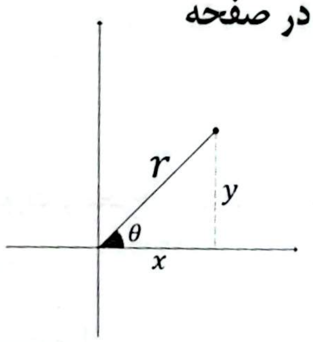
فصل اول

اعداد مختلط

هر عدد مختلط را می‌توان بصورت $z = x + iy$ نمایش داد بطوریکه x و y اعداد حقیقی هستند. x را قسمت حقیقی z و y را قسمت موهومی z می‌گویند. یعنی $x = \mathrm{Re}(z)$ و $y = \mathrm{Im}(z)$.
همچنین $i = \sqrt{-۱}$ تعریف می‌شود پس $i^۲ = -۱$.

نمایش عدد مختلط در صفحه



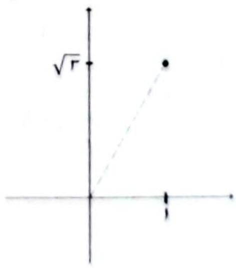
$$z = x + iy \begin{cases} \overbrace{r = |z| = \sqrt{x^۲ + y^۲}}^{\text{اندازه یا قدر مطلق } z} \\ \underbrace{\tan\theta = \dfrac{y}{x}}_{\text{آرگمان } z} \end{cases}$$

تذکر: برای بدست آوردن آرگمان z (یعنی θ) باید بسیار دقت کرد که نقطه مورد نظر در کدام ربع مختصات قرار می‌گیرد و بر اساس آن θ را تعیین کرد. (به مثال زیر دقت کنید.)

مثال ۱: قدرمطلق و آرگمان اعداد زیر را بیابید.

الف) $z = ۱ + \sqrt{۳}\, i$ ب) $z = -۱ - \sqrt{۳}\, i$

حل



$$\text{الف)}\ z = ۱ + \sqrt{۳}\, i \rightarrow \begin{cases} |z| = \sqrt{\sqrt{۳}^۲ + ۱^۲} = ۲ \\ \tan\theta = \dfrac{\sqrt{۳}}{۱} \xrightarrow{\text{ربع اول}} \theta = \dfrac{\pi}{۳} \end{cases}$$

$$\text{ب)}\ z = -۱ - \sqrt{۳}\, i \rightarrow \begin{cases} |z| = \sqrt{(-۱)^۲ + \left(-\sqrt{۳}\right)^۲} = ۲ \\ \tan\theta = \dfrac{-\sqrt{۳}}{-۱} \rightarrow \tan\theta = \sqrt{۳} \xrightarrow{\text{ربع سوم}} \theta = \dfrac{۴\pi}{۳} \quad \text{or} \end{cases}$$

چهار عمل اصلی در مجموعه اعداد مختلط

اگر $z_۱ = x_۱ + iy_۱$ و $z_۲ = x_۲ + iy_۲$ باشد،آنگاه داریم:

$$۱)z_۱ \pm z_۲ = (x_۱ \pm x_۲) + i(y_۱ \pm y_۲)$$

$$۲)z_۱.z_۲ = (x_۱ + iy_۱)(x_۲ + iy_۲) = x_۱x_۲ - y_۱y_۲ + i(x_۱y_۲ + x_۲y_۱)$$

تعریف : برای عدد مختلط بفرم $z = x + iy$، عدد $\overline{z} = x - iy$ را **مزدوج z** می‌نامیم، یعنی داریم:

$$Re(z) = Re(\overline{z}) \qquad , \qquad Im(z) = -Im(\overline{z})$$

خواص مزدوج عدد مختلط:

$$۱)\overline{(z_۱ \pm z_۲)} = \overline{z}_۱ \pm \overline{z}_۲ \qquad ۲)\overline{(z_۱z_۲)} = \overline{z}_۱.\overline{z}_۲$$

$$۳)\overline{\left(\frac{z_۱}{z_۲}\right)} = \frac{\overline{z}_۱}{\overline{z}_۲} \qquad ۴)if\ z \in \mathbb{R} \to \overline{z} = z$$

$$۵)z + \overline{z} = ۲Re(z) \qquad ۶)z - \overline{z} = ۲i\,Im(z)$$

$$\boxed{z.\overline{z} = |z|^۲ = x^۲ + y^۲}$$

$$۳)\frac{z_۱}{z_۲} = \frac{z_۱}{z_۲} \times \frac{\overline{z}_۲}{\overline{z}_۲} = \frac{z_۱\overline{z}_۲}{|z_۲|^۲}$$

