \frac{R}{k}$ نتیجه می شود $k = \frac{R}{C} = \frac{۲۰}{۴} = ۵$

۲۹. گزینه ۳. فراوانی تجمعی دسته ی آخر برابر با مجموع فراوانی ها یا کل داده ها است.

۳۰. گزینه ۱. در جدول فراوانی، مجموع درصد فراوانی نسبی دسته ها برابر با ۱۰۰ است، بنابراین:

$$۱۰ + ۵ + ۴۰ + a + ۱۵ = ۱۰۰ \Rightarrow a = ۳۰$$

درصد فراوانی تجمعی نسبی دسته ماقبل آخر برابر با $۱۰ + ۵ + ۴۰ + ۳۰ = ۸۵$ است بنابراین فراوانی تجمعی دسته ماقبل آخر برابر است با:

$$\frac{۸۵}{۱۰۰} \times ۱۲۰ = ۱۰۲$$

۳۱. گزینه ۳. دامنه تغییرات برابر با $R = ۵۰ - ۲۳ = ۲۷$ و طول دسته که نسبت دامنه تغییرات به تعداد دسته ها است برابر است با ۳، حدود دسته اول به صورت $[۲۳, ۲۶)$ است و مرکز دسته اول $x_1 = \frac{۲۳+۲۶}{۲} = ۲۴.۵$ ، در آخر مرکز دسته ششم برابر است با:

$$x_6 = x_1 + ۵C = ۲۴.۵ + ۵ \times ۳ = ۳۹.۵$$

۳۲. گزینه ۱. در نمودار دایره ای اندازه ی زاویه ی مرکزی هر يك از قسمت ها از رابطه ی زیر محاسبه می شود:

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی‌برداری؛ به اشتراک‌گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و داندود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

$$36^\circ \times \text{فراوانی نسبی} = \frac{f}{n} \times 36^\circ = \alpha \Rightarrow \frac{\alpha}{36^\circ} = \frac{f}{n}$$

۳۳. گزینه ۲. نمودار میله‌ای، بیشتر برای متغیرهای گسسته و کیفی مناسب است. آنچه که در این نمودار مهم است مقایسه فراوانی‌ها است.

۳۴. گزینه ۴. با توجه به نمودار، فراوانی دسته سوم ۷ و مجموع فراوانی‌ها $3 + 6 + 7 + 4 = 20$ است، بنابراین فراوانی نسبی دسته سوم $\frac{7}{20}$ و زاویه مربوط به آن در نمودار دایره‌ای برابر است با:

$$\alpha = \frac{f}{n} \times 36^\circ = \frac{7}{20} \times 36^\circ = 126^\circ$$

۳۵. گزینه ۴. تعداد داده‌ها برابر با تعداد برگ‌ها یعنی ۱۰ تا است و مجموع داده‌ها برابر است با:

$$4 \times 5 + 5 \times 2 + 6 \times 3 + 0.6 + 0.7 + 0.8 + 0.8 + 0.4 + 0.5 + 0.1 + 0.2 + 0.9 = 53$$

بنابراین میانگین داده‌ها $5.3 = \frac{53}{10}$ است.

۳۶. گزینه ۳. فراوانی نسبی داده ۱۵ برابر $\frac{3}{15}$ و فراوانی نسبی داده ۲۵ برابر $\frac{1}{15}$ است، زاویه مربوط به داده ۱۵ در نمودار دایره‌ای برابر $72^\circ = 36^\circ \times \frac{3}{15}$ و زاویه مربوط به داده ۲۵ در نمودار دایره‌ای $24^\circ = 36^\circ \times \frac{1}{15}$ است که اختلاف این دو زاویه برابر است با:

$$72^\circ - 24^\circ = 48^\circ$$

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی‌برداری؛ به اشتراک‌گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و داندود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی‌برداری؛ به اشتراک‌گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و داندود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

۳۷. گزینه ۴. دامنه تغییرات برابر است با $R = 29 - 1 = 28$ و طول هر دسته برابر با $C = \frac{R}{k}$ $\frac{28}{4} = 7$ جدول فراوانی این داده‌ها در زیر نمایش داده شده است:

فراوانی نسبی	فراوانی	حدود دسته
$\frac{3}{20} = 0.15$	۳	$[1, 8)$
$\frac{3}{20} = 0.15$	۳	$[8, 15)$
$\frac{6}{20} = 0.3$	۶	$[15, 22)$
$\frac{8}{20} = 0.4$	۸	$[22, 29]$

۳۸. گزینه ۴. طول دسته $C = 91 - 84 = 7$ و داده‌ها در ۹ طبقه دسته‌بندی شده و دامنه تغییرات $R = C \times k = 7 \times 9 = 63$ است. چون حد پایین و بالای هر کدام از دسته‌ها یکی از داده‌های آماری است و بزرگترین داده ۹۱، نتیجه می‌شود کوچکترین داده $91 - 63 = 28$ است.

۳۹. گزینه ۲. در جدول فراوانی، مجموع فراوانی نسبی دسته‌ها برابر با یک است بنابراین:

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی‌برداری؛ به اشتراک‌گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و داندود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی‌برداری؛ به اشتراک‌گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و داندود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

$$0.11 + 0.14 + 0.08 + 0.08 + a + 0.13 + 0.36 = 1 \Rightarrow a = 0.1$$

اندازه‌ی زاویه‌ی مرکزی مربوط به دسته ۱۷-۲۳) برابر است با:

$$\alpha = \frac{f}{n} \times 360^\circ = 0.1 \times 360^\circ = 36^\circ$$

۴۰. گزینه ۳. در جدول فراوانی، برای محاسبه میانگین داده‌ها، از مرکز دسته استفاده می‌کنیم:

دسته‌ها	۱۱-۷	۱۵-۱۱	۱۹-۱۵	۲۳-۱۹
مرکز دسته	۹	۱۳	۱۷	۲۱
فراوانی	۴	۵	۲	۴

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^4 f_i x_i}{\sum_{i=1}^4 f_i} = \frac{4 \times 9 + 5 \times 13 + 2 \times 17 + 4 \times 21}{4 + 5 + 2 + 4} = \frac{219}{15} = 14.6$$

۴۱. گزینه ۳. با توجه به فراوانی تجمعی، ابتدا فراوانی هر دسته را می‌یابیم سپس میانگین داده‌ها را حساب می‌کنیم:

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی‌برداری؛ به اشتراک‌گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و داندود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی‌برداری؛ به اشتراک‌گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و داندود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

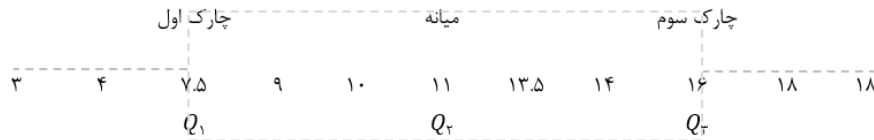
مرکز دسته	۲۵	۲۶	۲۷	۲۸	۲۹
فراوانی تجمعی	۸	۲۴	۴۴	۶۸	۸۰
فراوانی	۸	۱۶	۲۰	۲۴	۱۲

$$\begin{aligned}
 \bar{x} &= \frac{\sum_{i=1}^5 f_i x_i}{\sum_{i=1}^5 f_i} = \frac{۸ \times ۲۵ + ۱۶ \times ۲۶ + ۲۰ \times ۲۷ + ۲۴ \times ۲۸ + ۱۲ \times ۲۹}{۸ + ۱۶ + ۲۰ + ۲۴ + ۱۲} \\
 &= \frac{۸ \times ۲۵ + ۱۶ \times ۲۶ + ۲۰ \times ۲۷ + ۲۴ \times ۲۸ + ۱۲ \times ۲۹}{۸۰} \\
 &= \frac{۲۰۰ + ۴۱۶ + ۵۴۰ + ۶۷۲ + ۳۴۸}{۸۰} \\
 &= \frac{۲۱۷۶}{۸۰} \\
 &= ۲۷.۲
 \end{aligned}$$

۴۲. گزینه ۱. داده‌ها را از کوچک به بزرگ می‌نویسیم، میانه داده‌ها (چارک دوم)، سپس میانه نیمه اول و دوم داده‌ها یعنی چارک اول و سوم را می‌یابیم:

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی‌برداری؛ به اشتراک‌گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و داندود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی‌برداری؛ به اشتراک‌گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.



طول دامنه میان چارکی داده‌ها (طول جعبه)، برابر با $16 - 7.5 = 8.5$ است.

۴۳. گزینه ۲. داده‌ای که بیشترین فراوانی را دارد مد، برابر ۸ است. میانه، داده وسط است.

تعداد کل داده‌ها (مجموع فراوانی‌ها) $3 + 1 + 5 + 2 + 4 + 6 + 7 + 4 = 32$ است، بنابراین میانه داده‌ها میانگین دو داده وسط یعنی داده ۱۶-م و ۱۷-م یعنی دو داده، ۷ و ۷ است بنابراین، میانه عدد ۷ است و اختلاف آن با مد، ۱ واحد است.

۴۴. گزینه ۴. از این‌که میانگین ۱۰ داده، برابر ۴، است نتیجه می‌شود مجموع این داده‌ها ۴۰ است، به همین ترتیب از این‌که میانگین ۵ داده دیگر برابر a است، نتیجه می‌شود مجموع این ۵ داده برابر با $5a$ است. پس مجموع این ۱۵ داده برابر با $5a + 40$ و چون میانگین این ۱۵ داده ۱۰ است داریم:

$$10 = \frac{5a + 40}{15} \Rightarrow 5a + 40 = 150 \Rightarrow 5a = 110 \Rightarrow a = 22$$

۴۵. گزینه ۲. فراوانی نسبی تعداد تصادفات در منطقه سه، برابر $\frac{3}{50} = \frac{30}{500}$ است. بنابراین زاویه مربوطه به منطقه سه، در نمودار دایره‌ای برابر است با:

$$\frac{3}{50} \times 360^\circ = 21.6^\circ$$

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی‌برداری؛ به اشتراک‌گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

۴۶. گزینه ۱. طول هر دسته ۵ واحد است و پس از اضافه شدن مقادیر ۱۹ و ۲۲ به داده‌ها، جدول فراوانی به صورت زیر به دست می‌آید:

فراوانی	مرکز دسته	حدود دسته
۵	۵.۱۳	[۱۱, ۱۶)
۱۲ + ۱	۵.۱۸	[۱۶, ۲۱)
۸ + ۱	۵.۲۳	[۲۱, ۲۶)
۹	۵.۲۸	[۲۶, ۳۱]

فراوانی نسبی دسته دوم برای داده‌های جدید، $\frac{۱۳}{۳۶}$ و زاویه آن در نمودار دایره‌ای برابر است با:

$$\frac{۱۳}{۳۶} \times ۳۶۰^\circ = ۱۳۰^\circ$$

۴۷. گزینه ۴. جدول فراوانی داده‌ها را با توجه به نمودار داده شده، تنظیم می‌کنیم:

فراوانی	مرکز دسته	حدود دسته
---------	-----------	-----------

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی‌برداری؛ به اشتراک‌گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و داندود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

۳	۲	[۱,۳)
۱	۴	[۳,۵)
۹	۶	[۵,۷)
۸	۸	[۷,۹)
۴	۱۰	[۹,۱۱]

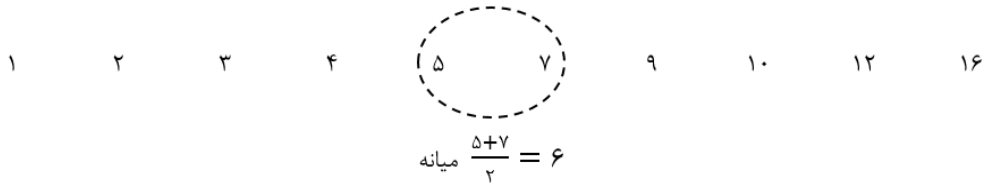
میانگین داده‌ها عبارت است از:

$$\begin{aligned}\sum f_i x_i &= 2 \times 3 + 4 \times 1 + 6 \times 9 + 8 \times 8 + 10 \times 4 \\ &= 6 + 4 + 54 + 64 + 40 \\ &= 168\end{aligned}$$

۴۸. گزینه ۱. داده‌ها را از کوچک به بزرگ مرتب می‌کنیم، چون تعداد داده‌ها زوج است، میانگین دو داده وسط، میانه است. بنابراین میانه عدد ۶ است.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی‌برداری؛ به اشتراک‌گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و داندود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و داندود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.



۴۹. گزینه ۴. میانگین داده‌های اولیه ۱۲ است و پس از تقسیم همه داده‌ها بر ۳ میانگین برابر ۴ می‌شود، پس از اضافه شدن یک واحد به همه داده‌ها، به میانگین نیز یک واحد اضافه می‌شود و برابر ۵ می‌شود، در آخر با دو برابر شدن داده‌ها میانگین نیز دو برابر و برابر ۱۰ می‌شود.