اگر در مخرج کسر، یک عدد مختلط داشتیم، صورت و مخرج را در مزدوج مخرج ضرب می‌کنیم و در مخرج از ویژگی $z.\overline{z} = |z|^۲$ استفاده می‌کنیم.

مثال ۲: قدر مطلق $z = \frac{i(۲+۳i)(۵-۲i)}{۲-i}$ را بدست آورید. **(قزوین ۸۷)**

حل

روش اول:

$$z = \frac{(۲i + ۳i^۲)(۵-۲i)}{۲-i} = \frac{(۲i-۳)(۵-۲i)}{۲-i} = \frac{-۱۱+۱۶i}{۲-i} \times \frac{۲+i}{۲+i} = \frac{-۳۸+۲۱i}{۲^۲+۱^۲} = \frac{-۳۸}{۵} + \frac{۲۱}{۵}i$$

$$|z| = \sqrt{\left(\frac{-۳۸}{۵}\right)^۲ + \left(\frac{۲۱}{۵}\right)^۲} = \frac{۱}{۵}\sqrt{۳۸^۲ + ۲۱^۲} = \frac{۱}{۵}\sqrt{۱۸۸۵}$$

روش دوم:

$$|z| = \left|\frac{i(۲+۳i)(۵-۲i)}{۲-i}\right| = \frac{|i||۲+۳i||۵-۲i|}{|۲-i|} = \frac{\sqrt{۰^۲+۱^۲} \times \sqrt{۲^۲+۳^۲} \times \sqrt{۵^۲+(-۲)^۲}}{\sqrt{۲^۲+(-۱)^۲}} = \frac{\sqrt{۱۸۸۵}}{۵}$$

مکانهای هندسی در صفحه مختلط

مثال۳: همه اعداد حقیقی x و y را تعیین کنید که در رابطه های زیر صدق کند.

الف) $(x+iy)^2=(x-iy)^2$ ب) $\dfrac{x+iy}{x-iy}=x-iy$

حل

الف) $x^2+i^2y^2+2ixy=x^2+i^2y^2-2ixy \to 4ixy=0 \to xy=0 \to \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$

یعنی عدد مختلط باید روی یکی از محورهای مختصات قرار گیرد.

■

ب) $\dfrac{x+iy}{x-iy}=x-iy \to x+iy=(x-iy)^2 \to x+iy=x^2+i^2y^2-2ixy$

$x+iy=x^2-y^2-2ixy \to x^2-y^2-x-iy(2x+1)=0$

برای اینکه عددمختلطی برابر صفر شود، هم قسمت حقیقی وهم قسمت موهومی اش باید برابر صفر باشد،پس قسمت حقیقی وموهومی را برابر صفر قرارداده ودر یک دستگاه آن را حل می کنیم:

$$\begin{cases} x^2-y^2-x=0 \quad (*) \\ y(2x+1)=0 \begin{cases} y=0 \xrightarrow{(*)} x^2-x=0 \begin{cases} x=0 \to (0,0) \\ x=1 \to (1,0) \end{cases} \\ x=-\dfrac{1}{2} \xrightarrow{(*)} \dfrac{1}{4}-y^2+\dfrac{1}{2}=0 \to y=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2} \to \begin{cases} \left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ \left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{-\sqrt{3}}{2}\right) \end{cases} \end{cases} \end{cases}$$

چون مخرج کسر را صفر میکند، قابل قبول نیست.

پس این رابطه، بیانگر سه نقطه است: $(1,0),\left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right),\left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{-\sqrt{3}}{2}\right)$

مثال۴: اگر z یک عدد مختلط باشد، مکانهای زیر را در صفحه اعداد مختلط تعیین و رسم کنید.