۵۰. گزینه ۳.

$$\begin{aligned} &= \frac{\sum f_i x_i}{n} = \frac{4 \times 10 + a \times 14 + 4 \times 18 + 5 \times 22}{16} \\ \Rightarrow &= \frac{40 + 14a + 72 + 110}{16} \\ \Rightarrow &208 + 14a = 222 + 14a \\ \Rightarrow &2a = 14 \\ \Rightarrow &a = 7 \end{aligned}$$

۵۱. گزینه ۱. ابتدا میانگین داده‌ها را به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{3 \times 20 + 4 \times 30 + 5 \times 40 + 2 + 6 + 8 + 1 + 2 + 4 + 7 + 2 + 3 + 4 + 5 + 8}{12} \\ &= \frac{432}{12} = 36 \end{aligned}$$

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و داندود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

اگر به هر یک از داده‌ها ۴ واحد بیفزاییم، میانگین برابر ۴۰ می‌شود، پس از تقسیم هر یک از داده‌ها بر ۱۰ میانگین نیز بر ۱۰ تقسیم می‌شود و برابر ۴ می‌شود.

۵۲. گزینه ۳. فراوانی دسته اول ۳ و فراوانی نسبی آن ۰.۱۵ است از این‌جا می‌توان تعداد کل داده‌ها و مقادیر مجهول را به دست آورد:

$$\frac{3}{n} = 0.15 \Rightarrow n = \frac{3}{0.15} = 20 \Rightarrow 3 + a + 6 + 7 = 20 \Rightarrow a = 4$$

چون تعداد داده‌ها زوج است، میانه برابر با میانگین دو داده وسط، یعنی میانگین داده‌های دهم و یازدهم است. بنابراین میانه داده‌ها در دسته سوم قرار می‌گیرد.

۵۳. گزینه ۱. در ابتدا، مجموع داده‌ها $78 = 6 \times 13$ است و در ادامه:

$$\frac{2 \times (78 - a) + a + 12}{13} = 11 \Rightarrow 2 \times (78 - a) + a + 12 = 143$$

$$\Rightarrow 156 - 2a + a + 12 = 143$$

$$\Rightarrow a = 25$$

۵۴. گزینه ۲. دامنه تغییرات این داده‌ها $8 = 12 - 4$ است و دو داده ابتدا و انتهای نباید تغییر کنند. میانگین $8.25 = \frac{12+10+7+4}{4}$ است و یکی از دو داده وسط یعنی ۷ یا ۱۰ باید تغییر کنند طوری که میانگین‌شان ۸ شود.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و داندود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

۵۵. گزینه ۱. جدول فراوانی به همراه مرکز دسته‌ها را مشخص می‌کنیم و سپس میانگین داده‌ها را با توجه به مرکز دسته و فراوانی‌ها مشخص می‌کنیم:

حدود دسته	۰-۲	۲-۴	۴-۶	۶-۸
مرکز دسته	۱	۳	۵	۷
فراوانی تجمعی	۱	۲	۱۲	۱۶
فراوانی	۱	۱	۱۰	۴

$$\bar{x} = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} = \frac{1 \times 1 + 3 \times 1 + 5 \times 10 + 7 \times 4}{1 + 1 + 10 + 4} = \frac{82}{16} = 5.125$$

۵۶. گزینه ۳. وقتی همه داده‌ها دو برابر شوند، میانگین آن‌ها نیز دو برابر می‌شود.

۵۷. گزینه ۳. زاویه مربوط به ناحیه D برابر است با:

$$360^\circ - 90^\circ - 40^\circ - 80^\circ = 150^\circ$$

فراوانی نسبی هر یک از ناحیه‌های A, B, C و D به ترتیب $\frac{90}{360}$ ، $\frac{40}{360}$ ، $\frac{80}{360}$ و $\frac{150}{360}$ است، میانگین را با توجه به مرکز دسته و فراوانی نسبی به دست می‌آوریم:

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و داندود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی‌برداری؛ به اشتراک‌گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

$$\bar{x} = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} = \frac{1 \times \frac{90}{360} + 2 \times \frac{40}{360} + 3 \times \frac{80}{360} + 4 \times \frac{150}{360}}{1} = \frac{90}{360} + \frac{80}{360} + \frac{240}{360} + \frac{600}{360} = \frac{1010}{360} \approx 2.8$$

۵۸. گزینه ۱. اگر از همه داده‌ها یک مقدار ثابتی کم کنیم، واریانس که یک معیار برای پراکندگی داده‌هاست، تغییر نمی‌کند، این کار صرفاً به جهت سادگی محاسبات است و می‌توان بدون انجام این عمل واریانس را محاسبه نمود. از هر یک از داده‌ها مقدار ۱۲۵۶ واحد کم می‌کنیم و واریانس داده‌های ۰، ۲، ۴، ۳ و ۱ را به دست می‌آوریم:

$$\bar{x} = \frac{0 + 2 + 4 + 3 + 1}{5} = \frac{10}{5} = 2$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n} = \frac{(0 - 2)^2 + (2 - 2)^2 + (4 - 2)^2 + (3 - 2)^2 + (1 - 2)^2}{5} = \frac{10}{5} = 2$$

یا

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n} - \bar{x}^2 = \frac{0^2 + 2^2 + 4^2 + 3^2 + 1^2}{5} - 2^2 = \frac{30}{5} - 4 = 6 - 4 = 2$$

۵۹. گزینه ۴. از هر یک از داده‌ها ۶۲ واحد کم می‌کنیم و واریانس داده‌های ۱۲، ۰، ۸، ۴ و ۱۶ را می‌یابیم:

$$\bar{x} = \frac{12 + 0 + 8 + 4 + 16}{5} = \frac{40}{5} = 8$$

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی‌برداری؛ به اشتراک‌گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی‌برداری؛ به اشتراک‌گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و داندود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^4 (x_i - \bar{x})^2 &= (12 - 8)^2 + (10 - 8)^2 + (8 - 8)^2 + (14 - 8)^2 + (16 - 8)^2 \\ &= 16 + 64 + 0 + 16 + 64 \\ &= 32\end{aligned}$$

انحراف معیار، جذر واریانس است و داریم:

$$\sigma = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$$

۶۰. گزینه ۲. ابتدا میانگین، سپس واریانس و در آخر انحراف معیار داده‌ها را در جدول فراوانی به‌دست می‌آوریم:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^4 f_i x_i}{\sum_{i=1}^4 f_i} = \frac{1 \times 2 + 2 \times 4 + 3 \times 6 + 4 \times 8}{1 + 2 + 3 + 4} = \frac{60}{10} = 6$$

$$\begin{aligned}\sigma^2 &= \frac{\sum_{i=1}^4 f_i (x_i - \bar{x})^2}{\sum_{i=1}^4 f_i} = \frac{1 \times (2 - 6)^2 + 2 \times (4 - 6)^2 + 3 \times (6 - 6)^2 + 4 \times (8 - 6)^2}{1 + 2 + 3 + 4} \\ &= \frac{16 + 8 + 0 + 16}{10} \\ &= 4\end{aligned}$$

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی‌برداری؛ به اشتراک‌گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و داندود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و داندود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

انحراف معیار، جذر واریانس است و $\sigma = 2$

۶۱. گزینه ۲. اگر واریانس یک دسته داده آماری، صفر باشد آن گاه همه آن داده‌ها با هم برابرند.
بنابراین $a = 10$ و $b = 9$ ، $c = 11$ ، $d = 14$

و میانگین a ، b ، c و d برابر است با:

$$\frac{10 + 9 + 11 + 14}{4} = \frac{44}{4} = 11$$

۶۲. گزینه ۴.

۱۱	$\xrightarrow{+5}$	?	$\times \frac{2}{3}$	میانگین داده‌های اولیه
۱۱	$\xleftarrow{-5}$	۶	$\div \frac{2}{3}$	۹

انحراف معیار برابر ۱۵ و میانگین آن‌ها ۹ بوده است بنابراین ضریب تغییرات داده‌های اولیه برابر است با:

$$c.v = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{15}{9} = \frac{5}{3}$$

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و داندود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی‌برداری؛ به اشتراک‌گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و داندود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

۶۳. گزینه ۱. اگر به هر داده به میزان ۱۵ درصد خودش، اضافه شود، آن‌گاه هر یک از انحراف معیار و میانگین نیز به میزان ۱۵ درصد خودشان، اضافه می‌شوند و نسبت آن‌ها بدون تغییر و ثابت می‌ماند.

۶۴. گزینه ۱. برای مقایسه پراکندگی دو گروه داده که با واحدهای اندازه‌گیری متفاوتی جمع‌آوری شده باشند، استفاده از انحراف معیار، واریانس، متوسط قدرمطلق انحرافات از میانگین، دامنه میان چارکی و دامنه تغییرات صحیح نیست. زیرا می‌دانیم که این اندازه‌ها با تغییر مقیاس داده‌ها، تغییر می‌کنند. برای رفع این مشکل از «ضریب تغییرات» استفاده می‌شود زیرا معیاری است که میزان نسبی پراکندگی را نشان می‌دهد.

۶۵. گزینه ۴. ضریب تغییرات اولیه داده‌ها برابر است با:

$$c.v = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{2}{10} = 0.2$$

اگر به همه داده‌ها ۶ واحد اضافه کنیم، میانگین ۶ واحد اضافه می‌شود و انحراف معیار تغییر نمی‌کند بنابراین ضریب تغییرات داده‌های جدید برابر است با:

$$c.v = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{2}{16} = 0.125$$

ضریب تغییرات جدید نسبت به قبلی $0.075 = 0.2 - 0.125$ ، کاهش می‌یابد.

۶۶. گزینه ۳. داده‌ها را x ، y و z ، در نظر می‌گیریم، از این که مجموع داده‌ها برابر ۱۸ است و میانگین آن‌ها با میانه برابر است نتیجه می‌شود $6 = \frac{x+y+z}{3} = y$ و $x + 6 + z = 18$

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی‌برداری؛ به اشتراک‌گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و داندود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

۱۸ پس $x + z = 12$ و $z = 12 - x$ ، انحراف معیار داده‌ها برابر $\sqrt{2}$ است پس واریانس داده‌ها برابر ۲ است و داریم:

$$\begin{aligned}\sigma^2 &= \frac{\sum_{i=1}^3 (x_i - \bar{x})^2}{3} = \frac{(x - 6)^2 + (y - 6)^2 + (z - 6)^2}{3} \\ &= \frac{(x - 6)^2 + (6 - 6)^2 + (12 - x - 6)^2}{3} \\ &= \frac{(x - 6)^2 + (6 - x)^2}{3} \\ &= \frac{2(x - 6)^2}{3} \\ &= 2\end{aligned}$$

بنابراین $(x - 6)^2 = 3$ و $x - 6 = \pm\sqrt{3}$ پس $x = 6 \pm \sqrt{3}$ ، با فرض $x = 6 - \sqrt{3}$ آن گاه:

$$z = 12 - x = 12 - (6 - \sqrt{3}) = 6 + \sqrt{3}$$

بنابراین داده‌ها عبارتند از:

$$6 - \sqrt{3}, 6, 6 + \sqrt{3}$$

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی‌برداری؛ به اشتراک‌گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و داندود از لینک قانونی آن ([لینک خرید](#))، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

و دامنه تغییرات آن‌ها برابر با $2\sqrt{3} = (\sqrt{3} + 6) - (\sqrt{3} - 6)$ است.

۶۷. گزینه ۳. اگر انحراف معیار داده‌ها برابر صفر باشد آن‌گاه همه داده‌ها یکسانند و $x_1 = x_2 = \dots = x_{10} = 15$. اکنون برای به‌دست آوردن میانه داده‌های ۱۵، ۱۶، ۱۷، ۱۸، ۱۹، ۲۰، ۲۱، ۲۲، ۲۳، ۲۴، ۲۵، ۲۶، ۲۷، ۲۸، ۲۹، ۳۰، ۳۱، ۳۲، ۳۳، ۳۴، ۳۵، ۳۶، ۳۷، ۳۸، ۳۹، ۴۰، ۴۱، ۴۲، ۴۳، ۴۴، ۴۵، ۴۶، ۴۷، ۴۸، ۴۹، ۵۰ را از کوچک به بزرگ مرتب می‌کنیم:

卅一, 卅一, 卅一, 卅一, 卅一, 卅二, 卅二, 卅二, 卅二, 卅二, 卅九, 五

چون تعداد داده‌ها زوج است، میانه برابر با میانگین دو داده وسط است و برابر است با ۳۲-.

۶۸. گزینه ۱. افزایش ۲۰ درصدی هر داده به معنی ضرب هر داده در عدد ۱.۲ است، در این صورت انحراف معیار و میانگین داده‌ها نیز هر کدام در عدد ۱.۲ ضرب می‌شوند و ضریب تغییرات داده‌های جدید که نسبت انحراف معیار جدید داده‌ها به میانگین آن‌هاست بدون تغییر می‌ماند.

۶۹. گزینه ۴. واریانس داده‌ها را از فرمول دوم واریانس به دست می‌آوریم، از این که مجموع ۵۰ داده برابر ۲۵۰ است میانگین $\bar{x} = \frac{250}{50} = 5$ محاسبه می‌شود و داریم:

$$\sigma^r = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^r}{n} - \bar{x}^r = \frac{1700}{50} - 34 = 34 - 34 = 0$$

نتیجه می‌شود انحراف معیار داده‌ها برابر ۳ است.

۷۰. گزینه ۲. وقتی داده‌ها ۳ برابر می‌شوند، میانگین و انحراف معیارشان نیز ۳ برابر می‌شود و وقتی که هر یک از داده‌ها با عدد ۱ جمع شوند میانگین نیز با عدد ۱ جمع می‌شود ولی انحراف معیار بدون تغییر می‌ماند، بنابراین ضرب تغییرات داده‌های جدید برابر است با:

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی‌برداری؛ به اشتراک‌گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن ([لینک خرید](#))، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

$$c.v = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{0.6 \times 3}{3 \times 3 + 1} = \frac{1.8}{10} = 0.18$$

۷۱. گزینه ۱. برای n داده‌ی آماری $x_1, x_2, \dots, x_n$ همواره مجموع انحراف از میانگین برابر با صفر است. یعنی:

$$\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) = (x_1 - \bar{x}) + (x_2 - \bar{x}) + \dots + (x_n - \bar{x}) = 0$$

بنابراین:

$$(x_1 - \bar{x}) + (x_2 - \bar{x}) + \dots + (x_7 - \bar{x}) = 0$$

از این که انحراف مقادیر ۷ داده آماری از میانگین آن‌ها، به صورت اعداد متوالی به دست آمده است، الزاماً این مقادیر انحراف از میانگین به صورت ۳، ۲، ۱، ۰، ۱، ۲، ۳ اند. با داشتن مقادیر انحراف از میانگین داده‌ها، واریانس و سپس انحراف معیار داده‌های اصلی را می‌یابیم:

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^7 (x_i - \bar{x})^2}{n} = \frac{(-3)^2 + (-2)^2 + (-1)^2 + (0)^2 + (1)^2 + (2)^2 + (3)^2}{7} = \frac{28}{7} = 4$$

$$\Rightarrow \sigma = 2$$

۷۲. گزینه ۱. از این که انحراف معیار این ۱۱ داده آماری صفر است، نتیجه می‌شود همه این داده‌ها یکسانند و از این که مجموع مجذورات داده‌ها ۵۳۹ است داریم:

$$11x^2 = 539 \Rightarrow x^2 = 49 \Rightarrow x = 7$$

۱۱ داده ۷ داریم بنابراین مد نیز برابر ۷ است.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

۷۳. گزینه ۳. میانگین داده‌ها آماری همواره بین کوچک‌ترین و بزرگ‌ترین داده قرار می‌گیرد. در بین گزینه‌های داده شده فقط عدد ۱۶ که بین ۸ و ۱۸ است می‌تواند میانگین باشد.

۷۴. گزینه ۱. مجموع درصد‌های فراوانی نسبی در یک جدول فراوانی برابر ۱۰۰ است بنابراین داریم:

$$10 + 15 + 18 + x + 20 + 12 = 100 \Rightarrow x = 25$$

درصد فراوانی تجمعی دسته چهارم، برابر با مجموع فراوانی دسته‌های اول، دوم، سوم و چهارم است که برابر است با:

$$10 + 15 + 18 + 25 = 68$$

با توجه به این که تعداد دانش‌آموزان نیز برابر ۱۰۰ نتیجه می‌شود، فراوانی تجمعی دسته چهارم نیز برابر درصد فراوانی تجمعی دسته چهارم است.

۷۵. گزینه ۳. فرض کنیم میانگین داده‌های $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ برابر $\bar{x}$ و انحراف معیار آنها σ باشد با توجه به به اطلاعات مسأله در حالت نخست و حالت دوم $3\bar{x} = \bar{x} + 4$ که نتیجه می‌شود $\bar{x} = 1$ و همچنین $3\sigma - \sigma = 1$ که نتیجه می‌دهد $\sigma = 0.5$ ، در نهایت ضریب تغییرات داده‌های اولیه برابر است با:

$$c.v = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{0.5}{1} = 0.5$$

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی‌برداری؛ به اشتراک‌گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

فصل یازدهم، دستگاه مختصات و معادله خط

بخش اول: دستگاه‌های مختصات

نقطه در دستگاه مختصات قائم

دستگاه مختصات قائم متشکل از دو محور عمود بر هم طول‌ها و عرض‌ها است. محل تقاطع این دو محور را مبدأ مختصات می‌نامیم. با استفاده از دستگاه مختصات می‌توانیم مکان هر نقطه را با دو مؤلفه طول و عرض که در اصطلاح مختصات نقطه نام دارد مشخص کنیم. مختصات هر نقطه یک زوج مرتب مانند (x, y) است. ضمناً مختصات مبدأ را $(0, 0)$ در نظر می‌گیریم. محورهای مختصات صفحه را به چهار ناحیه تقسیم می‌کنند که به هر ناحیه یک ربع می‌گوییم.

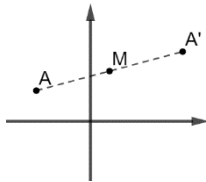
اگر یک نقطه روی محور طول‌ها باشد عرض آن صفر است به بیان دیگر مختصات هر نقطه روی محور طول‌ها به صورت $(x, 0)$ است. هم‌چنین اگر یک نقطه روی محور عرض‌ها باشد طول آن صفر است یعنی مختصات هر نقطه روی محور عرض‌ها به صورت $(0, y)$ است.

مختصات وسط یک پاره‌خط

اگر نقطه M وسط پاره‌خط AB باشد، مختصات نقطه M را با توجه به مختصات A, B به صورت زیر می‌توان تعیین نمود:

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی‌برداری؛ به اشتراک‌گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

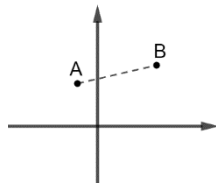


$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2}$$

$$y_M = \frac{y_A + y_B}{2}$$

فاصله دو نقطه در صفحه (محاسبه طول پارخط)

فاصله بین دو نقطه A, B را که با نماد $|AB|$ نشان می‌دهیم از دستور زیر می‌توان به دست آورد:



$$|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

مثال: نقطه‌ای روی محور طول‌ها مشخص کنید که از دو نقطه $B(-2, 3)$ و $C(4, -1)$ به یک فاصله باشد.

پاسخ: فرض کنیم $P(x_0, 0)$ ، نقطه مورد نظر روی محور طول‌ها باشد، طبق فرض $|PB| = |PC|$ بنابراین:

$$\begin{aligned} \sqrt{(x_B - x_P)^2 + (y_B - y_P)^2} \\ = \sqrt{(x_C - x_P)^2 + (y_C - y_P)^2} \end{aligned}$$

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی‌برداری؛ به اشتراک‌گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

$$\Rightarrow \sqrt{(-2 - x_0)^2 + (3 - 0)^2} = \sqrt{(4 - x_0)^2 + (-1 - 0)^2}$$

$$\Rightarrow (-2 - x_0)^2 + (3 - 0)^2 = (4 - x_0)^2 + (-1 - 0)^2$$

$$\Rightarrow x_0^2 + 4x_0 + 4 + 9 = x_0^2 - 8x_0 + 16 + 1$$

$$\Rightarrow 12x_0 = 4$$

$$\Rightarrow x_0 = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow P(x_0, 0) = \left(\frac{1}{3}, 0\right)$$

بخش دوم: معادله خط

رابطه‌ی بین مختصات نقاطی که بر یک خط قرار دارند معادله خط نام دارد. معادله خط را می‌توان به سه فرم نشان داد:

$$y = ax + b \quad , \quad ax + by = c \quad , \quad \begin{matrix} ax + by + c \\ = 0 \end{matrix}$$

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی‌برداری؛ به اشتراک‌گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

شیب خط: (ضریب زاویه خط)

تائزانت زاویه ای را که خط با جهت مثبت محور x ها می سازد، شیب خط می گوئیم و با m نشان می دهیم. شیب خط را به راه های متفاوت می توان پیدا کرد که در حالت های زیر موضوع را بررسی می کنیم.

۱. α زاویه خط با جهت مثبت محور x ها مشخص است. در این حالت شیب خط تائزانت α است، یعنی $m = \tan \alpha$.

۲. در معادله خط به فرم $y = ax + b$ ، $m = a$ و در فرم $ax + by = c$ یا $ax + by + c = 0$ داریم: $m = \frac{-a}{b}$.

۳. اگر مختصات دو نقطه از خط مشخص باشد آن گاه شیب خط را با استفاده از رابطه زیر تعیین می کنیم:

$$A(x_1, y_1) \quad B(x_2, y_2) \quad m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

مثال: خط گذرا بر نقاط $A(2, a)$ و $B(2a - 1, a + 7)$ با جهت مثبت محور x ها زاویه $\frac{3\pi}{4}$ می سازد، a کدام است؟

۲ (۴)

۱ (۳)

۱ (۲)

۲ (۱)

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی‌برداری؛ به اشتراک‌گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

پاسخ: گزینه ۴. شیب خط گذرنده از دو نقطه A و B برابر است با $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$ و از طرفی دیگر برابر است با $m = \tan \alpha$. بنابراین:

$$\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \tan \alpha \Rightarrow \frac{a + 7 - a}{2a - 1 - 2} = \tan \frac{3\pi}{4} \Rightarrow \frac{7}{2a - 3} = -1 \Rightarrow 2a - 3 = -7 \Rightarrow a = -2$$

تعیین معادله خط

معادله خط را با داشتن شیب خط و مختصات یک نقطه از آن می‌توان تعیین کرد. در این صورت معادله خط عبارت است از:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

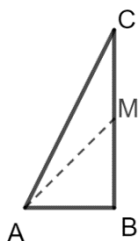
تست: معادله میانه AM در مثلثی که مختصات سه رأس آن $A(1,0)$ ، $B(2,0)$ و $C(2,2)$ باشد کدام است؟

$$y = x - 1 \quad (۴) \quad y = x + 2 \quad (۳) \quad y = -x \quad (۲) \quad y = -x + 1 \quad (۱)$$

پاسخ: گزینه ۴. مختصات نقطه M وسط پاره‌خط BC ، به صورت $M =$

$(2,1)$ است. شیب خط AM را به دست می‌آوریم:

$$m = \frac{y_M - y_A}{x_M - x_A} = \frac{1 - 0}{2 - 1} = 1$$



معادله خط AM به صورت زیر است:

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی‌برداری؛ به اشتراک‌گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و داندود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

$$y - y_A = m(x - x_A) \Rightarrow y - 0 = 1(x - 1) \Rightarrow y = x - 1$$

خطوط همسر (مقارب)

خطوط همسر خطوطی هستند که از یک نقطه ثابت می گذرند. برای یافتن نقطه همرسی کافی است به ازای دو مقدار دلخواه از پارامتر دسته خطوط، معادله دو خط از آن را مشخص کنیم و نقطه تقاطع آن دو خط را به کمک حل دستگاه دو معادله دو مجهولی به دست آوریم.

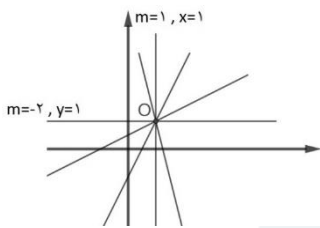
تست: کدام خط به دسته خطوط $2m = (2 + m)x + (m - 1)y - 1$ تعلق دارد؟

$$y = x + 1 \quad (۴)$$

$$y = 3x - 2 \quad (۳)$$

$$y = 3x + 1 \quad (۲)$$

$$y = 2x + 1 \quad (۱)$$



پاسخ: با فرض $m = -2$ ، معادله خطوط داده شده به معادله $(2 - 2)x + (-2 - 1)y - 1 = -4$ تبدیل می شود که ساده شده آن به صورت $y = 1$ است. اکنون با فرض $m = 1$ ، معادله خطوط داده شده به معادله $(2 + 1)x + (1 - 1)y - 1 = 2$ تبدیل می شود که ساده شده آن به صورت $x = 1$ است. بنابراین نقطه $O(1, 1)$ نقطه همرسی این دسته خطوط است و خط داده شده در گزینه سوم یعنی خط به معادله $y = 3x - 2$ ، شامل نقطه O است. یعنی این خط به این دسته خطوط تعلق دارد.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و داندود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

خطوط موازی

دو خط که شیب یکسان داشته باشند، موازی اند.

مثال: معادله خطی را بنویسید که از نقطه $(1, -3)$ گذشته و با خط $y = -6x + 1$ موازی باشد.

پاسخ: خط مورد نظر با خط $y = -6x + 1$ موازی است پس شیب آن ۶- است و چون از نقطه $(1, -3)$ می‌گذرد معادله‌اش به صورت زیر است:

$$y - (-3) = -6(x - 1) \Rightarrow y = -6x + 3$$

خطوط عمود بر هم

دو خط با شیب‌های m و m' هنگامی عمود بر هم اند که حاصل ضرب شیب‌هایشان برابر عدد ۱- شود، یعنی $m \times m' = -1$. اگر شیب یکی از خط‌ها را داشته باشیم برای به دست آوردن شیب خط عمود بر آن عدد اول را عکس و سپس قرینه می‌کنیم تا شیب خط عمود بر آن تعیین شود.

تست: به ازای چه مقدار m دو خط $y = 3x + 1$ و $y + mx + 2 = 0$ بر هم عمودند؟

$$(1) \quad 3 \quad (2) \quad \frac{1}{3} \quad (3) \quad -\frac{1}{3} \quad (4) \quad -3$$

پاسخ: شیب خط $y = 3x + 1$ برابر ۳ است و شیب خط $y + mx + 2 = 0$ برابر $-m$. چون دو خط بر هم عمودند، حاصل ضرب شیب‌هایشان عدد ۱- می‌شود، پس داریم:

$$-m \times 3 = -1 \Rightarrow m = \frac{1}{3}$$

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

فاصله یک نقطه از یک خط

فاصله نقطه $A(x_1, y_1)$ از خط به معادله $ax + by + c = 0$ از دستور زیر محاسبه می‌شود:

$$d = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

مثال: فاصله نقطه $(5, -3)$ را از خط به معادله $y = 2x - 1$ ، به دست آورید.