الف) $\operatorname{Re}\left(\dfrac{1}{z}+1\right)>2$ ب) $\operatorname{Im}\left(\dfrac{1}{z}+1\right)<2$

حل

$z=x+iy \to \bar{z}=x-iy \to \dfrac{1}{\bar{z}}=\dfrac{1}{x-iy}\times\dfrac{x+iy}{x+iy}=\dfrac{x+iy}{x^2+y^2}$

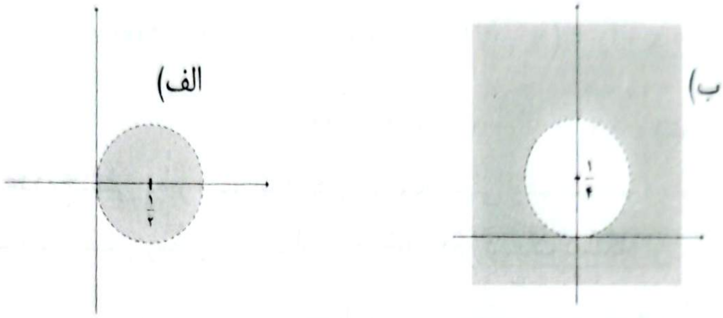
$\dfrac{1}{\bar{z}}+1=\dfrac{x+iy}{x^2+y^2}+1=\dfrac{(x^2+x+y^2)+iy}{x^2+y^2}$

الف) $\mathrm{Re}\left(\frac{1}{\bar z}+1\right)>2\to\frac{x^2+x+y^2}{x^2+y^2}>2\to x^2+x+y^2>2x^2+2y^2$

$x^2-x+\frac{1}{4}+y^2<\frac{1}{4}\to\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2<\frac{1}{4}\to$ درون دایره ای به مرکز $(\frac{1}{2},0)$ و شعاع $\frac{1}{2}$

ب) $\mathrm{Im}\left(\frac{1}{\bar z}+1\right)<2\to\frac{y}{x^2+y^2}<2\to x^2+y^2>\frac{y}{2}\to x^2+y^2-\frac{y}{2}+\frac{1}{16}>\frac{1}{16}$

$x^2+\left(y-\frac{1}{4}\right)^2>\left(\frac{1}{4}\right)^2\to$ بیرون دایره‌ای به مرکز $(0,\frac{1}{4})$ و شعاع $\frac{1}{4}$



نکته ۱: $\boxed{e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta=\mathrm{cis}(\theta)}$ به این رابطه، فرمول اویلر گفته می‌شود که بـه کمـک بسط مک لورن $e^{i\theta}$، $\cos\theta$ و $\sin\theta$ ثابت می‌شود. همچنین داریم:

$$\cos\theta+i\sin\theta=e^{i\theta}\to(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\left(e^{i\theta}\right)^n\to(\cos\theta+i\sin\theta)^n=e^{in\theta}$$

$\to\boxed{(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta}$ **رابطه دموآور**

مثال ۵: نشان دهید که: $\left(\frac{1+i\tan\theta}{1-i\tan\theta}\right)^n=\frac{1+i\tan(n\theta)}{1-i\tan(n\theta)}$. **(دمیدوویچ)**

حل

$$\left(\frac{1+i\tan\theta}{1-i\tan\theta}\right)^n=\left(\frac{\cos\theta+i\sin\theta}{\cos\theta-i\sin\theta}\right)^n=\left(\frac{\cos\theta+i\sin\theta}{\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)}\right)^n$$

$$\xrightarrow{\text{رابطه دموآور}}\frac{\cos n\theta+i\sin n\theta}{\cos(-n\theta)+i\sin(-n\theta)}=\frac{\cos n\theta+i\sin n\theta}{\cos n\theta-i\sin n\theta}\xrightarrow[\times\frac{1}{\cos n\theta}]{\times\frac{1}{\cos n\theta}}\frac{1+i\frac{\sin n\theta}{\cos n\theta}}{1-i\frac{\sin n\theta}{\cos n\theta}}=\frac{1+i\tan(n\theta)}{1-i\tan(n\theta)}$$