پاسخ: معادله خط باید به فرم $ax + by + c = 0$ تبدیل شود بنابراین فرم $y = 2x - 4$ به فرم $0 = 2x - y - 4$ تبدیل می‌شود و فاصله نقطه $(5, -3)$ از این خط برابر است با:

$$d = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|2(5) + (-1)(-3) - 4|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{9}{\sqrt{5}}$$

تست: نقطه $(2, -1)$ مرکز مربع و معادله یک ضلع آن به صورت $4x - 3y = a$ است. به ازای کدام مقدار a مساحت مربع ۱۶ واحد مربع است؟

(۱) -۲ (۲) -۱ (۳) ۱ (۴) ۲

پاسخ: گزینه ۳. فاصله مرکز مربع از یک ضلع آن به اندازه نصف طول ضلع مربع است. ابتدا فاصله نقطه $(2, -1)$ را از خط $4x - 3y - a = 0$ به دست می‌آوریم:

$$d = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|4(2) + (-3)(-1) - a|}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}} = \frac{|11 - a|}{5}$$

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و داندود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

پس طول ضلع مربع برابر $۲ \times \frac{|11-a|}{5}$ است و داریم:

$$S = \left(\frac{|11-a|}{5} \times 2\right)^2 = 16 \Rightarrow |11-a| = 10 \Rightarrow a = 1 \text{ یا } a = 21$$

فاصله دو خط موازی

فاصله دو خط موازی به معادله $ax + by + c = 0$ و $ax + by + c' = 0$ برابر است با:

$$\frac{|c - c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

مثال : فاصله دو خط موازی $y = x + 4$ و $y = x + 2$ را بیابید.

پاسخ: معادله دو خط به صورت $x - y + 4 = 0$ و $x - y + 2 = 0$ است و فاصله این دو خط موازی برابر است با:

$$\frac{|c - c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|4 - 2|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و داندود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی‌برداری؛ به اشتراک‌گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و داندود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

پرسش‌های چهارگزینه‌ای فصل یازدهم، دستگاه مختصات و معادله خط

۱. خط d دو خط عمود بر هم $5x - 7y = -4$ و $mx + ny = 1$ را در نقاط $(-1, 1)$ و $(2, 2)$ قطع می‌کند. مقدار n ، کدام است؟ (آموزش و پرورش - ۹۴)

- (۱) $-\frac{5}{2}$
- (۲) $\frac{5}{4}$
- (۳) $-\frac{1}{3}$
- (۴) $-\frac{1}{36}$

۲. سه نقطه $A(1, 3)$ ، $B(5, 6)$ و $C(8, 2)$ رؤس یک مثلث است. (بانک گردشگری - ۹۶)

- (۱) متساوی الساقین
- (۲) متساوی‌الاضلاع
- (۳) قائم‌الزاویه
- (۴) متساوی الساقین و قائم‌الزاویه

۳. دو خط $3x - 4by = 5$ و $ax + 3y = 10$ در نقطه $A(k, 2)$ بر هم عمودند. اگر نقطه A در ناحیه دوم باشد، مقدار ab کدام است؟ (دستگاه‌های اجرایی - فراگیر دوم - ۹۴)

- (۱) ۳
- (۲) $\frac{1}{4}$
- (۳) ۴
- (۴) $\frac{1}{3}$

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی‌برداری؛ به اشتراک‌گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و داندود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی‌برداری؛ به اشتراک‌گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

۴. اگر خطوط $2y - mx = 2$ و $y = (3n - 1)x$ با هم موازی باشند، کدام رابطه بین n و m برقرار است؟ (دیوان محاسبات - ۹۴)

$$(1) \quad 6n + m = 2$$

$$(2) \quad 6n - m = 2$$

$$(3) \quad 6n - m = -2$$

$$(4) \quad n + 6m = 2$$

۵. خط $y = b$ از محل تقاطع دو خط عمود $2x + 3y = 6$ و $ax + 2y = -12$ می‌گذرد. مقدار b کدام است؟ (دستگاه‌های اجرایی - فراگیر اول - ۹۴)

$$(1) \quad \frac{7}{19}$$

$$(2) \quad \frac{-6}{13}$$

$$(3) \quad \frac{8}{15}$$

$$(4) \quad \frac{-5}{11}$$

۶. دو خط $3x - 2y = 5$ و $ax + by = 1$ روی خط $x = -1$ همدیگر را قطع کرده اند. اگر خط d ، این دو خط متقاطع را در نقاط $(2, 4)$ و $(1, -1)$ قطع کند، حاصل $\frac{a}{b}$ کدام است؟ (آموزش و پرورش - ۹۴)

$$(1) \quad \frac{17}{6}$$

$$(2) \quad \frac{1}{3}$$

$$(3) \quad \frac{-7}{2}$$

$$(4) \quad \frac{-8}{3}$$

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی‌برداری؛ به اشتراک‌گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی‌برداری؛ به اشتراک‌گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

۷. معادله خطی که از مبدأ مختصات می‌گذرد و بر خط واصل نقاط $(۰,۴)$ و $(۶,۰)$ عمود است، کدام است؟ (دیوان محاسبات - ۹۴)

$$(۱) \quad ۲x + ۳y = ۰$$

$$(۲) \quad ۳x + ۲y = ۰$$

$$(۳) \quad ۳y - ۲x = ۰$$

$$(۴) \quad ۳x - ۲y = ۰$$

۸. اگر نقاط $A = \begin{bmatrix} ۱ \\ x \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} x \\ ۱ \end{bmatrix}$ روی محور مختصات نباشند و طول بردار $\overline{AB}$ برابر $\sqrt{۲}$ ، آن‌گاه مقدار x کدام است؟ (فراگیر پنجم و آموزش و پرورش - ۹۷)

$$(۱) \quad ۲$$

$$(۲) \quad ۴$$

$$(۳) \quad ۵$$

$$(۴) \quad ۱$$

۹. فاصله نقطه $A(۰,۱)$ از خط $۳x - ۴y + ۱ = ۰$ کدام است؟ (دستگاه‌های اجرایی - فراگیر ششم - ۹۷)

$$(۱) \quad ۱$$

$$(۲) \quad \frac{۴}{۵}$$

$$(۳) \quad \frac{۵}{۳}$$

$$(۴) \quad \frac{۱}{۵}$$

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی‌برداری؛ به اشتراک‌گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

۱۰. اگر $(a^2 - b, a) = (1, 2 - \frac{1}{a})$ ، آن گاه نقطه $(-3a + 1, 2b^2 + b - 1)$ در کدام ناحیه از صفحه مختصات واقع است؟ (فراگیر پنجم و آموزش و پرورش - ۹۷)

- (۱) سوم
- (۲) چهارم
- (۳) اول
- (۴) دوم

۱۱. فاصله مبدأ مختصات تا خط $y = ax + b$ برابر واحد است. اگر این خط از نقطه $(1, 2)$ بگذرد مقدار a کدام است؟ (فراگیر پنجم و آموزش و پرورش - ۹۷)

- (۱) $-\frac{1}{3}$
- (۲) $-\frac{1}{4}$
- (۳) $-\frac{1}{2}$
- (۴) $-\frac{1}{6}$

۱۲. دو خط $ax - y = -\frac{9}{4}$ و $-4x + y = 8a$ بر هم عمودند، مقدار a کدام است؟ (دانشگاه های علوم پزشکی و وزارت بهداشت - ۹۹)

- (۱) $\frac{1}{4}$
- (۲) $-\frac{1}{4}$
- (۳) $\frac{1}{4}$
- (۴) ۱

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و داندود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

۱۳. به ازای کدام مقادیر m خط $y = mx + m - 2$ از ناحیه دوم نمی‌گذرد؟
(دانشگاه‌های علوم پزشکی - ۹۹)

(۱) $0 \leq m \leq 2$

(۲) $m \geq 2$

(۳) $m \leq 0$

(۴) هیچ مقدار m

۱۴. دو نقطه $A(1, -2)$ و $B(-3, 0)$ دو سر قطری از یک مربع اند. مساحت مربع کدام است؟
(دستگاه‌های اجرایی - فراگیر ششم - ۹۷)

(۱) ۲۰

(۲) ۱۵

(۳) ۸

(۴) ۱۰

۱۵. عدد a را چنان تعیین کنید که سه نقطه $A = (1, -1)$ ، $B = (0, 2)$ و $C(a, -2a)$ بر روی یک خط راست واقع باشند؟ (دستگاه‌های اجرایی - فراگیر ششم - ۹۷)

(۱) -۲

(۲) ۲

(۳) ۱

(۴) -۱

۱۶. خطی که دارای شیب مثبت و عرض از مبدأ منفی باشد، از کدام ناحیه مختصات نمی‌گذرد؟
(فراگیر نهم - ۱۴۰۰)

(۱) اول

(۲) دوم

(۳) سوم

(۴) چهارم

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و داندود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

پاسخ پرسش‌های چهارگزینه‌ای فصل یازدهم، دستگاه مختصات و معادله

خط

۱. گزینه ۱. نقطه $(2, 2)$ روی خط به معادله $5x - 7y = -4$ قرار دارد و نقطه $(-1, 1)$ روی خط به معادله $mx + ny = 1$ بنابراین:

$$m(-1) + n(1) = 1 \Rightarrow n - m = 1$$

از این که دو خط $5x - 7y = -4$ و $mx + ny = 1$ بر هم عمودند نتیجه می‌شود حاصل ضرب شیب‌هایشان -1 است پس داریم:

$$\frac{5}{7} \times \frac{-m}{n} = -1 \Rightarrow 5m = 7n \Rightarrow 7n - 5m = 0$$

از حل دستگاه دو معادله دو مجهولی زیر مقدار n به دست می‌آید:

$$\begin{cases} n - m = 1 \\ 7n - 5m = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -5n + 5m = -5 \\ 7n - 5m = 0 \end{cases} \Rightarrow 2n = -5 \Rightarrow n = \frac{-5}{2}$$

۲. گزینه ۴. اندازه هر یک از اضلاع مثلث را به دست می‌آوریم:

$$|AB| = \sqrt{(5-1)^2 + (6-3)^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5$$

$$|AC| = \sqrt{(8-1)^2 + (2-3)^2} = \sqrt{7^2 + 1^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

$$|BC| = \sqrt{(8-5)^2 + (2-6)^2} = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = \sqrt{25} = 5$$

اول این که $|AB| = |BC|$ و دوم این که، اندازه اضلاع این مثلث در رابطه فیثاغورس صدق می کنند یعنی:

$$5^2 + 5^2 = (5\sqrt{2})^2 \Rightarrow |AB|^2 + |BC|^2 = |AC|^2$$

پس این مثلث قائم الزاویه نیز است.

۳. گزینه ۳. نقطه $A(k, 2)$ در هر دو معادله $3x - 4by = 5$ و $ax + 3y = 10$ صدق می کند:

$$\begin{cases} 3k - 4b \times 2 = 5 \\ ak + 3 \times 2 = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3k - 8b = 5 \\ ak = 4 \end{cases}$$

هم چنین دو خط بر هم عمودند پس حاصل ضرب شیب هایشان برابر -۱ است.

$$\frac{3}{4b} \times \frac{-a}{3} = -1 \Rightarrow a = 4b \Rightarrow b = \frac{a}{4}$$

از معادله $ak = 4$ نتیجه می شود $a = \frac{4}{k}$ بنابراین $b = \frac{a}{4} = \frac{\frac{4}{k}}{4} = \frac{1}{k}$ و معادله $3k - 8b = 5$ به صورت $3k - \frac{8}{k} = 5$ تبدیل می شود. این معادله را حل می کنیم:

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و داندود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

$$3k - \frac{8}{k} = 5 \Rightarrow 3k^2 - 8 = 5k \Rightarrow 3k^2 - 5k - 8 = 0 \Rightarrow (k+1)(3k-8) = 0 \Rightarrow k = -1 \text{ یا } k = \frac{8}{3}$$

چون نقطه $A(k, 2)$ در ناحیه دوم قرار دارد نتیجه می شود مقدار منفی است بنابراین $k = -1$. نتیجه می شود $a = -4$ و $b = -1$ پس

$$ab = (-4) \times (-1) = 4$$

۴. گزینه ۲. شیب خط $2y - mx = 2$ برابر با $\frac{m}{2}$ و شیب خط $y = (3n-1)x$ برابر $3n-1$ است و چون این دو خط موازی اند، شیب برابر دارند لذا:

$$3n-1 = \frac{m}{2} \Rightarrow 6n-2 = m \Rightarrow 6n-m = 2$$

۵. گزینه ۲. دو خط $2x + 3y = 6$ و $ax + 2y = -12$ بر هم عمود اند پس $\frac{-2}{3} \times \frac{-a}{2} = -1$ بنابراین $a = -3$. معادلات دو خط را بازنویسی کرده و در یک دستگاه دو معادله دو مجهولی نقطه تقاطع دو خط را به دست می آوریم:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 6 \\ -3x + 2y = -12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6x + 9y = 18 \\ -6x + 4y = -24 \end{cases} \Rightarrow 13y = -6 \Rightarrow y = b = \frac{-6}{13}$$

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و داندود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی‌برداری؛ به اشتراک‌گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

۶. گزینه ۴. نقطه $(1, -1)$ روی خط به معادله $3x - 2y = 5$ قرار دارد و نقطه $(2, 4)$ روی خط به معادله $ax + by = 1$ بنابراین:

$$a(2) + b(4) = 1 \Rightarrow 2a + 4b = 1$$

به ازای $x = -1$ در خط $3x - 2y = 5$ مقدار $y = -4$ به دست می‌آید و نقطه $(-1, -4)$ روی هر دو خط واقع است بنابراین:

$$a(-1) + b(-4) = 1 \Rightarrow -a - 4b = 1$$

از جمع طرفین دو معادله $2a + 4b = 1$ و $-a - 4b = 1$ نتیجه می‌شود $a = 2$ و سپس نتیجه می‌شود $b = -\frac{3}{4}$ بنابراین:

$$\frac{a}{b} = \frac{2}{-\frac{3}{4}} = -\frac{8}{3}$$

۷. گزینه ۲. شیب خط واصل نقاط $(6, 0)$ و $(0, 4)$ برابر $m = \frac{0-4}{6-0} = -\frac{2}{3}$ است و شیب خط عمود بر آن $m' = \frac{3}{2}$ معادله خط گذرنده از مبدأ مختصات با شیب $m' = \frac{3}{2}$ برابر است با:

$$y - 0 = \frac{3}{2}(x - 0) \Rightarrow 2y = 3x \Rightarrow 3x + 2y = 0$$

۸. گزینه ۱.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی‌برداری؛ به اشتراک‌گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی‌برداری؛ به اشتراک‌گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(x - 1)^2 + (1 - x)^2} = \sqrt{2}$$

بنابراین داریم:

$$(x - 1)^2 + (1 - x)^2 = 2 \Rightarrow 2x^2 - 4x = 0 \Rightarrow 2x(x - 2) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ یا } x = 2$$

این که نقاط A و B روی محور مختصات نیستند نشان می‌دهد $x \neq 0$ بنابراین $x = 2$.

۹. گزینه ۳.

$$d = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|3(0) + (-4)(1) + 1|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{|-3|}{5} = \frac{3}{5}$$

۱۰. گزینه ۲. از $(a^2 - b, a) = (1, 2 - \frac{1}{a})$ نتیجه می‌شود:

$$a^2 - b = 1, \quad a = 2 - \frac{1}{a}$$

از $a = 2 - \frac{1}{a}$ نتیجه می‌شود $a = 1$ و از $a^2 - b = 1$ نتیجه می‌شود $b = 0$ ، پس نقطه $(-1, 2b^2 + b - 1, -3a + 1)$ به صورت $(-2, -1)$ است و در ناحیه چهارم قرار دارد.

۱۱. گزینه ۴. فاصله نقطه $(0, 0)$ از خط $ax - y + b = 0$ برابر واحد است پس داریم:

$$d = \frac{|b|}{\sqrt{a^2 + (-1)^2}} = 1 \Rightarrow a^2 + 1 = b^2$$

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی‌برداری؛ به اشتراک‌گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی‌برداری؛ به اشتراک‌گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و داندود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

از این‌که این خط از نقطه $(1, 2)$ می‌گذرد نتیجه می‌شود $2 = a + b$ و لذا $b = 2 - a$. بنابراین:

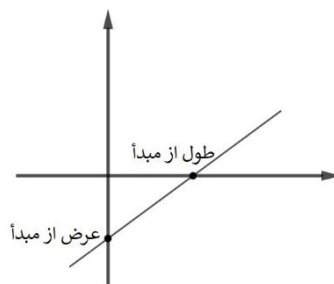
$$a^2 + 1 = b^2 \Rightarrow a^2 + 1 = (2 - a)^2 \Rightarrow a^2 + 1 = 4 - 2a + a^2 \Rightarrow 2a = 3 \Rightarrow a = \frac{3}{2}$$

۱۲. گزینه ۲. شیب خط $ax - y = -\frac{9}{4}$ برابر a است و شیب خط $-4x + y = 8a$ برابر ۴. از این‌که دو خط بر هم عمودند داریم:

$$4a = -1 \Rightarrow a = -\frac{1}{4}$$

۱۳. گزینه ۳. طول از مبدأ خطی که از ناحیه دوم نمی‌گذرد، عددی نامنفی و عرض از مبدأ آن نا مثبت است. برای به‌دست آوردن طول از مبدأ خط $y = mx + m - 2$ در معادله مقدار $y = 0$ قرار می‌دهیم در این صورت $mx + m - 2 = 0$ بنابراین مقدار طول از مبدأ برابر $x = \frac{-m+2}{m}$ است. عرض از مبدأ این خط برابر $y = m - 2$ است و حاصل ضرب طول از مبدأ در عرض از مبدأ عددی کوچکتر یا مساوی صفر می‌شود. این نامعادله را حل می‌کنیم تا محدوده مقادیر m را بیابیم.

$$\frac{-m+2}{m} \times (m-2) \leq 0 \Rightarrow \frac{-(m-2)}{m} \times (m-2) \leq 0 \Rightarrow \frac{-(m-2)^2}{m} \leq 0 \Rightarrow m \leq 0$$



این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی‌برداری؛ به اشتراک‌گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و داندود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و داندود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

۱۴. گزینه ۴. $|AB|$ قطر مربع است و مساحت مربع را نیز می توان، مطابق دستور محاسبه مساحت لوزی محاسبه کرد:

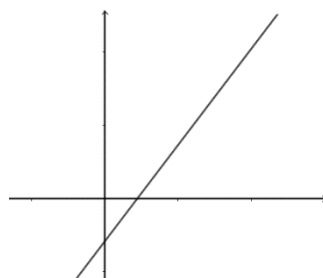
$$|AB| = \sqrt{(1 - (-3))^2 + (-2 - 0)^2} = \sqrt{20}$$

$$S = \frac{\text{قطر}^2}{2} = \frac{\sqrt{20}^2}{2} = 10$$

۱۵. گزینه ۲. برای آن که سه نقطه A ، B و C بر یک خط راست واقع باشند، لازم است شیب خط گذرنده از A و B با شیب خط گذرنده از A و C یکسان باشد بنابراین:

$$m_{AB} = m_{AC} \Rightarrow \frac{2 - (-1)}{0 - 1} = \frac{-2a - (-1)}{a - 1} \Rightarrow \frac{3}{-1} = \frac{-2a + 1}{a - 1} \Rightarrow 3a - 3 = 2a - 1 \Rightarrow a = 2$$

۱۶. گزینه ۲. این خط محور عرض ها را در نقطه ای به عرض منفی قطع می کند و چون شیب مثبت دارد، از ناحیه دوم نمی گذرد.



این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و داندود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

فصل دوازدهم: هندسه

متوازی الاضلاع

یک چهارضلعی است که اضلاع روبه روی آن با هم موازی هستند. اندازه اضلاع و زوایای روبه رو در متوازی الاضلاع با هم برابر است. قطرهای متوازی الاضلاع همدیگر را نصف می کنند. مساحت متوازی الاضلاع برابر با حاصل ضرب اندازه قاعده و ارتفاع نظیر آن است.



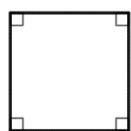
$$\text{ارتفاع} \times \text{قاعده} = \text{مساحت متوازی الاضلاع}$$

مربع

مربع نوعی متوازی الاضلاع است، که اندازه چهار ضلع آن با هم برابرند و با یکدیگر دو به دو زاویه ۹۰ درجه (قائمه) می سازند. در مربع، قطرهای با هم برابرند، همدیگر را نصف می کنند و بر هم عمودند. محیط هر چندضلعی، مجموع اندازه اضلاع آن است و چون در مربع اضلاع برابرند، محیط، چهار برابر اندازه ضلع است. مساحت مربع، توان دوم اندازه ضلع آن است، به بیانی دیگر مساحت مربع برابر یک ضلع ضربدر خودش است.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی‌برداری؛ به اشتراک‌گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و داندود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

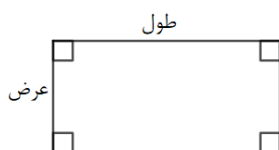


۴ × اندازه ضلع = محیط مربع

$(\text{اندازه ضلع})^2 = \text{مساحت مربع}$

مستطیل

مستطیل نوعی متوازی‌الاضلاع است که هر دو ضلع مجاور برهم عمودند. در مستطیل اضلاع روبرو با هم برابرند، قطرهای نیز با هم برابرند و همدیگر را نصف می‌کنند. مساحت مستطیل برابر حاصل ضرب طول و عرض آن است.



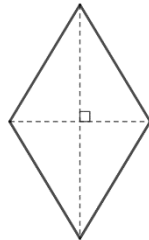
عرض × طول = مساحت مستطیل

لوزی

لوزی نوعی متوازی‌الاضلاع است که اضلاع آن با هم برابرند. در لوزی زوایای روبرو با هم برابرند. قطرهای لوزی بر هم عمودند و همدیگر را نصف می‌کنند. مساحت لوزی برابر نصف حاصل ضرب اندازه دو قطر آن است.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی‌برداری؛ به اشتراک‌گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و داندود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

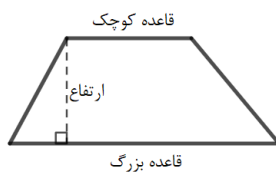
این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و داندود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.



$$\text{مساحت لوزی} = \frac{\text{قطر کوچک} \times \text{قطر بزرگ}}{۲}$$

دوزنقه

دوزنقه، چهارضلعی است که دو ضلع آن با هم موازی باشند. مساحت دوزنقه از طریق فرمول زیر به دست می آید:



$$\text{مساحت دوزنقه} = \frac{(\text{قاعده کوچک} + \text{قاعده بزرگ}) \times \text{ارتفاع}}{۲}$$

تست: در یک دوزنقه، خطی که وسط ساقها را به هم وصل می کند مساحت آن را به نسبت ۳ به ۵ تقسیم می کند. نسبت قاعده های دوزنقه کدام است؟

$$\frac{۳}{۵} \quad (۴)$$

$$\frac{۲}{۵} \quad (۳)$$

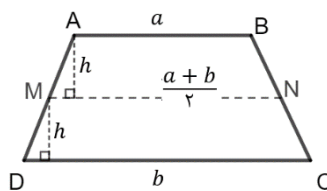
$$\frac{۱}{۳} \quad (۲)$$

$$\frac{۱}{۴} \quad (۱)$$

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و داندود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

پاسخ: گزینه ۲. در دوزنقه $ABCD$ ، اندازه قاعده‌ها را a و b در نظر می‌گیریم. فرض کنیم MN خطی است که وسط دو ساق را به هم وصل می‌کند در این صورت اندازه MN برابر $\frac{a+b}{2}$ است. ارتفاع هر دو دوزنقه $ABNM$ و $MNCD$ یکسان است که اندازه آن را h در نظر می‌گیریم. نسبت مساحت این دو دوزنقه ۳ به ۵ است پس داریم:

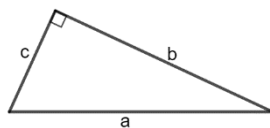


$$\begin{aligned} \left(\frac{a+b}{2} + a\right) \times h &= \frac{a+b}{2} + a \quad 3 \Rightarrow \frac{3a+b}{2} = \frac{3}{5} \\ \Rightarrow 15a + 5b &= 9b + 3a \Rightarrow 12a = 4b \quad a = 1 \end{aligned}$$

مثلث‌ها

مثلث قائم‌الزاویه

مثلثی است که یک زاویه قائمه دارد. در مثلث قائم‌الزاویه، ضلع روبرو به زاویه قائمه، وتر نام دارد. در مثلث قائم‌الزاویه، قضیه فیثاغورس برقرار است.

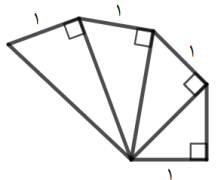


$$a^2 = b^2 + c^2 \quad \text{قضیه فیثاغورس}$$

$$\text{مساحت} = \frac{\text{ارتفاع} \times \text{قاعده}}{2}$$

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی‌برداری؛ به اشتراک‌گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و داندود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.



تست: مثلث‌های قائم‌الزاویه که در یک رأس مشترک هستند و اندازه یک ضلع قائم آن‌ها ۱ واحد است چنان رسم می‌شوند که ضلع قائم دیگر آن‌ها وتر مثلث قبلی است. مساحت نهمین مثلث، کدام است؟

$$\frac{3}{2} (۴)$$

$$\sqrt{2} (۳)$$

$$\frac{5}{4} (۲)$$

$$\frac{3}{4} (۱)$$

پاسخ: گزینه ۴. بنابر قضیه فیثاغورس، اندازه وتر مثلث‌های قائم‌الزاویه ایجاد شده به ترتیب $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4}, \sqrt{5}, \dots$ است. بنابراین اندازه اضلاع نهمین مثلث ایجاد شده ۱، $\sqrt{9}$ و $\sqrt{10}$ است و مساحت آن برابر است با:

$$S = \frac{\sqrt{9} \times 1}{2} = \frac{3}{2}$$

تست: طول ارتفاع وارد بر وتر مثلث قائم‌الزاویه‌ای که دو ضلع زاویه قائمه آن ۵ و ۱۲ واحد است، کدام است؟

$$\frac{60}{11} (۴)$$

$$\frac{60}{13} (۳)$$

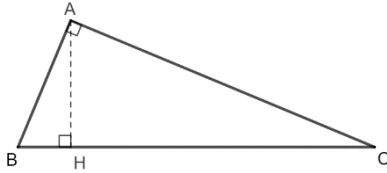
$$\frac{30}{11} (۲)$$

$$\frac{30}{7} (۱)$$

پاسخ: گزینه ۳. فرض کنیم ABC ، مثلث قائم‌الزاویه مورد نظر باشد و $AB = 5$ و $AC = 12$. بنابر قضیه فیثاغورس داریم:

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی‌برداری؛ به اشتراک‌گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و داندود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی‌برداری؛ به اشتراک‌گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و داندود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.



$$BC^2 = AB^2 + AC^2 = 5^2 + 12^2 = 169 \Rightarrow BC = 13$$

مساحت مثلث را می‌توان به دو طریق زیر به دست آورد:

$$S = \frac{AB \times AC}{2} \qquad S = \frac{BC \times AH}{2}$$

بنابراین:

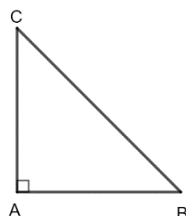
$$\frac{AB \times AC}{2} = \frac{BC \times AH}{2} \Rightarrow AB \times AC = BC \times AH \Rightarrow AH = \frac{AB \times AC}{BC} = \frac{5 \times 12}{13} = \frac{60}{13}$$

مثلث قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین

مهم‌ترین نکته‌ای که درباره مثلث قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین، باید بدانیم این است که در این مثلث، اندازه وتر $\sqrt{2}$ برابر اندازه هر یک از اضلاع زاویه قائمه است.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی‌برداری؛ به اشتراک‌گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و داندود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

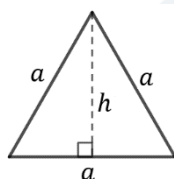
این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.



$$BC = \sqrt{2}AB = \sqrt{2}AC$$

مثلث متساوی الاضلاع

مثلثی است که اندازه هر سه ضلع آن برابر است. در مثلث متساوی الاضلاع، هر زاویه ۶۰ درجه است.



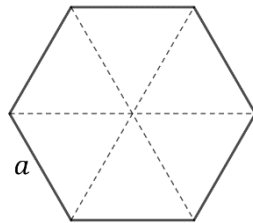
$$\text{مساحت} = \frac{ah}{2} \quad \text{یا} \quad \text{مساحت} = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$$

شش ضلعی منتظم

شش ضلعی است که شش ضلع برابر و شش زاویه برابر دارد. اگر قطرهای بزرگ شش ضلعی منتظم را رسم کنیم، شش مثلث متساوی الاضلاع در آن ایجاد می شود بنابراین مساحت شش ضلعی منتظم به ضلع a برابر با $a^2 \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times 6$ است.

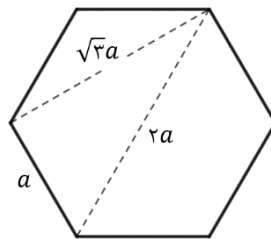
این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی‌برداری؛ به اشتراک‌گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

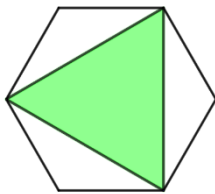


$$\text{مساحت} = 6 \times \frac{\sqrt{3}}{4} a^2$$

قطر بزرگ شش ضلعی منتظم ۲ برابر طول ضلع آن است و قطر کوچک آن $\sqrt{3}a$ برابر طول ضلع



تست: اگر طول ضلع شش ضلعی منتظم شکل زیر ۴ واحد باشد آنگاه مساحت مثلث سایه زده، چند واحد مربع است؟



$$(1) 12\sqrt{3}$$

$$(2) 16\sqrt{2}$$

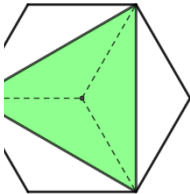
$$(3) 16\sqrt{3}$$

$$(4) 18\sqrt{2}$$

پاسخ: گزینه ۱

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی‌برداری؛ به اشتراک‌گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی‌برداری؛ به اشتراک‌گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و داندود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.



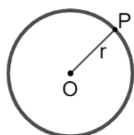
مساحت شش ضلعی منتظم به طول ضلع ۴ واحد برابر است با:

$$S = 6 \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times 4^2 = 24\sqrt{3}$$

با توجه به شکل مقابل مساحت مثلث سایه زده نصف مساحت شش ضلعی و برابر با $12\sqrt{3}$ است.

دایره

مجموعه نقاطی از صفحه که فاصله آن‌ها از یک نقطه ثابت، مقداری ثابت است. نقطه ثابت، مرکز و آن مقدار ثابت، شعاع نام دارد.



$$\text{محیط} = 2\pi r$$

$$\text{مساحت} = \pi r^2$$

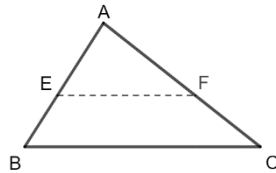
قضیه تالس و تشابه مثلث‌ها

قضیه تالس: خطی که موازی با یک ضلع مثلثی رسم شود، دو ضلع دیگر را به یک نسبت قطع می‌کند.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی‌برداری؛ به اشتراک‌گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و داندود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

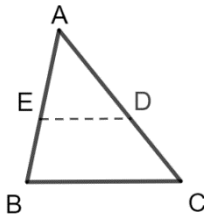
این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی‌برداری؛ به اشتراک‌گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

فرض: BC و EF موازی اند.



حکم: $\frac{AE}{EB} = \frac{AF}{FC}$

مثال: در شکل زیر ED موازی BC است و $AE = ۸$ ، $EB = ۶$ و $AD = ۹$. طول DC کدام است؟



- (۱) ۶.۲۵
- (۲) ۶.۵
- (۳) ۶.۷۵
- (۴) ۶

پاسخ: گزینه ۳. بنابر قضیه تالس $\frac{AE}{EB} = \frac{AD}{DC}$. بنابراین:

$$\frac{AE}{EB} = \frac{AD}{DC} \Rightarrow \frac{۸}{۶} = \frac{۹}{DC} \Rightarrow DC = \frac{۹ \times ۶}{۸} = ۶.۷۵$$

مثلث‌های متشابه

تعریف: دو مثلث را متشابه گوییم هرگاه زاویه‌های آن‌ها نظیر به نظیر مساوی و اضلاع آن‌ها نظیر به نظیر با هم متناسب باشند. در دو مثلث متشابه، نسبت هر دو ضلع متناظر را نسبت تشابه می‌گوییم.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی‌برداری؛ به اشتراک‌گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و داندود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

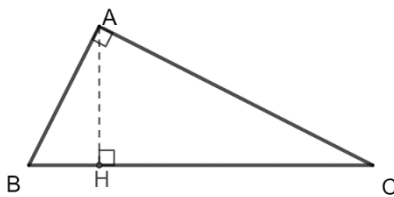
دو مثلث در سه حالت متشابه اند:

۱. وقتی که دو زاویه یکی با دو زاویه دیگری برابر باشند.

۲. وقتی که یک زاویه یکی با یک زاویه دیگری برابر و اضلاع آن زاویه ها متناسب باشند.

۳. وقتی که سه ضلع یکی با سه ضلع دیگری متناسب باشد.

قضیه: در مثلث قائم الزاویه، ارتفاع وارد بر وتر، مثلث را به دو مثلث تجزیه می کند که هر یک با مثلث اصلی، و هر دو با یکدیگر متشابه اند.



$$AHB \cong CHA \Rightarrow \frac{AH}{CH} = \frac{AB}{CA} = \frac{HB}{HA}$$

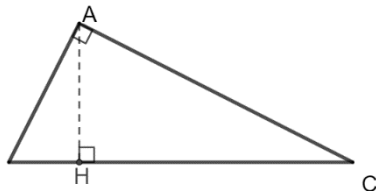
$$AHB \cong CAB \Rightarrow \frac{AH}{CA} = \frac{AB}{CB} = \frac{HB}{AB}$$

$$CHA \cong CAB \Rightarrow \frac{CH}{CA} = \frac{CA}{CB} = \frac{HA}{AB}$$

قضیه: در مثلث قائم الزاویه، ارتفاع وارد بر وتر، واسطه هندسی دو قطعه ایجاد شده روی وتر است.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و داندود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.



$$AHB \cong CHA \Rightarrow \frac{AH}{CH} = \frac{AB}{CA} = \frac{HB}{HA} \Rightarrow AH^2 = CH \times HB$$

تست: در یک مثلث قائم الزاویه، اندازه دو پاره خطی که ارتفاع وارد بر وتر، روی وتر ایجاد می کند ۲۵ و ۱۴۴ واحد است، طول ارتفاع وارد بر وتر، چند واحد است؟

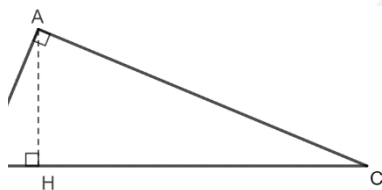
۸۰ (۴)

۷۲ (۳)

۶۰ (۲)

۴۸ (۱)

پاسخ: گزینه ۲. در مثلث قائم الزاویه، ارتفاع وارد بر وتر، واسطه هندسی دو قطعه ایجاد شده روی وتر است بنابراین:



$$AH^2 = BH \times HC = 25 \times 144 \Rightarrow AH = \sqrt{25 \times 144} = 60$$

قضیه: در دو مثلث متشابه، نسبت مساحت ها برابر با مربع نسبت تشابه دو مثلث است.

تست: در یک مثلث قائم الزاویه از وسط وتر، عمودی بر ضلع قائم فرود می آوریم تا مثلث جدیدی حاصل شود. مساحت مثلث اصلی چند برابر مساحت مثلث جدید است؟

۳ (۴)

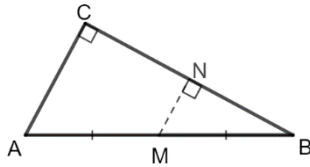
۴ (۳)

۵ (۲)

۶ (۱)

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.



پاسخ: گزینه ۳. دو مثلث ABC و MBN متشابه اند و نسبت تشابه این دو مثلث ۲ است، بنابراین نسبت مساحت این دو برابر $۲^۲ = ۴$ است.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی‌برداری؛ به اشتراک‌گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

پرسش‌های چهارگزینه‌ای فصل دوازدهم، هندسه

۱. نسبت تشابه دو مثلث قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین $\frac{5}{p}$ است، اگر مساحت مثلث کوچکتر ۸ باشد، طول وتر مثلث بزرگ‌تر کدام است؟ (آموزش و پرورش - ۹۵)

(۱) ۵

(۲) ۱۰

(۳) $10\sqrt{2}$

(۴) $5\sqrt{2}$

۲. دو خط l و d در نقطه A متقاطع هستند چند نقطه روی این خط‌ها وجود دارد که فاصله آن‌ها از نقطه A برابر ۵ باشد؟ (فراگیر هفتم، آموزش و پرورش و علوم پزشکی - ۹۸)

(۱) ۴

(۲) ۲

(۳) ۱

(۴) وجود ندارد.

۳. مساحت شش ضلعی منتظمی به ضلع $\sqrt{12}$ چند برابر طول کوچک‌ترین قطر این شش ضلعی است؟ (فراگیر هشتم و آموزش و پرورش - ۹۹)

(۱) $12\sqrt{3}$

(۲) $3\sqrt{3}$

(۳) $4\sqrt{3}$

(۴) $6\sqrt{3}$

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی‌برداری؛ به اشتراک‌گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن ([لینک خرید](#))، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

۴. مثلی با اضلاع ۳، ۵ و ۷ با مثلی با اضلاع ۴، a و b متشابه است. اگر a و b بزرگتر از ۴ باشد، آن گاه مقدار $a + b$ کدام است؟ (فراگیر هشتم و آموزش و پرورش - ۹۹)

(۱) ۱۵

(۲) ۱۶

(۳) $\frac{۴۹}{۳}$ (۴) $\frac{۴۴}{۳}$

۵. محیط هر دایره چند برابر طول شعاع آن است؟ (دانشگاه های علوم پزشکی و وزارت بهداشت

- ۹۹)

(۱) کمی بیشتر از ۶

(۲) ۶

(۳) ۴

(۴) ۲

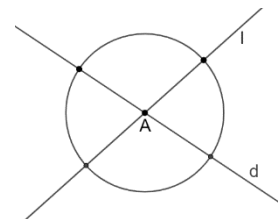
این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن ([لینک خرید](#))، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی‌برداری؛ به اشتراک‌گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و داندود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

پاسخ پرسش‌های چهارگزینه‌ای فصل دوازدهم، هندسه

۱. گزینه ۳. اگر طول ضلع زاویه‌های قائمه مثلث کوچک را a فرض کنیم، آن‌گاه مساحت آن برابر $S = \frac{a \times a}{2} = 8$ می‌شود، از این‌جا $a = 4$. از این‌که نسبت تشابه این دو مثلث است $\frac{5}{4}$ نتیجه می‌گیریم طول ضلع زاویه‌های قائمه مثلث بزرگ‌تر $10 = 4 \times \frac{5}{4}$ است. و در آخر طول وتر آن برابر است با: $10\sqrt{2}$

۲. گزینه ۴. مجموعه نقاطی که از نقطه A به فاصله ۵ واحد اند، نقاط روی دایره به مرکز A و شعاع ۵ واحد اند. این دایره، دو خط l و d را در چهار نقطه قطع می‌کنند. این نقاط، نقاط مطلوب اند.



۳. گزینه ۲. مساحت شش ضلعی منتظم به طول ضلع $\sqrt{12}$ برابر است با:

$$S = 6 \times \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 = 6 \times \frac{\sqrt{3}}{4} (\sqrt{12})^2 = 18\sqrt{3}$$

کوچک‌ترین قطر شش ضلعی، $\sqrt{3}$ برابر طول ضلع آن است و برابر است با:

$$\sqrt{12} \times \sqrt{3} = \sqrt{36} = 6$$

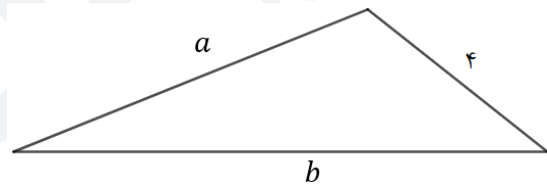
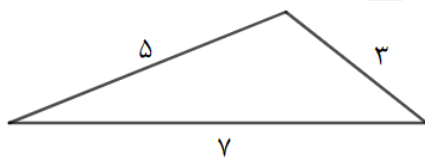
این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی‌برداری؛ به اشتراک‌گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و داندود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و داندود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

نسبت این دو عدد $\frac{18\sqrt{3}}{6} = 3\sqrt{3}$ است.

۴. گزینه ۲. با توجه به این که a و b بزرگتر از ۴ اند، نسبت اضلاع به صورت $\frac{3}{4} = \frac{5}{a} = \frac{7}{b}$ است. بنابراین، $a = \frac{20}{3}$ و $b = \frac{28}{3}$ پس داریم:

$$a + b = \frac{20}{3} + \frac{28}{3} = \frac{48}{3} = 16$$



۵. گزینه ۱. محیط دایره به شعاع r برابر $2\pi r$ است، بنابراین محیط هر دایره 2π برابر شعاع خود است. با توجه به این که $\pi \approx 3.14$ نتیجه می شود $2\pi \approx 2 \times 3.14 = 6.28$.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و داندود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی‌برداری؛ به اشتراک‌گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

فصل سیزدهم، ماتریس‌ها

بخش اول: آشنایی با ماتریس

یک ماتریس از مرتبه $m \times n$ مانند A یک آرایه مستطیلی از mn عدد است که در m سطر و n ستون آرایش یافته است.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

درایه ij - ام A ، که با a_{ij} نمایش داده می‌شود، عددی است که در سطر i - ام و ستون j - ام A آمده است. ماتریس‌ها معمولاً با حروف بزرگ نمایش داده می‌شوند.

مثال: $A = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 5 \\ 1 & \frac{6}{v} & \sqrt{3} \end{bmatrix}$ یک ماتریس از مرتبه 2×3 است زیرا دارای دو سطر و سه ستون است، $B = \begin{bmatrix} 6 & -8 \end{bmatrix}$ یک ماتریس از مرتبه 1×2 است.

یک ماتریس را مربعی می‌نامیم هرگاه تعداد سطرها و ستون‌های آن برابر باشند. فرض کنیم A یک ماتریس مربعی $n \times n$ باشد، درایه‌های a_{11} ، a_{22} ، $\dots$ و a_{nn} را درایه‌های قطر اصلی ماتریس A می‌نامیم. در ماتریس زیر اعداد ۱، ۶ و ۹ درایه‌های قطر اصلی اند.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی‌برداری؛ به اشتراک‌گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 6 & 3 \\ 7 & 5 & 9 \end{bmatrix}$$

مثال: $A = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 7 & 3 \end{bmatrix}$ یک ماتریس مربعی 2×2 است و $B = \begin{bmatrix} 7 & 3 & -5 \\ 4 & 11 & 8 \\ -4 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ یک ماتریس مربعی 3×3 .

بخش دوم: جبر ماتریس‌ها

جبر ماتریس‌ها، یعنی قواعدی که با آن‌ها می‌توان ماتریس‌ها را با هم جمع و در هم ضرب کرد.

جمع ماتریس‌ها

فرض کنیم A و B دو ماتریس هم مرتبه باشند، ماتریس $A + B$ ، ماتریسی از همان مرتبه A و B است که هر درایه آن، از جمع درایه‌های نظیر A و B به دست می‌آید. به مثال زیر توجه کنید.

$$\begin{bmatrix} 7 & 3 & -5 \\ 4 & -11 & 8 \\ 9 & 2 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -4 & 4 \\ 4 & 6 & 23 \\ -4 & 8 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7+1 & 3-4 & -5+4 \\ 4+4 & -11+6 & 8+23 \\ 9-4 & 2+8 & 0-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & -1 & -1 \\ 8 & -5 & 31 \\ 5 & 10 & -3 \end{bmatrix}$$

ضرب یک عدد حقیقی در یک ماتریس

هرگاه A یک ماتریس و r یک عدد حقیقی باشد، rA ، ماتریسی است هم مرتبه با ماتریس A و هر درایه آن از ضرب عدد r در درایه نظیر آن از ماتریس A به دست می‌آید. به مثال زیر توجه کنید.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

$$3 \times \begin{bmatrix} 7 & 3 & -5 \\ 4 & 11 & 8 \\ 9 & 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21 & 9 & -15 \\ 12 & 33 & 24 \\ 27 & 6 & 0 \end{bmatrix}$$

قرینه یک ماتریس

قرینه ماتریس A ، ماتریسی است که از ضرب عدد ۱، در هر درایه A به دست می‌آید که آن را با $-A$ نشان می‌دهیم. به عنوان یک مثال ماتریس A و قرینه آن در زیر آمده است.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 6 \\ 7 & 9 & -11 \end{bmatrix} \Rightarrow -A = \begin{bmatrix} -3 & 4 & -6 \\ -7 & -9 & 11 \end{bmatrix}$$

ماتریس از مرتبه $m \times n$ که همه درایه‌های صفر باشند، ماتریس صفر از مرتبه $m \times n$ نام دارد که آن را با نماد $\vec{0}$ نشان می‌دهیم.

به عنوان مثال، ماتریس زیر، ماتریس صفر 2×2 است.

$$\vec{0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

قضیه: فرض کنیم A ، B و C سه ماتریس هم مرتبه و r یک عدد حقیقی باشد، در این صورت:

$$A + B = B + A \quad ۱. \text{ جمع ماتریس‌ها، خاصیت جابجایی دارد.}$$

$$A + (B + C) = (A + B) + C \quad ۲. \text{ جمع ماتریس‌ها، خاصیت شرکت‌پذیری دارد.}$$

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

$$A + \bar{0} = \bar{0} + A = A \quad ۳.$$

وجود عضو خنثی در عمل جمع ماتریسی

$$A + (-A) = -A + A = \bar{0} \quad ۴.$$

وجود عضو قرینه در عمل جمع ماتریسی

$$r(A + B) = rA + rB \quad ۵.$$

پخش ضرب عدد حقیقی نسبت به جمع
ماتریسی

ضرب ماتریس‌ها

فرض کنیم $A = (a_{ij})_{m \times n}$ و $B = (b_{ij})_{n \times p}$ دو ماتریس باشند. در این صورت حاصل ضرب A در B یعنی $A \times B$ یک ماتریس $m \times p$ است که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$A \times B = (C_{ij})_{m \times p} \quad \text{و} \quad C_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj}$$

ممکن است این تعریف به نظر دشوار باشد، اگر این تعریف را متوجه نمی‌شوید نگران نباشید! به حاصل ضرب دو ماتریس زیر دقت کنید:

$$A \times B = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 22 \\ 19 & 38 \end{bmatrix}$$

درایه سطر اول، ستون اول ماتریس $A \times B$ ، عدد ۱۱ است این عدد از ضرب سطر اول ماتریس A در ستون اول ماتریس B ، به دست آمده است.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و داندود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

$$2 \times 3 + 5 \times 1 = 11$$

ستون اول

درایه سطر اول، ستون دوم ماتریس $A \times B$ ، عدد ۲۲ است این عدد از ضرب سطر اول ماتریس A در ستون دوم ماتریس B ، به دست آمده است.

$$2 \times 6 + 5 \times 2 = 22$$

ستون دوم

درایه سطر دوم، ستون اول ماتریس $A \times B$ ، عدد ۱۹ است این عدد از ضرب سطر دوم ماتریس A در ستون اول ماتریس B ، به دست آمده است.

$$4 \times 3 + 7 \times 1 = 19$$

ستون اول

درایه سطر دوم، ستون دوم ماتریس $A \times B$ ، عدد ۳۸ است این عدد از ضرب سطر دوم ماتریس A در ستون دوم ماتریس B ، به دست آمده است.

$$4 \times 6 + 7 \times 2 = 38$$

ستون دوم

اگر A یک ماتریس مربعی باشد، آن گاه منظور از A^2 یعنی AA ، A^3 یعنی A^2A و الی آخر.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و داندود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی‌برداری؛ به اشتراک‌گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

مثال: فرض کنید $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ ، A^{100} را حساب کنید.

پاسخ: با محاسبه توان‌های A ، الگویی برای آن به دست می‌آوریم و A^{100} را محاسبه می‌کنیم.

$$A^2 = A \times A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = A \times A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^4 = A \times A^3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$$

⋮

$$A^{100} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -100 & 1 \end{bmatrix}$$

قضیه: فرض کنیم A ، B و C سه ماتریس باشند که به تناسب حضور در مسئله اعمال جمع و ضرب بین آن‌ها تعریف شده باشد در این صورت:

ضرب ماتریس‌ها، خاصیت شرکت‌پذیری

دارد.

$$A(BC) = (AB)C \quad ۱.$$

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی‌برداری؛ به اشتراک‌گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

پخش ضرب ماتریسی نسبت به جمع
ماتریسی از سمت چپ

$$A(B + C) = AB + AC \quad ۲.$$

پخش ضرب ماتریسی نسبت به جمع
ماتریسی از سمت راست

$$(A + B)C = AC + BC \quad ۳.$$

تذکر: ضرب ماتریس‌ها خاصیت جابجایی ندارد، یعنی در حالت کلی $AB \neq BA$ ، البته ممکن است به ازای بعضی ماتریس‌های خاص مانند A و B داشته باشیم $AB = BA$ اما این مطلب در حالت کلی برقرار نیست.

مثال: از تساوی زیر مقدار x را بیابید.

$$[3 \quad 2 \quad x] \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ x \\ 1 \end{bmatrix} = 0$$

پاسخ: با توجه به خاصیت شرکت پذیری ضرب ماتریس‌ها، داریم:

$$[3 \quad 2 \quad x] \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ x \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow [-2 + 3x \quad 6 + 2 \quad 3 + 2 + x] \begin{bmatrix} -1 \\ x \\ 1 \end{bmatrix} = 0$$

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

$$\Rightarrow [-2 + 3x \quad 8 \quad 5 + x] \begin{bmatrix} -1 \\ x \\ 1 \end{bmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow (-2 + 3x) \times (-1) + 8x + (5 + x) \times 1 = 0$$

$$\Rightarrow 2 - 3x + 8x + 5 + x = 0$$

$$\Rightarrow 6x = -7$$

$$\Rightarrow x = \frac{-7}{6}$$

ماتریس همانی

ماتریس همانی از مرتبه n ، $(n \times n)$ را که با I_n نشان می‌دهیم، ماتریس مربعی است که همه درایه‌های قطر اصلی آن برابر یک و سایر درایه‌های آن، صفر اند.

$$I_2 = I_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ماتریس همانی مرتبه ۲، I_2 یا $I_{2 \times 2}$

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی‌برداری؛ به اشتراک‌گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و داندود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

$$I_3 = I_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{ماتریس همانی مرتبه ۳، } I_3 \text{ یا } I_{3 \times 3}$$

قضیه: ماتریس همانی، عضو خنثی در عمل ضرب ماتریسی است. فرض کنیم A یک ماتریس مربعی مرتبه n باشد، در این صورت:

$$A \times I_n = I_n \times A = A$$

مثال:

$$\begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 8 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 8 & 3 \end{bmatrix}$$

9

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 8 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 8 & 3 \end{bmatrix}$$

دترمینان

اگر $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ یک ماتریس 2×2 باشد آن‌گاه، دترمینان A را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\det A = |A| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

اغلب $\det A$ را با $|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ نشان می‌دهیم.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی‌برداری؛ به اشتراک‌گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و داندود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و داندود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

دترمینان ماتریس 3×3 ، $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ به صورت زیر تعریف می شود:

$$\det A = |A| = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})$$

مثال: دترمینان ماتریس $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -3 & 4 & 0 \\ 6 & -7 & 2 \end{bmatrix}$ را به دست آورید.

پاسخ:

$$\det A = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})$$

$$= 1(4 \times 2 - 0 \times (-7)) - 2(-3 \times 2 - 6 \times 0) + 5(-3 \times (-7) - 4 \times 6)$$

$$= 1(8) - 2(-6) + 5(21 - 24)$$

$$= 8 + 12 - 15$$

$$= 5$$

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و داندود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی‌برداری؛ به اشتراک‌گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

ماتریس‌های وارون‌پذیر

تعریف: گیریم A یک ماتریس مربعی باشد اگر ماتریس مربعی B موجود باشد طوری که $AB = BA = I$ آن‌گاه می‌گوییم A وارون‌پذیر است و B را نیز وارون A می‌نامیم.

مثال: ماتریس $A = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ را در نظر می‌گیریم. اگر قرار دهیم $B = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -5 \end{bmatrix}$ آن‌گاه $AB = BA = I$ لذا A وارون‌پذیر و وارون آن ماتریس B است.

فرض کنیم A یک ماتریس مربعی باشد که وارون‌پذیر است. در این صورت وارون A منحصر به فرد است و آن را با نماد A^{-1} نشان می‌دهیم.

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

اگر $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ و $\det A = |A| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ ، آن‌گاه:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}$$

مثال: معکوس ماتریس $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$ را به دست آورید.

پاسخ: ابتدا دترمینان ماتریس A را می‌یابیم سپس A^{-1} .

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی‌برداری؛ به اشتراک‌گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی‌برداری؛ به اشتراک‌گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و داندود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

$$\det(A) = 2 \times (-4) - 1 \times 3 = -11$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix} = \frac{1}{-11} \begin{bmatrix} -4 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{11} & \frac{1}{11} \\ \frac{3}{11} & -\frac{2}{11} \end{bmatrix}$$

مثال: از رابطه ماتریسی $\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ ماتریس A ، را به دست آورید.

پاسخ: فرض کنیم $B = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ ، $C = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ و $D = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ در این صورت $BAC = D$.
طرفین این تساوی را از سمت چپ در B^{-1} و از سمت راست در C^{-1} ضرب می‌کنیم:

$$BAC = D \Rightarrow B^{-1}BACC^{-1} = B^{-1}DC^{-1}$$

از این‌که $B^{-1}B = I$ و $CC^{-1} = I$ نتیجه می‌شود $A = B^{-1}DC^{-1}$ بنابراین:

$$A = B^{-1}DC^{-1}$$

$$= \frac{-1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \times \frac{-1}{1} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 6 & -6 \\ -10 & 8 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$$

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی‌برداری؛ به اشتراک‌گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و داندود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن ([لینک خرید](#))، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

$$= \begin{bmatrix} ۱۲ & -۲۱ \\ -۱۷ & ۳۰ \end{bmatrix}$$

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن ([لینک خرید](#))، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی‌برداری؛ به اشتراک‌گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن ([لینک خرید](#))، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

پرسش‌های چهارگزینه‌ای فصل سیزدهم، ماتریس‌ها

۱. دترمینان ماتریس $\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}$ ، برابر است با: (راه آهن - ۹۴)

۲ (۱)

-۱۰ (۲)

-۶ (۳)

۶ (۴)

۲. اگر $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ ، آن‌گاه حاصل $a - b$ کدام است؟ (آموزش و پرورش - ۹۴)

۵ (۱)

۲ (۲)

-۱ (۳)

-۳ (۴)

۳. اگر $A^{-1} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ b & c \end{bmatrix}$ معکوس ماتریس $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ x & -1 \end{bmatrix}$ به ازای جميع مقادیر x باشد، آن‌گاه حاصل $b + c$ کدام است؟ (آموزش و پرورش - ۹۴)

$x - 1$ (۱)

$x + 1$ (۲)

$1 - x$ (۳)

$-x - 1$ (۴)

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی‌برداری؛ به اشتراک‌گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن ([لینک خرید](#))، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن ([لینک خرید](#))، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

۴. اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ، آن گاه مجموع درایه های ماتریس A^{95} کدام است؟ (آموزش و پرورش - ۹۵)

(۱) ۱۸۰

(۲) ۱۸۸

(۳) ۱۹۰

(۴) ۱۹۲

۵. اگر $A^2 + B^2 = \begin{bmatrix} 7 & 6 \\ 6 & 10 \end{bmatrix}$ و $A + B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ آن گاه حاصل $AB + BA$ کدام است؟
(فراگیر چهارم و آموزش و پرورش - ۹۶)

(۱) $\begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 6 & 1 \end{bmatrix}$

(۲) $\begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}$

(۳) $\begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$

(۴) $\begin{bmatrix} 6 & 6 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$

۶. اگر I ماتریس واحد و $A + 2I = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ باشد، دترمینان ماتریس A کدام است؟
(فراگیر پنجم و آموزش و پرورش - ۹۷)

(۱) ۴

(۲) -۶

(۳) -۲

(۴) ۸

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن ([لینک خرید](#))، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی‌برداری؛ به اشتراک‌گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و داندود از لینک قانونی آن ([لینک خرید](#))، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

۷. اگر $A = \begin{bmatrix} m & -1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$ و درایه سطر دوم و ستون اول A^2 برابر ۴ باشد، آن‌گاه مقدار m کدام است؟ (فراگیر پنجم و آموزش و پرورش - ۹۷)

- (۱) $-\sqrt{2}$
- (۲) -2
- (۳) 4
- (۴) $\sqrt{2}$

۸. اگر A یک ماتریس 2×2 ، آن‌گاه از تساوی $\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ ، مجموع درایه‌های ماتریس A کدام است؟ (فراگیر هشتم و آموزش و پرورش - ۹۹)

- (۱) ۱
- (۲) ۱.۵
- (۳) ۲
- (۴) ۰.۵

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی‌برداری؛ به اشتراک‌گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و داندود از لینک قانونی آن ([لینک خرید](#))، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و داندود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

پاسخ پرسش‌های چهارگزینه‌ای فصل سیزدهم، ماتریس‌ها

۱. گزینه ۲.

$$\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -4 & -1 \end{vmatrix} = 2 \times (-1) - (-2) \times (-4) = -2 - 8 = -10$$

۲. گزینه ۱.

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

در معادله ماتریسی $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ ، فرض کنیم $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ ، با ضرب A^{-1} در طرفین این معادله داریم:

$$A \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} A \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = A^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow I \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = A^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = A^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \frac{-1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow a = 4, b = -1$$

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و داندود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

$$\Rightarrow a - b = 4 - (-1) = 5$$

۳. گزینه ۱. از این که $AA^{-1} = I$ داریم:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ x & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a & 0 \\ b & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} a & 0 \\ ax - b & -c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

بنابراین $a = 1$ ، $-c = 1$ و $ax - b = 0$ ، که نتیجه می دهد، $x = b$ و $c = -1$ ، لذا:

$$b + c = x - 1$$

۴. گزینه ۴. با محاسبه توان های A ، الگویی برای آن به دست می آوریم و A^{95} را محاسبه می کنیم.

$$A^2 = A \times A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = A \times A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^4 = A \times A^3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 8 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

⋮

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و دانلود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و داندود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

$$A^{95} = \begin{bmatrix} 1 & 190 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

مجموع درایه‌های ماتریس A^{95} برابر با $192 = 1 + 190 + 1 + 0$ است.

۵. گزینه ۴.

$$(A + B)^2 = (A + B) \times (A + B) = A^2 + AB + BA + B^2$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 6 \\ 6 & 10 \end{bmatrix} + AB + BA$$

$$\Rightarrow AB + BA = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 7 & 6 \\ 6 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 & 12 \\ 12 & 13 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 7 & 6 \\ 6 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 6 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$$

۶. گزینه ۲.

$$A + 2I = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -2 - 4 = -6$$

۷. گزینه ۳.

$$A^2 = \begin{bmatrix} m & -1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} m & -1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m^2 - 2 & -m + 2 \\ 2m - 4 & 2 \end{bmatrix}$$

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و داندود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و داندود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

طبق فرض، درایه سطر دوم و ستون اول A^2 برابر ۴ است بنابراین:

$$2m - 4 = 4 \Rightarrow m = 4$$

۸. گزینه ۴.

فرض کنیم $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ ، $C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ و $D = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2.5 \end{bmatrix}$ ، در این صورت $BAC = D$. طرفین این تساوی را از سمت چپ در B^{-1} و از سمت راست در C^{-1} ضرب می‌کنیم:

$$BAC = D \Rightarrow B^{-1}BACC^{-1} = B^{-1}DC^{-1}$$

از این که $B^{-1}B = I$ و $CC^{-1} = I$ نتیجه می‌شود $A = B^{-1}DC^{-1}$ بنابراین:

$$A = B^{-1}DC^{-1}$$

$$= \frac{-1}{3} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2.5 \end{bmatrix} \times \frac{1}{1} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0.5 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0.5 & -1 \end{bmatrix}$$

مجموع درایه‌های ماتریس A برابر ۰.۵ است.

این فایل کاملاً تألیفی است. بنابر توضیحات مقدمه فایل هر گونه کپی برداری؛ به اشتراک گذاری با فرد دیگر، یا هر نوع استفاده دیگری از آن غیر از تهیه و خرید و داندود از لینک قانونی آن (لینک خرید)، شرعاً حرام و قانوناً تخلف بوده و عدم رضایت مادی و معنوی مؤلفین و پیگرد قانونی را در پی خواهد داشت.

کاربران گرامی

همانطور که می‌دانید کسب اطلاع سریع و به موقع از آخرین اخبار، فراخوان‌های جذب نیرو و آگهی‌های استخدامی محلی و کشوری، مهم‌ترین گام در جهت پیدا کردن شغل و استخدام شدن است.

امروزه به دلیل کثرت منابع خبری کاغذی و یا اینترنتی، روزنامه‌ها، نیازمندی‌ها، جراید محلی و سراسری، سایت‌ها و ... بطور حتم یک فرد قادر به تهیه، بررسی و اطلاع به هنگام از کلیه اخبار، آگهی‌ها و فراخوان‌ها و نحوه اقدام برای آنها نیست.

وبسایت «ای استخدام» با راه‌اندازی اولین سرویس هوشمند ارسال آگهی در کشور و اخذ مجوزهای قانونی از مراجع ذی‌ربط، تمامی اخبار، آگهی‌های استخدامی محلی و کشوری را چند لحظه پس از اعلام و انتشار و گرفتن تأییدیه صحت آنها، در پایگاه اینترنتی خود تجمیع و بازنشر نموده و پس از تفکیک آنها براساس رشته تحصیلی، تخصص کاری و شهر و استان به کاربران متقاضی خود پیامک و ایمیل می‌نماید. بدیهی است کاربران با استفاده از خدمات سایت «ای-استخدام»، به موقع از آگهی‌های استخدامی، روزنامه‌ها، سایت‌ها و سایر منابع اخبار و آگهی مطلع می‌شوند و تیم «ای استخدام» به جای کاربران تمام روزنامه‌ها، نیازمندی‌ها، وبسایت ارگان‌های دولتی و خصوصی و کلیه منابع اخبار و آگهی‌های استخدامی موثق و معتبر را بررسی می‌کند.

پس:

- ۱) دیگر از استخدام بانک‌ها و موسسات دولتی و خصوصی جا نمی‌مانید.
- ۲) تمام روزنامه‌ها، نیازمندی‌ها، سایت‌ها و ... برایتان بررسی می‌شود.
- ۳) با دریافت به محض انتشار آگهی‌ها، یک گام از سایر افراد جلوتر باشید.
- ۴) نیازی به صرف هزینه و زمان برای جستجو در روزنامه‌ها و اینترنت ندارید.
- ۵) اعتبار و صحت تمام آگهی‌ها توسط تیم محتوای وبسایت پیگیری می‌شود.

برای ثبت نام کلیک کنید

<http://panel.e-estekhdam.com/signup>

با عضویت در کانال تلگرام «ای استخدام» از فرصت‌های شغلی آگاه شوید:

برای عضویت در کانال‌های اطلاع‌رسانی سامانه «ای استخدام» کلیک کنید

https://t.me/e_estekhdam24

به منظور اطلاع از فرصت‌های شغلی، همچنین می‌توانید از نرم افزار سامانه «ای استخدام» و صفحه اینستاگرام www.instagram.com/e_estekhdam_official در گوشی‌های همراه خود استفاده کنید:

برای دانلود نرم افزار «ای - استخدام» کلیک کنید
www.e-estekhdam.com/mobile

صفحه اینستاگرام «ای استخدام»: [@e_estekhdam_official](https://www.instagram.com/e_estekhdam_official)

دیگر محصولات مرتبط سامانه «ای - استخدام»:
کتاب از آگهی استخدامی تا مصاحبه تخصصی، گزینش + منابع و سوالات
www.e-estekhdam.com/?p=1003901

جزوه آموزشی چگونه استخدام شویم؟
www.e-estekhdam.com/?p=56813

اصل سوالات عمومی دفترچه آزمون های استخدامی
www.e-estekhdam.com/?p=903200

ساخت رزومه کاری
www.e-estekhdam.com/?p=346152

بانک اطلاعات مشاغل و رشته ها (اطلاعات جامع)
www.e-estekhdam.com/?p=417440

با آرزوی موفقیت برای شما در آزمون های استخدامی
لطفا همواره دقت کنید که در صورت تمایل به خرید سوالات وبسایت «ای-استخدام» حتما از آدرس زیر
اقدام به خرید نمایید:

www.e-estekhdam.com/?p=983

شماره تماس های پشتیبانی وبسایت «ای-استخدام» به شرح زیر است:

۰۲۱۴۴۲۹۱۰۱۵

۰۲۱۴۴۲۹۱۸۷۴

با تشکر از خرید شما

مدیریت وب سایت ای استخدام (www.e-estekhdam.com)